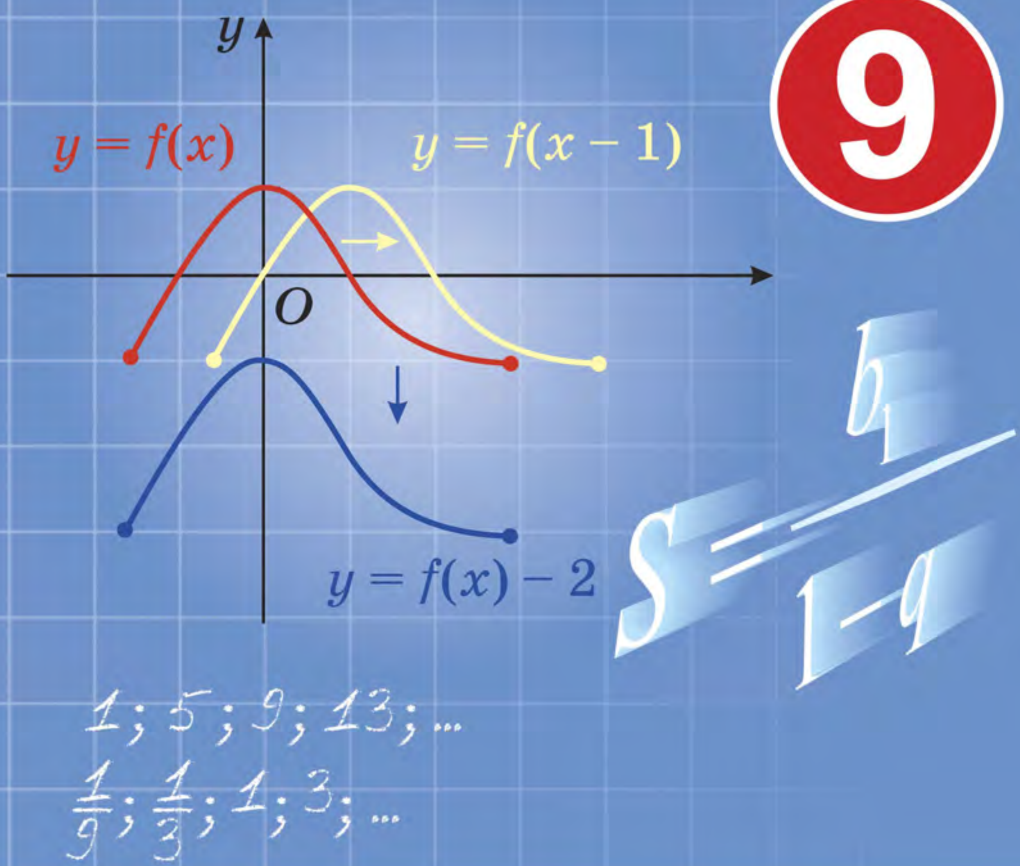
И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

АЛГЕБРА

9



И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

Минск «Народная асвета» 2019

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.144я721
А80

Рецензенты:

кафедра высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета (доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Беняш-Кривец*); учитель математики высшей квалификационной категории государственного учреждения образования «Средняя школа № 24 г. Минска» *Г. С. Лаврентьева*

ISBN 978-985-03-3077-2

Уважаемые девятиклассники!

По этой книге вы продолжите изучать алгебру. Книга состоит из четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы, где вы встретите следующие условные обозначения:

— задания на повторение для подготовки к изучению нового материала;

— новый теоретический материал и методы его применения;

— алгоритмы;

— важные правила и утверждения;

— дополнительный материал для углубления математических знаний;

— основные примеры с решениями и подробным описанием последовательности действий;

— устные вопросы и задания;

— задания для работы в классе;

— задания для домашней работы;

— задания для повторения;

* — задания повышенной сложности.

Каждая глава учебного пособия заканчивается разделами «Итоговая самооценка», «Практическая математика», «Увлекательная математика». В них вы найдете перечень требований к усвоению теоретического материала и практические задания для самопроверки, задачи на применение математики в различных областях жизни, а также задачи для тех, кто увлекается математикой.

Для обобщения изученного ранее материала в учебном пособии размещен раздел «Итоговое повторение».

Дополнительные материалы к книге (тренажеры, тесты, тренировочные контрольные работы, исторические сведения и задачи практического содержания) можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика».

Желаем успехов!

Повторение курса алгебры 7—8-х классов

1. Пользуясь свойствами степени с целым показателем, вычислите:

а) $3^{-2}\cdot 3^{5}$; б) $7^{-8}\cdot 7^{8}$;

в) $12^{8}:12^{6}$; г) $5^{-9}:5^{-7}$;

д) $\left(3^{2}\right)^{2}$; е) $\left(0{,}1^{3}\right)^{-1}$;

ж) $18^{5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{5}$; з) $\frac{38^{4}}{19^{4}}$;

и) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 0{,}2^{-2}$;

к) $0{,}7^{-3}:1{,}4^{-3}$.

1) $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$;

2) $a^{m}:a^{n}=a^{m-n},\ a\neq 0$;

3) $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$;

4) $a^{n}\cdot b^{n}=(ab)^{n}$;

5) $\frac{a^{n}}{b^{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n},\ b\neq 0$;

6) $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}},\ a\neq 0$.

Если $a\neq 0$, то $a^{0}=1$.

2. Найдите значение выражения:

а) $81\cdot 3^{-5}$; б) $1000\cdot 0{,}1^{5}$; в) $125^{-4}:25^{-6}$;

г) $7^{-15}\cdot\left(49^{-4}\right)^{-2}$; д) $\frac{36^{-5}}{6^{-3}\cdot 6^{-5}}$; е) $\left(4^{-10}\cdot 2^{21}\right)^{-4}$.

3. Вычислите:

а) $5^{7}\cdot 5^{-5}$; б) $10^{9}:10^{6}$; в) $\left(0{,}1^{2}\right)^{-2}$;

г) $1{,}6^{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{3}$; д) $\frac{2{,}8^{5}}{1{,}4^{5}}$; е) $16\cdot 2^{-6}$;

ж) $6^{-17}:\left(36^{-4}\right)^{2}$; з) $\frac{7^{-3}\cdot 49^{-4}}{7^{-9}}$.

4. Используя формулы сокращенного умножения и правила раскрытия скобок, представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(a-b)(a+b)-a(a-1)$;

б) $(m+2)^{2}+4m(m-1)$;

в) $(b-5)^{2}-(b-3)(b+3)$;

г) $(c-2)(c+8)-(c-3)^{2}$.

$(a-b)(a+b)=a^{2}-b^{2}$

$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$

$(a-b)^{2}=a^{2}-2ab+b^{2}$

5. Вынесите общий множитель за скобки в выражении:

а) $10a - 35b$; б) $5x + xy$; в) $2ab - 4ac$;
г) $3a^2 + 12ab$; д) $2b^4 - b^2$; е) $21a^2b + 3ab$.

6. Разложите на множители двучлен:

а) $a^2 - 25$; б) $16 - 9x^2$;
в) $4m^2 - 49n^4$; г) $a^2b^2 - 1$.

7. Разложите многочлен на множители способом группировки:

а) $a^2 + 3a + ab + 3b$; б) $15m - 5n - mn + 3m^2$.

8. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $a^2 + 4a + 4$; б) $9b^2 - 6b + 1$;
в) $m^2 - 18mn + 81n^2$; г) $x^4 + 2x^2y + y^2$.

9. Разложите, если это возможно, на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 8x - 9$;
б) $6x^2 - 7x + 1$;
в) $-x^2 - 5x + 6$;
г) $5x^2 + 11x + 2$.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

10. Разложите многочлен на множители:

а) $8ab - 4ac$; б) $6x^2y - 3xy$;
в) $m^2 - 36$; г) $25 - 4y^2$;
д) $a^2 - 4a + ab - 4b$; е) $x^3 - x^2 + x - 1$.

Какими способами разложения многочленов на множители вы пользовались?

11. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $x^2 - 10x + 25$;
б) $4a^2 + 4ab + b^2$.

12. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 2x - 8$;
б) $5x^2 + 6x + 1$.

13. Пользуясь определением и свойствами арифметического квадратного корня, вычислите:

а) $\sqrt{81}-\sqrt{\frac{4}{9}}$;

б) $2\sqrt{36}+\frac{\sqrt{64}}{4}$;

в) $\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{169}$;

г) $\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2$;

д) $\sqrt{0{,}25\cdot 81}$;

е) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{800}$;

ж) $\sqrt{\frac{0{,}01}{225}}$;

з) $\frac{\sqrt{450}}{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{a}=b$, если $b\geqslant 0$ и $b^2=a$

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, где $a\geqslant 0$

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

14. Выполните действия и определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $7\sqrt{200}-\sqrt{50}$;

б) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{27}\right)\sqrt{3}$;

в) $\left(6-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+6\right)$;

г) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\sqrt{12}$.

15. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$; г) $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

16. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{36}+\sqrt{\frac{9}{16}}$;

б) $\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{225}$;

в) $\sqrt{0{,}49\cdot 64}$;

г) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;

д) $5\sqrt{27}-15\sqrt{3}$;

е) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)\sqrt{5}$;

ж) $\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$;

з) $\left(\sqrt{2}+3\right)^2-\sqrt{72}$.

17. Решите уравнение:

а) $5x - 2(x + 3) = 9;$

б) $3(x - 1) - 4(x + 5) = 7 - 2x;$

в) $\frac{x + 2}{9} - \frac{1 - x}{18} = 1;$

г) $(x + 3)^2 - 10 = x(x + 5).$

Линейное уравнение

$ax = b$

Линейные неравенства

$ax > b;$ $ax < b;$

$ax \geqslant b;$ $ax \leqslant b$

Линейная функция

$y = kx + b$

График линейной функции — прямая.

18. Решите неравенство, ответ запишите в виде числового промежутка:

а) $3x - 5(x - 1) > 7;$

б) $\frac{x - 1}{3} \leqslant 2x + \frac{3x + 1}{4}.$

19. Постройте график функции:

а) $y = 3x - 2;$ б) $y = -x + 3;$ в) $y = \frac{x}{3};$ г) $y = -4.$

20. Не выполняя построения графика, для функции $y = -5x + 35$ найдите:

а) область определения;

б) множество значений;

в) нуль;

г) промежутки знакопостоянства;

д) угловой коэффициент прямой;

е) координаты точки пересечения графика функции с осью ординат.

21. Решите уравнение:

а) $7x - (x + 2) = x - 8;$ б) $(x - 4)^2 + 2 = x(x + 6);$

в) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 = 11x + 8.$

22. Решите неравенство, ответ запишите в виде числового промежутка:

а) $2x + 5(1 - x) < 20;$ б) $\frac{x + 3}{3} - \frac{x - 4}{7} \geqslant 1.$

23. Постройте график функции $y = -2x + 3.$

24. Воспользуйтесь формулой корней квадратного уравнения и решите уравнение:

а) $x^2 - 8x - 20 = 0$;

б) $3x^2 + 4x + 1 = 0$;

в) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;

г) $7x^2 - 2x + 1 = 0$;

д) $5x^2 + x - 2 = 0$.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Если $D > 0$, то

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то нет корней.

25. Решите уравнение:

а) $(x+4)^2 - 2(x-5) = 18$;

б) $(2x-1)^2 - x(x-1) = 1$;

в) $\frac{(x-3)^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{2} = 1 - x$.

26. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$;

б) $x^2 - 4x + 3 < 0$;

в) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$;

г) $x^2 + 3x + 7 < 0$;

д) $3x^2 + x > 0$;

е) $x^2 - 49 \leqslant 0$.

Квадратные неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0;$$

$$ax^2 + bx + c < 0;$$

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0;$$

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

График квадратичной функции — парабола.

27. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 - 4x + 3$;

б) $y = -x^2 + 2x + 8$;

в) $y = (x-3)^2 - 4$;

г) $y = -(x-3)(x-5)$.

28. Не выполняя построения графика, для функции $y = 3x^2 - 12x + 9$ найдите:

а) область определения;

б) координаты вершины параболы;

в) множество значений;

г) ось симметрии параболы;

д) нули;

е) промежутки знакопостоянства;

ж) промежутки монотонности;

з) координаты точки пересечения графика функции с осью ординат.

29. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; б) $(x + 2)^2 = 4(x + 5)$.

30. Решите неравенство:

а) $x^2 - 5x + 4 < 0$; б) $2x^2 + 5x + 2 \geqslant 0$;

в) $x^2 - 4x + 4 > 0$; г) $x^2 - 6x \leqslant 0$.

31. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 8$.

Глава 1

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Рациональная дробь

1.1. Найдите значение многочлена $3x^3-2x^2+x-3$ при:
а) $x=1$; б) $x=-1$.

1.2. Из выражений a^4+2a^3-7; $\frac{x^2}{4}$; $b-c$; 5; $x:(y-1)$; m^2-7m; y^4 выберите:

а) одночлены; б) многочлены.

1.3. Найдите область определения выражения:

а) $3:(x-8)$; б) $5:(x^2+7x)$;

в) $(2x-1):(x^2-36)$; г) $2:(x^2+1)$.

Рассмотрим задачу. Туристы в первый день проплыли на лодке по течению реки m км, а во второй — на 6 км больше. Сколько времени продолжалось все путешествие, если собственная скорость лодки равна v $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а скорость течения реки — 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение. Так как за два дня туристы преодолели $(2m+6)$ км по течению реки, а скорость движения лодки по течению реки равна $(v+2)\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то время, затраченное на весь путь, равно $(2m+6):(v+2)$ ч. Частное $(2m+6):(v+2)$ можно записать в виде дроби $\frac{2m+6}{v+2}$.

Ответ: $\frac{2m+6}{v+2}$ ч.

При решении этой задачи получили дробь, в числителе и знаменателе которой записаны многочлены. Такая дробь называется рациональной.

Определение. Дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены, называется **рациональной дробью**.

Например, выражения $\frac{a-b}{a+b}$; $\frac{x^2-1}{x^3+7}$; $\frac{y-6}{y}$; $\frac{m}{n}$; $\frac{c+2d}{15}$; $\frac{8}{11}$ являются рациональными дробями.

Рациональная дробь является рациональным выражением.

Выражения, составленные из чисел, переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень, называют **рациональными выражениями**.

Целые рациональные выражения

$8a^3b$; $x^2 - y^4$; $(a-b)^2$; $\frac{m-n}{5}$; $(x-y):3$; $x + \frac{x^3-1}{12}$

Если рациональное выражение **не содержит деления на выражение с переменными**, то оно называется **целым** рациональным выражением.

Например, выражения $2x^2y$; $(2+a)(-3d)$; $4x^2 - 1$; $\frac{5a}{3} - 1$ являются целыми рациональными выражениями.

Рациональное выражение, **содержащее деление на выражение с переменными**, называют **дробным** рациональным выражением.

Дробные рациональные выражения

$\frac{6}{x-9}$; $\frac{m}{n}$; $5 + \frac{x^2-1}{2x+3}$; $\frac{15}{x^2-y^2} + \frac{6}{x}$

Например, выражения $\frac{x+3}{y-2}$; $\frac{5}{ab}$; $\frac{4x^2-y}{2x^2-3x+1}$; $\frac{1}{a} - 2{,}5$; $\frac{2m}{n^2+4}$ являются дробными рациональными выражениями, поскольку содержат (кроме действий сложения, вычитания, умножения) деление на выражение с переменными.

Связь между понятиями «рациональная дробь», «целое рациональное выражение» и «дробное рациональное выражение» иллюстрирует рисунок 1.

Целые рациональные выражения имеют смысл при любых значениях входящих в них переменных.

Например, областью определения выражения $9x^3 - 4x^2 - 1$ является множество всех действительных чисел.

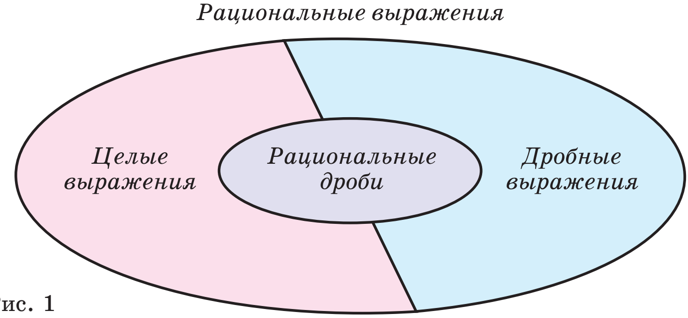


Рис. 1

Дробные рациональные выражения имеют смысл при всех значениях переменных, кроме тех, которые обращают знаменатели дробей в нуль.

Например, выражение $8x - \frac{6}{x+5}$ при $x = -5$ не имеет смысла, так как при $x = -5$ знаменатель дроби $\frac{6}{x+5}$ обращается в нуль. Значит, данное выражение имеет смысл при всех значениях переменной, кроме -5.

Рациональная дробь $\frac{4}{a^2 - 36}$ имеет смысл при любых значениях переменной, кроме чисел -6 и 6, так как при $a = -6$ и при $a = 6$ знаменатель дроби обращается в нуль.

Областью определения рациональной дроби является множество всех значений входящих в нее переменных, кроме тех, которые обращают ее знаменатель в нуль.

Пример. Найдите область определения рациональной дроби:

а) $\frac{5x}{x-4}$; б) $\frac{6y-1}{y(y+8)}$; в) $\frac{7a-4}{a^2+9}$.

Решение. а) Областью определения рациональной дроби $\frac{5x}{x-4}$ является множество всех действительных чисел, кроме числа 4, так как при $x = 4$ знаменатель дроби обращается в нуль. Можно записать: $x \in (-\infty;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

б) Найдем, при каких значениях переменной знаменатель дроби $\frac{6y-1}{y(y+8)}$ обращается в нуль. Для этого решим уравнение $y(y+8) = 0$. Корнями данного уравнения являются числа -8 и 0. Значит, областью определения дроби $\frac{6y-1}{y(y+8)}$ является множество всех действительных чисел, кроме чисел -8 и 0, т. е. $y \in (-\infty;\ -8) \cup (-8;\ 0) \cup (0;+\infty)$.

в) Поскольку выражение $a^2 + 9$ является положительным числом при любых значениях переменной, то нет таких значений переменной, при которых знаменатель дроби $\frac{7a-4}{a^2+9}$ был бы равен нулю. Значит, рациональная дробь имеет смысл при любых значениях переменной, т. е. областью определения дроби является множество всех действительных чисел, $a \in \boldsymbol{R}$.

Рациональные выражения	
1. Какие из следующих выражений: а) $6{,}7z + \frac{2}{3}xy$; б) $2\sqrt{xy}$; в) $\frac{x+y}{x-6}$; г) $4 + \frac{1}{30}x^2y$; д) $\sqrt{2}x$ — являются рациональными?	Выражения а), в), г) и д) являются рациональными, так как составлены из чисел, переменных и содержат действия сложения, вычитания, умножения и деления. Выражение б) не является рациональным, так как содержит действие извлечения корня из выражения с переменными.
2. Какие из следующих выражений: а) $0{,}2x + \frac{x}{3}$; б) $\frac{2x^2 - y^4}{x}$; в) $\frac{x-5y}{2x+y}$; г) $\frac{4-y}{3}$; д) $\frac{y+5}{4x-6}$ — являются дробными рациональными?	Выражения б), в), д) являются дробными рациональными, так как составлены из чисел, переменных, натуральных степеней переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и содержат действие деления на рациональное выражение с переменными.
3. Какие из следующих выражений: а) $\frac{14c}{15}$; б) $\frac{2x}{x^4+2}$; в) $\frac{6}{p-5}$; г) $\frac{m}{6m^2+3}$; д) $\frac{8}{9c}$ — являются рациональными дробями?	Выражения а) — д) являются рациональными дробями, так как каждое из них представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами.
4. Найдите значение выражения: а) $\frac{x+3}{x-3}$ при $x = 0$; б) $a + \frac{8}{a-1}$ при $a = \frac{1}{2}$; в) $\frac{2m-n}{3m+2n}$ при $m = 4$, $n = -5$.	а) Подставим $x = 0$ в выражение $\frac{x+3}{x-3}$ и получим: $\frac{x+3}{x-3} = \frac{0+3}{0-3} = -1$. б) При $a = \frac{1}{2}$ имеем: $a + \frac{8}{a-1} = \frac{1}{2} + \frac{8}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} + 8 : \left(-\frac{1}{2}\right) =$ $= \frac{1}{2} - 16 = -15{,}5$. в) Если $m = 4$, $n = -5$, то $\frac{2m-n}{3m+2n} =$ $= \frac{2 \cdot 4 - (-5)}{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5)} = \frac{8+5}{12-10} = \frac{13}{2} = 6{,}5$.

Область определения рационального выражения	
5. Найдите область определения рациональной дроби: а) $\frac{x+5}{6-2x}$; б) $\frac{2x-7}{x(x+2)}$; в) $\frac{x+15}{x^2-16}$.	а) Найдем, при каком значении переменной знаменатель дроби обращается в нуль. Для этого решим уравнение $6-2x=0$; $x=3$. Областью определения данной дроби является множество всех действительных чисел, кроме числа 3, т. е. $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $x(x+2) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq -2$. Областью определения данной дроби является множество всех действительных чисел, кроме чисел -2 и 0, т. е. $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $x^2-16 \neq 0$; $(x-4)(x+4) \neq 0$; $x \neq 4$, $x \neq -4$. Областью определения данной дроби является множество всех действительных чисел, кроме чисел -4 и 4. Значит, $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$.
6. Найдите область определения рационального выражения: а) x^3-4x^2+2; б) $\frac{5}{x-1}+\frac{x+6}{x+3}$.	а) Выражение x^3-4x^2+2 является целым рациональным, его областью определения является множество всех действительных чисел, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$. б) Знаменатель первой дроби обращается в нуль при $x=1$, а знаменатель второй дроби равен нулю при $x=-3$. Значит, областью определения данного выражения является множество всех действительных чисел, кроме чисел 1 и -3. Таким образом, $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$.

?

1. Верно ли, что целое рациональное выражение не содержит действия деления?

2. В какой области на рисунке 1 находятся многочлены?

1.4. Из выражений $\frac{5x}{7y^2}$; $\frac{2a^3}{5}-\frac{b}{4}$; $12+\frac{m}{n}$; $\frac{2}{9x-7}$; $\frac{y-3}{y+3}$; $2{,}4a^5b^6$; $5\sqrt{ab}$; $\frac{c^4+2c+3}{c}$; $\frac{x^2-xy}{6}$; $\frac{5}{7}$ выберите: а) целые рациональные выражения; б) дробные рациональные выражения; в) рациональные дроби.

1.5. Приведите пример рациональной дроби, являющейся:
а) целым рациональным выражением;
б) дробным рациональным выражением.

1.6. Найдите значение рациональной дроби $\frac{m^2+5m}{2m-1}$ при:
а) $m = -2$; б) $m = 0$.

1.7. Чему равно значение рациональной дроби $\frac{4a-b}{2a+5b}$, если:
а) $a = -3$, $b = 1$; б) $a = 0{,}1$, $b = -0{,}3$?

1.8. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $b - \frac{3b-1}{b^2+1}$, если $b = 7$;

б) $\frac{x^3-2x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{x}$, если $x = \sqrt{3}$;

в) $\frac{x+5}{y} - \frac{y-1}{x-3}$, если $x = -2{,}5$, $y = 10$;

г) $\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}$, если $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{7}$.

1.9. Приведите пример значений переменных a и b, при которых значение рациональной дроби $\frac{a+1}{b}$ является:
а) целым числом; б) дробным числом;
в) отрицательным числом; г) иррациональным числом.

1.10. Найдите значение функции $y = \frac{x^2-x}{x-3}$ при значении аргумента, равном:
а) 1; б) $2\frac{1}{3}$; в) 1,5; г) $\sqrt{2}+3$.

Выберите из этих значений: 1) целые; 2) рациональные; 3) иррациональные.

1.11. Найдите область определения рациональной дроби:

а) $\frac{x-1}{x-4}$; б) $\frac{3c+5}{1-5c}$; в) $\frac{8m-5}{m}$; г) $\frac{8}{x(x+2)}$;

д) $\frac{12a+7}{a^2-8a}$; е) $\frac{8b-1}{(b-3)(b+2)}$; ж) $\frac{5y}{y^2-9}$; з) $\frac{3a-1}{a^2-7}$;

и) $\frac{x+4}{12}$; к) $\frac{9}{n^2+7}$; л) $\frac{6x}{2x^2+1}$; м) $\frac{12c-1}{c^2}$.

1.12. Приведите пример рациональной дроби, областью определения которой является множество всех действительных чисел, кроме: а) числа 5; б) чисел –4 и 2; в) чисел 0 и 15.

1.13. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) x^2+8x-5; б) $x+\frac{x-4}{7}$; в) $\frac{x-6}{x}+\frac{5}{x-2}$;

г) $\frac{2x-1}{3x+2}-\frac{x-7}{x-4}$; д) $\frac{5}{x^2+3x}+\frac{8}{x-1}$; е) $\frac{9}{x^2-25}+\frac{7}{x^2+16}$.

1.14. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{3x-1}{x+2}$; б) $\frac{x-4}{x}+\frac{9x+1}{2x-3}$; в) $\frac{3}{8x^2+x}$;

г) $\frac{x+4}{x^2-6x+9}$; д) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{9}$; е) $\frac{7}{x^2-5}+\frac{3}{x^2}$.

1.15*. Известно, что $3a-12b=1$. Найдите, если это возможно, значение выражения:

а) $a-4b$; б) $\frac{5}{6a-24b}$; в) $\frac{8b-2a}{7}$; г) $\frac{3}{a^2-8ab+16b^2}$.

1.16*. Выясните, имеет ли смысл выражение $\frac{x}{4-\frac{4}{x}}$ при:

а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=-1$; г) $x=0{,}5$.

Если имеет, то найдите значение выражения при этих значениях переменных.

1.17*. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{x}{1-\frac{5}{x}}$; б) $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$.

1.18. Из выражений $12x^2-xy$; $\frac{a+2}{a-2}$; $48n-\frac{m}{n}$; $\frac{8x+2}{3x-4}$; $\frac{y^2-18}{6}$; $7\sqrt{mn}$; $8m^2n$; $\frac{b^3-5b+4}{3b}$; $\frac{1}{9}$ выпишите все:

а) целые рациональные выражения;

б) рациональные дроби.

1.19. Определите, чему равно значение дроби $\frac{x^2-5x}{x-1}$, если:

а) $x=-3$; б) $x=0$.

1.20. Найдите значение выражения $\frac{3m+n}{m-3n}$ при:

а) $m=2$, $n=-5$; б) $m=-0{,}5$, $n=-0{,}4$.

1.21. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5a-3}{4a+1}-3a$, если $a=0{,}25$;   б) $\frac{2\sqrt{5}}{b}-3b^2$, если $b=\sqrt{5}$.

1.22. Определите, какие из значений функции $y=\frac{2x-1}{x^2+5}$ при значении аргумента, равном: а) -2; б) $0{,}5$; в) $\sqrt{3}$ — являются целыми; рациональными; иррациональными числами.

1.23. Найдите область определения рациональной дроби:

а) $\frac{a+4}{a-6}$;   б) $\frac{9x-5}{2x+1}$;   в) $\frac{7n+4}{n}$;   г) $\frac{12y-1}{y(y-3)}$;

д) $\frac{9}{c^2-8c}$;   е) $\frac{x+3}{(x-5)(x+1)}$;   ж) $\frac{9d}{d^2-16}$;   з) $\frac{15c+2}{c^2-5}$;

и) $\frac{a^2-9}{8}$;   к) $\frac{x-6}{x^2+5}$;   л) $\frac{8m}{3m^2+2}$;   м) $\frac{3x-5}{x^2}$.

1.24. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) x^2-9x+1;   б) $3x-\frac{8x+1}{5}$;   в) $\frac{x+7}{x-5}-\frac{2}{x}$;

г) $\frac{x+4}{5x-1}+\frac{6x}{x+2}$;   д) $\frac{12}{x^2-8x}+\frac{5}{x+6}$;   е) $\frac{7}{x^2-36}-\frac{8}{x^2+49}$.

1.25*. Найдите, если это возможно, значение выражения $\dfrac{x}{x-\frac{16}{x}}$ при:

а) $x=0$;   б) $x=1$;   в) $x=4$;   г) $x=-4$.

1.26. Из дробей $\frac{5}{45}$; $\frac{3}{17}$; $\frac{2}{21}$; $\frac{7}{91}$; $\frac{6}{48}$ выберите все несократимые дроби.

1.27. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{8}{\sqrt{2}}$;   б) $\frac{12}{\sqrt{5}-1}$.

1.28. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) x^2-4x+3;   б) $2x^2+5x+3$.

1.29. В первый день магазином продано 60 % поступившего товара, а во второй — 30 % остатка. Найдите, сколько процентов поступившего товара осталось непроданным.

§ 2. Основное свойство рациональной дроби Сокращение рациональных дробей

1.30. Разложите на множители многочлен:
а) $2x^4y^2 - x^3y$; б) $x^3 - 3x^2 + x - 3$.

1.31. Сократите дроби: $\frac{4}{10}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{25}{35}$, $\frac{180}{300}$.

1.32. Найдите A и B, если равенство $x^2 - 2x - 8 = (x - A)(x + B)$ является тождеством.

Действия с рациональными дробями выполняются по тем же правилам, что с обыкновенными дробями. Так, согласно основному свойству обыкновенных дробей, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится дробь, равная данной.

Например, $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{35}{84}$; $\frac{26}{39} = \frac{26 : 13}{39 : 13} = \frac{2}{3}$.

Аналогичное свойство можно сформулировать для рациональных дробей.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же выражение, не равное нулю, то получится дробь, тождественно равная данной.

Это свойство называют **основным свойством дроби.**

Для любой рациональной дроби $\frac{A}{B}$ справедливо тождество $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, где $C \neq 0$.

Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{3a^2}{4b}$ на одночлен $5b^2$ и получим: $\frac{3a^2}{4b} = \frac{3a^2 \cdot 5b^2}{4b \cdot 5b^2} = \frac{15a^2b^2}{20b^3}$. В этом случае говорят, что дробь $\frac{3a^2}{4b}$ привели к новому знаменателю $20b^3$.

Пример 1. Приведите дробь:

а) $\frac{5x}{2y^2}$ к знаменателю $6y^3$;

б) $\frac{a+1}{a}$ к знаменателю $a^2 - a$;

в) $\frac{5}{x-4}$ к знаменателю $x^2 - 16$.

Решение. а) $\dfrac{5x}{2y^2} = \dfrac{5x \cdot 3y}{2y^2 \cdot 3y} = \dfrac{15xy}{6y^3}$;

б) $\dfrac{a+1}{a} = \dfrac{(a+1)\cdot(a-1)}{a\cdot(a-1)} = \dfrac{a^2-1}{a^2-a}$;

в) $\dfrac{5}{x-4} = \dfrac{5\cdot(x+4)}{(x-4)\cdot(x+4)} = \dfrac{5(x+4)}{x^2-16}$.

Если основное свойство дроби записать справа налево, то получится равенство $\dfrac{A\cdot C}{B\cdot C} = \dfrac{A}{B}$.

Это равенство позволяет дробь $\dfrac{A\cdot C}{B\cdot C}$ заменить на тождественно равную ей дробь $\dfrac{A}{B}$, разделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{A\cdot C}{B\cdot C}$ на множитель C.

Например, разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{15a^2b^2}{20b^3}$ на одночлен $5b^2$ и получим: $\dfrac{15a^2b^2}{20b^3} = \dfrac{15a^2b^2:(5b^2)}{20b^3:(5b^2)} = \dfrac{3a^2}{4b}$.

В этом случае говорят, что дробь $\dfrac{15a^2b^2}{20b^3}$ сократили на множитель $5b^2$.

Сократить рациональную дробь — это значит числитель и знаменатель дроби разделить на их общий множитель.

Например, сократим дробь $\dfrac{15x^2y}{12xy^2}$. Для этого нужно найти множитель, на который можно разделить числитель и знаменатель дроби. Одночлены $15x^2y$ и $12xy^2$ имеют общий множитель $3xy$, на который можно сократить данную дробь:

$$\frac{15x^2y}{12xy^2} = \frac{15x^2y:(3xy)}{12xy^2:(3xy)} = \frac{5x}{4y}.$$

Чтобы сократить рациональную дробь, нужно:

① Разложить (если возможно) числитель и знаменатель дроби на множители.	Сократите дробь $\dfrac{a^3-2a^2}{3a^2b}$. ① $\dfrac{a^3-2a^2}{3a^2b} = \dfrac{a^2(a-2)}{3a^2b}$.
② Определить общий множитель числителя и знаменателя дроби.	② a^2 — общий множитель числителя и знаменателя дроби.
③ Разделить числитель и знаменатель данной дроби на общий множитель.	③ $\dfrac{a^3-2a^2}{3a^2b} = \dfrac{a^2(a-2)}{3a^2b} = \dfrac{a-2}{3b}$.

Пример 2. Сократите дробь:

а) $\frac{2xy-x}{4xy-x^2}$; б) $\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}$.

Решение. а) ① Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{2xy-x}{4xy-x^2}=\frac{x(2y-1)}{x(4y-x)}.$$

② Числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель x.

③ Разделим числитель и знаменатель данной дроби на общий множитель, т. е. сократим дробь:

$$\frac{2xy-x}{4xy-x^2}=\frac{x(2y-1)}{x(4y-x)}=\frac{2y-1}{4y-x}.$$

б) ① С помощью формул сокращенного умножения разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}=\frac{(a-4)(a+4)}{(a-4)^2}.$$

② Общий множитель числителя и знаменателя равен $a-4$.

$$\frac{7m^4n^2}{28m^3n^4}=\frac{7m^3n^2\cdot m}{7m^3n^2\cdot 4n^2}=\frac{m}{4n^2}$$

$$\frac{6a-30b}{6a}=\frac{6\cdot(a-5b)}{6\cdot a}=\frac{a-5b}{a}$$

$$\frac{x^2-9}{x^2+3x}=\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x\cdot(x+3)}=\frac{x-3}{x}$$

③ Сократим данную дробь на общий множитель $a-4$:

$$\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}=\frac{(a-4)(a+4)}{(a-4)^2}=\frac{a+4}{a-4}.$$

Из основного свойства дроби следует, что $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$ и $\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}$ (и в том и в другом случае вторая дробь получена из первой умножением числителя и знаменателя на –1).

Пример 3. Приведите дробь $\frac{3-x}{-7x-6}$ к знаменателю $7x+6$.

Решение. Воспользуемся равенством $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$ и получим:

$$\frac{3-x}{-7x-6}=\frac{-(3-x)}{-(-7x-6)}=\frac{x-3}{7x+6}.$$

Пример 4. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-2}{2a-a^3}$; б) $\frac{y^2-25}{5y-y^2}$.

Решение. а) Разложим знаменатель дроби на множители и получим:

$$\frac{a^2-2}{2a-a^3}=\frac{a^2-2}{a\left(2-a^2\right)}.$$

Выражения a^2-2 и $2-a^2$ отличаются только знаками. Чтобы сократить дробь, поменяем знаки одного из множителей a^2-2 или $2-a^2$:

$$\frac{a^2-2}{2a-a^3}=\frac{a^2-2}{a\left(2-a^2\right)}=\frac{a^2-2}{-a\left(a^2-2\right)}=\frac{1}{-a}.$$

Полученный ответ можно записать в виде $\frac{1}{-a}=-\frac{1}{a}$. В этом случае говорят, что знак «минус» поставили перед дробью.

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$$

б) Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и получим:

$$\frac{y^2-25}{5y-y^2}=\frac{(y-5)(y+5)}{y(5-y)}.$$

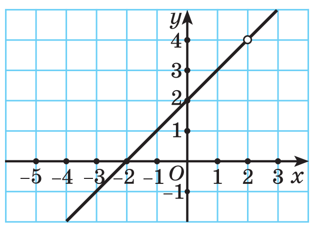
Поменяем знаки одного из множителей $y-5$ или $5-y$ и поставим знак «минус» перед дробью:

$$\frac{y^2-25}{5y-y^2}=\frac{(y-5)(y+5)}{y(5-y)}=\frac{(y-5)(y+5)}{-y(y-5)}=-\frac{(y-5)(y+5)}{y(y-5)}=-\frac{y+5}{y}.$$

Основное свойство рациональной дроби	
1. Приведите дробь $\frac{3x-1}{2x+3}$ к знаменателю: а) $4x+6$; б) $4x^2-9$.	а) Умножим числитель и знаменатель дроби на 2 и получим: $\frac{2\cdot(3x-1)}{2\cdot(2x+3)}=\frac{6x-2}{4x+6}$. б) Умножим числитель и знаменатель дроби на $(2x-3)$ и получим: $\frac{(3x-1)\cdot(2x-3)}{(2x+3)\cdot(2x-3)}=\frac{(3x-1)\cdot(2x-3)}{4x^2-9}$.
Сокращение рациональных дробей	
2. Сократите дробь $\frac{15x^4y^2}{25x^2y^3}$.	Дробь можно сократить на $5x^2y^2$ — общий множитель числителя и знаменателя дроби: $\frac{15x^4y^2}{25x^2y^3}=\frac{15x^4y^2:\left(5x^2y^2\right)}{25x^2y^3:\left(5x^2y^2\right)}=\frac{3x^2}{5y}$.

3. Сократите дробь: а) $\frac{18mn-27n}{9mn}$; б) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2-2nm}$; в) $\frac{x^2-y^2}{3y-3x}$; г) $\frac{16-x^2}{(x-4)^2}$.	а) Разложим на множители числитель дроби и сократим дробь: $\frac{18mn-27n}{9mn}=\frac{9n(2m-3)}{9mn}=\frac{2m-3}{m}$. б) С помощью формул сокращенного умножения разложим на множители числитель и знаменатель дроби и получим: $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2-2nm}=\frac{(m-n)(m+n)}{(m-n)^2}=$ $=\frac{m+n}{m-n}$. в) Разложим на множители числитель и знаменатель дроби: $\frac{x^2-y^2}{3y-3x}=\frac{(x-y)(x+y)}{3(y-x)}$. Множители $x-y$ и $y-x$ отличаются только знаками. Поменяем знаки одного из множителей $x-y$ или $y-x$ и поставим знак «минус» перед дробью: $\frac{x^2-y^2}{3y-3x}=\frac{(x-y)(x+y)}{3(y-x)}=$ $=\frac{(x-y)(x+y)}{-3(x-y)}=-\frac{(x-y)(x+y)}{3(x-y)}=$ $=-\frac{x+y}{3}$. г) После разложения на множители числителя дроби имеем: $\frac{16-x^2}{(x-4)^2}=\frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)^2}$. Воспользуемся тем, что $(a-b)^2=(b-a)^2$, т. е. $(x-4)^2=(4-x)^2$, и получим: $\frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)^2}=\frac{(4-x)(4+x)}{(4-x)^2}=\frac{4+x}{4-x}$.
4. Сократите дробь: а) $\frac{12a^2-9ab+4ac-3bc}{20a^2+3bc-15ab-4ac}$; б) $\frac{ay-bx+by-ax}{x^2-y^2}$.	а) С помощью способа группировки разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь: $\frac{12a^2-9ab+4ac-3bc}{20a^2+3bc-15ab-4ac}=$

	$= \dfrac{(12a^2 - 9ab) + (4ac - 3bc)}{(20a^2 - 15ab) + (3bc - 4ac)} =$ $= \dfrac{3a(4a - 3b) + c(4a - 3b)}{5a(4a - 3b) - c(4a - 3b)} =$ $= \dfrac{(4a - 3b)(3a + c)}{(4a - 3b)(5a - c)} = \dfrac{3a + c}{5a - c}.$ б) $\dfrac{ay - bx + by - ax}{x^2 - y^2} =$ $= \dfrac{(ay + by) + (-ax - bx)}{x^2 - y^2} =$ $= \dfrac{(ay + by) - (ax + bx)}{(x - y)(x + y)} = \dfrac{y(a + b) - x(a + b)}{(x - y)(x + y)} =$ $= \dfrac{(y - x)(a + b)}{(x - y)(x + y)} = -\dfrac{(x - y)(a + b)}{(x - y)(x + y)} = -\dfrac{a + b}{x + y}.$
5. Сократите дробь $\dfrac{(1 - 3x)^2}{3x^2 + 5x - 2}$.	Для разложения на множители знаменателя дроби воспользуемся формулой разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Найдем корни квадратного трехчлена $3x^2 + 5x - 2$. Для этого решим квадратное уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$. $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49,$ $x_1 = \dfrac{-5 - 7}{2 \cdot 3} = -2, \quad x_2 = \dfrac{-5 + 7}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{3},$ тогда $3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) =$ $= (x + 2)(3x - 1).$ Сократим дробь: $\dfrac{(1 - 3x)^2}{3x^2 + 5x - 2} = \dfrac{(3x - 1)^2}{(x + 2)(3x - 1)} = \dfrac{3x - 1}{x + 2}.$
6. Упростите выражение $\dfrac{2x^2y - xy^2}{2x - y}$ и найдите его значение при $x = 2{,}56,\ y = 10$.	Упростим выражение, сократив дробь: $\dfrac{2x^2y - xy^2}{2x - y} = \dfrac{xy(2x - y)}{2x - y} = xy.$ Подставим $x = 2{,}56$ и $y = 10$ в выражение xy и получим $xy = 2{,}56 \cdot 10 = 25{,}6$.

7. Из данных рациональных дробей выберите дробь, тождественно равную дроби $\frac{a-b}{3b-a}$: а) $\frac{a-b}{a-3b}$; б) $\frac{b-a}{3b-a}$; в) $\frac{b-a}{a-3b}$.	Выполним преобразования: $\frac{a-b}{3b-a} = \frac{-(a-b)}{-(3b-a)} = \frac{-a+b}{-3b+a} = \frac{b-a}{a-3b}$. Дроби $\frac{a-b}{3b-a}$ тождественно равна дробь в).
8. Приведите дробь: а) $\frac{b}{7-b}$ к знаменателю $b-7$; б) $\frac{8-a}{-6a-b}$ к знаменателю $6a+b$.	Умножим числитель и знаменатель дроби на -1 и получим: а) $\frac{b}{7-b} = \frac{-b}{-(7-b)} = \frac{-b}{-7+b} = \frac{-b}{b-7} =$ $= -\frac{b}{b-7}$; б) $\frac{8-a}{-6a-b} = \frac{-(8-a)}{-(-6a-b)} = \frac{-8+a}{6a+b} = \frac{a-8}{6a+b}$.
9*. Постройте график функции $y = \frac{x^2-4}{x-2}$.	Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, кроме числа 2. Сократим дробь $\frac{x^2-4}{x-2}$ и получим: $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$. Необходимо построить график функции $y = x + 2$ при $x \neq 2$. Графиком данной функции является прямая $y = x + 2$ без точки (2; 4). 

?

1. Определите общий множитель числителя и знаменателя рациональной дроби:

а) $\frac{7a^2b^4}{14a}$; б) $\frac{6a+15b}{3c}$; в) $\frac{ax+bx}{cx+dx}$.

2. Из данных равенств выберите равенства, верные при всех значениях входящих в них переменных из области определения дроби:

а) $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$; б) $\frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}$; в) $\frac{3a}{a} = 2a$; г) $\frac{3a}{a} = 3$.

3. На какое выражение нужно умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{x-y}{x-1}$, чтобы получить дробь со знаменателем $x^2 - x$?

1.33. Используя основное свойство дроби, приведите дробь:

а) $\frac{x}{y}$ к знаменателю $5y$; y^2; $-y$; yz; $2xy$;

б) $\frac{a-b}{ab}$ к знаменателю $3ab$; a^2b; ab^3; $-ab$; a^2b^2;

в) $\frac{c}{c-d}$ к знаменателю $7c - 7d$; $d(c-d)$; $d - c$; $(c-d)^2$; $c^2 - d^2$;

г) $\frac{m-2}{m+2}$ к знаменателю $3m + 6$; $-m - 2$; $m^2 + 2m$; $(m+2)^2$; $m^2 - 4$.

1.34. Приведите к знаменателю:

а) $6a^6$ дробь $\frac{5}{a}$; $\frac{b}{2a^2}$; $\frac{a-b}{6a^5}$;

б) $(x-4)^3$ дробь $\frac{3}{x-4}$; $\frac{x-1}{4-x}$; $\frac{5}{x^2-8x+16}$;

в) $3m^2 - 3n^2$ дробь $\frac{m}{m+n}$; $\frac{7}{3m+3n}$; $\frac{m-2n}{n-m}$.

1.35. Верно ли, что одночлен $5a^2b^2$ является общим множителем числителя и знаменателя дроби:

а) $\frac{10a^2b^2c}{15a^2b^2d}$; б) $\frac{25a^3b^2}{15a^2b^3}$; в) $\frac{5a^4b}{35a^2b^5}$; г) $\frac{20a^2b^4d^3}{5a^5b^2}$?

1.36. Определите выражение, на которое можно разделить числитель и знаменатель дроби, чтобы сократить дробь:

а) $\frac{7a}{14b}$; б) $\frac{12a^2}{4a^3}$; в) $\frac{8ab}{20a^2b}$; г) $\frac{18a^4b^2c}{12a^2b^2c^3}$.

1.37. Определите общий множитель числителя и знаменателя дроби и сократите дробь:

а) $\frac{15a}{3}$; б) $\frac{6}{18b}$; в) $\frac{8c}{9c}$; г) $\frac{15d}{35d}$;

д) $\frac{8a}{20b}$; е) $\frac{5xy}{4x}$; ж) $\frac{7m}{21mn}$; з) $\frac{5xy}{45yz}$.

1.38. Сократите рациональную дробь, используя алгоритм:

а) $\frac{ab^2}{ab}$; б) $\frac{xyz}{x^2y^2}$; в) $\frac{6m^2n^2}{18mn}$; г) $\frac{3ab}{12ab^3}$;

д) $\frac{a^4bc}{ab^2}$; е) $\frac{m^2n^3k^5}{m^5n^3k}$; ж) $\frac{36x^8y^5z}{24x^{10}y^2z^4}$; з) $\frac{3a^6b^9c^4}{a^5b^{10}c^3}$.

1.39. Сократите рациональную дробь:

а) $\frac{a^4}{-a^5}$; б) $\frac{-x^8}{x^6}$; в) $\frac{cd^2}{-c^3}$;

г) $\frac{-mn}{m^3}$; д) $\frac{-4a^2b^3}{6ab}$; е) $\frac{-15x^2y^5z^6}{-20x^3y^4z^5}$.

1.40. Сократите рациональную дробь, используя алгоритм:

а) $\frac{4(x-y)}{8x}$; б) $\frac{15m}{3(m+n)}$; в) $\frac{8(a+b)}{3(a+b)}$;

г) $\frac{3a^2(x-1)}{5a(x-1)}$; д) $\frac{5(c-3)}{(c-3)^2}$; е) $\frac{7a(b+4)^3}{(b+4)^5}$.

1.41. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите дробь:

а) $\frac{3a-3b}{6a}$; б) $\frac{7x}{7x+14y}$; в) $\frac{xy+xz}{xy}$;

г) $\frac{2a^2b}{2a^3b-6a^2b}$; д) $\frac{3m-3n}{6(m+n)}$; е) $\frac{9a^2(a-2b)}{3a-6b}$;

ж) $\frac{3x+6y}{5x+10y}$; з) $\frac{5n-m}{5n^2-mn}$; и) $\frac{7a-14b}{(a-2b)^2}$;

к) $\frac{(2c+3d)^3}{2ac+3ad}$; л) $\frac{3x^2y-x^2z}{(3y-z)^4}$; м) $\frac{5a(c+6d)^2}{5ac+30ad}$.

1.42. Составьте план решения и найдите значение выражения:

а) $\frac{a^3+a^2}{a^2}$ при $a=8{,}9$; б) $\frac{3x^2}{x^4-x^2}$ при $x=2\sqrt{3}$;

в) $\frac{b^5-b^3}{b^2-1}$ при $b=0{,}25$; г) $\frac{y^3-y^2}{y^2+y^3}$ при $y=\frac{1}{12}$.

1.43. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите дробь:

а) $\frac{4a-12b}{5a-15b}$; б) $\frac{2x-10y}{x^2-5xy}$; в) $\frac{c^2-3c}{cd-3d}$;

г) $\frac{x^2+xy}{y^2+xy}$; д) $\frac{m^2-16}{2m+8}$; е) $\frac{a^2-5a}{a^2-25}$;

ж) $\frac{x^2+4x+4}{2x+4}$; з) $\frac{m^2-6mn}{m^2-12mn+36n^2}$; и) $\frac{25c^2-1}{25c^2+10c+1}$;

к) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-9}$; л) $\frac{x^2+8xy+16y^2}{x^2-16y^2}$; м) $\frac{12a^2-3}{4a^2-4a+1}$.

1.44. Замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью не было знака «минус»:

а) $-\frac{m-n}{m+n}$; б) $-\frac{x+y}{y-z}$; в) $-\frac{-c-d}{cd}$;

г) $-\frac{a-b}{2ab}$; д) $-\frac{5bc}{-b-c}$; е) $-\frac{7z}{y-x}$.

1.45. Двумя способами замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью стоял знак «минус»:

а) $\frac{x-y}{y-z}$; б) $\frac{-m-n}{m-k}$; в) $\frac{c-d}{-b-c}$; г) $\frac{a+b}{a-c}$.

1.46. Из данных дробей выберите дробь, тождественно равную дроби $\frac{(2a-5b)^3}{a-7b}$:

а) $\frac{(5b-2a)^3}{a-7b}$; б) $-\frac{(5b-2a)^3}{7b-a}$;

в) $\frac{(5b-2a)^3}{7b-a}$; г) $-\frac{(2a-5b)^3}{a-7b}$.

1.47. Сократите дробь:

а) $\frac{m-n}{n-m}$; б) $\frac{c-d}{3(d-c)}$; в) $\frac{5x-5y}{7y-7x}$;

г) $\frac{a^2-5ab}{20b-4a}$; д) $\frac{3m-9m^2}{12m^2-4m}$; е) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

ж) $\frac{36-x^2}{5x-30}$; з) $\frac{5a-a^2}{a^2-25}$; и) $\frac{m^2-6m+9}{6-2m}$;

к) $\frac{16-y^2}{y^2-8y+16}$; л) $\frac{x^2-2x+1}{2-2x^2}$; м) $\frac{25-a^2}{2a^2-20a+50}$.

1.48. Используйте сокращение дроби для рационального вычисления значения выражения:

а) $\frac{x^2-9}{3-x}$ при $x=5{,}65$; б) $\frac{3a^2-15ab}{25b^2-a^2}$ при $a=15$, $b=31$;

в) $\frac{m^2-9m}{81m-m^3}$ при $m=21$.

1.49. Примените для разложения числителя и знаменателя дроби на множители способ группировки, если это необходимо, и сократите дробь:

а) $\frac{xy+x-3y-3}{5y+5}$; б) $\frac{ab-4b-2a+8}{20-5a}$;

в) $\frac{mn-m+n-n^2}{m^2-n^2}$; г) $\frac{16-a^2}{a^2-ab-4a+4b}$;

д) $\dfrac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$; е) $\dfrac{ax-ay-by+bx}{ay-ax-by+bx}$;

ж) $\dfrac{3y-3+5xy-5x}{5x+3+5xy+3y}$; з) $\dfrac{6a^2+15ab-8ac-20bc}{12a^2-9ab-16ac+12bc}$.

1.50. Воспользуйтесь формулой разложения квадратного трехчлена на множители и сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-x}{x^2+2x-3}$; б) $\dfrac{x^2-5x+4}{16-x^2}$; в) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}$;

г) $\dfrac{7x^2-6x-1}{7x+1}$; д) $\dfrac{2a-1}{10a^2-a-2}$; е) $\dfrac{2x^2-5x-3}{1-4x^2}$;

ж) $\dfrac{6x^2+x-7}{13-10x^2-3}$; з) $\dfrac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}$.

1.51. Сократите рациональную дробь:

а) $\dfrac{(5m+5n)^2}{m+n}$; б) $\dfrac{(-3a-3b)^2}{a+b}$; в) $\dfrac{2x-2y}{(7y-7x)^2}$;

г) $\dfrac{(-2c-2d)^2}{c^2-d^2}$; д) $\dfrac{9y^2-x^2}{(2x-6y)^2}$; е) $\dfrac{(5a+5b)^2}{(-4a-4b)^2}$.

1.52*. Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$; б) $y=\dfrac{5x^2-10x}{5x}$;

в) $y=\dfrac{x^2-8x+16}{4-x}$; г) $y=\dfrac{x^2+x-12}{x+4}$.

1.53*. Докажите тождество:

а) $\dfrac{(m-n)^2-(m+n)^2}{4mn}=-1$; б) $\dfrac{x^2+xy}{x+y}=\dfrac{x^3-x}{x^2-1}$.

1.54*. Сократите дробь $\dfrac{3x^3-6x^2y+3xy^2}{(3x-3y)^3}$.

1.55*. Докажите, что значение дроби $\dfrac{(x-y)^2-(x-3y)^2}{2xy-4y^2}$ не зависит от значений переменных.

1.56*. Сократите рациональную дробь $\dfrac{x^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)x+\sqrt{77}}{x^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)x-\sqrt{21}}$.

1.57*. Упростите выражение $\dfrac{(4x+5)^2+2\left(16x^2-25\right)+(4x-5)^2}{(4x+5)^2-2\left(16x^2-25\right)+(4x-5)^2}$.

1.58*. Сократите дробь:

а) $\dfrac{5a^2-4ab-b^2}{b^2+7ab+10a^2}$; б) $\dfrac{20a^2+8ab-b^2}{b^2+5ab+6a^2}$.

Какой способ разложения многочленов на множители вы использовали?

1.59*. Приведите рациональную дробь к несократимой дроби:

а) $\frac{3x^4-12x^3+12x^2}{4x-x^3}$; б) $\frac{x^4+2x^2-3}{x^3-2x^2-x+2}$.

1.60*. Сократите дробь:

а) $\frac{b^4+4}{b^2-2b+2}$; б) $\frac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$.

1.61*. Найдите значение выражения $\frac{4xy+81-4x^2-y^2}{y+9-2x}-2x$ при $x=18{,}05$; $y=-232$.

1.62. Используя основное свойство дроби, приведите дробь:

а) $\frac{3}{a}$ к знаменателю $4a$; a^2; $-a$; ab;

б) $\frac{x+y}{x}$ к знаменателю $-5x$; x^2; $-x$; xy;

в) $\frac{b+3}{b-3}$ к знаменателю $2b-6$; b^2-3b; $3-b$; $(b-3)^2$; b^2-9.

1.63. Приведите дроби $\frac{4}{a+b}$; $\frac{a-8b}{b-a}$ к знаменателю a^2-b^2.

1.64. Определите общий множитель числителя и знаменателя дроби:

а) $\frac{5m}{15n}$; б) $\frac{18m^4}{12m^6}$; в) $\frac{3mn}{18m^2n}$; г) $\frac{m^7n^5k}{6m^3n^4k^6}$.

1.65. Используя алгоритм, сократите дробь:

а) $\frac{24b}{3}$; б) $\frac{3a}{5a}$; в) $\frac{7cd}{3c}$; г) $\frac{-5xy}{10x^2}$;

д) $\frac{ab}{bc}$; е) $\frac{3mn}{m^3n^3}$; ж) $\frac{7x^4y^3}{21x^5y^2}$; з) $\frac{-a^2b^4c}{-abc}$;

и) $\frac{bc^5d}{b^2c^5}$; к) $\frac{7x^9y^4z^7}{x^8y^5z^6}$; л) $\frac{15a^3b^4c^5}{5a^2b^3c^4}$; м) $\frac{8xy^2z^3}{24x^2y^4z^3}$.

1.66. Сократите рациональную дробь:

а) $\frac{5(a+b)}{15b}$; б) $\frac{3x}{9(x-2y)}$; в) $\frac{4c+4d}{2c}$;

г) $\frac{abc}{ab-ac}$; д) $\frac{3a-3b}{12a-12b}$; е) $\frac{3x+12}{(x+4)^2}$;

ж) $\frac{m-6n}{m^2-6mn}$; з) $\frac{4ab}{4a^2b-8ab}$; и) $\frac{9x^2y-6xy^2}{3xy}$.

1.67. Найдите значение выражения:

а) $\frac{b^4 - b^3}{b^4}$ при $b = \frac{2}{7}$; б) $\frac{a^6 + a^4}{a^2 + 1}$ при $a = 2\sqrt{5}$.

1.68. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите дробь:

а) $\frac{5m + 10n}{3m + 6n}$; б) $\frac{8a - 2b}{4a^2 - ab}$; в) $\frac{2x^2 - xy}{2xy - y^2}$;

г) $\frac{b^2 - 25}{3b - 15}$; д) $\frac{m^2 - 6m}{m^2 - 36}$; е) $\frac{a^2 + 8a + 16}{3a + 12}$;

ж) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$; з) $\frac{9b^2 + 6b + 1}{9b^2 - 1}$; и) $\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 - 12ab + 9b^2}$.

1.69. Замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью не было знака «минус»:

а) $-\frac{x - 2}{x + 3}$; б) $-\frac{a + 6}{3 - a}$; в) $-\frac{-m - 5}{m - 3}$; г) $-\frac{b - 4}{4b}$.

1.70. Двумя способами замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью стоял знак «минус»:

а) $\frac{m - n}{n - k}$; б) $\frac{-a - b}{c - d}$; в) $\frac{x - y}{x + z}$.

1.71. Сократите дробь:

а) $\frac{a - b}{6(b - a)}$; б) $\frac{4m - 4n}{5n - 5m}$; в) $\frac{x^2 - 3xy}{12y - 4x}$;

г) $\frac{a^3 - a^2}{a - a^2}$; д) $\frac{c^2 - 49}{14 - 2c}$; е) $\frac{2b^2 - 8b}{16 - b^2}$;

ж) $\frac{10 - 5x}{x^2 - 4x + 4}$; з) $\frac{m^2 - 12m + 36}{36 - m^2}$; и) $\frac{3 - 3x^2}{x^2 - 2x + 1}$.

1.72. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a - 4}{16 - a^2}$ при $a = -4{,}01$;

б) $\frac{x^3 - 9x}{3x - x^2}$ при $x = 2\frac{3}{7}$.

1.73. Примените для разложения числителя и знаменателя дроби на множители способ группировки, если это необходимо, и сократите дробь:

а) $\frac{ab - a - 5b + 5}{6b - 6}$; б) $\frac{ax + 7x - ay - 7y}{7y - 7x}$; в) $\frac{3a + 4 + 3ab + 4b}{4b - 4 + 3ab - 3a}$;

г) $\frac{2 + c - 2c - c^2}{c^2 - 1}$; д) $\frac{9 - n^2}{3m - bn + mn - 3b}$; е) $\frac{x^2 - xy + 3y - 3x}{x^2 - 6x + 9}$.

1.74. Воспользуйтесь формулой разложения квадратного трехчлена на множители и сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$; б) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-2x-15}$; в) $\dfrac{6x^2+11x-2}{6x-1}$;

г) $\dfrac{5x^2-3x-2}{4-25x^2}$; д) $\dfrac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$; е) $\dfrac{a^4+2a^3-9a^2-18a}{a^2-a-6}$.

1.75. Сократите рациональную дробь:

а) $\dfrac{(4x+4y)^2}{(x+y)^2}$; б) $\dfrac{(m+n)^2}{(-2m-2n)^2}$;

в) $\dfrac{(3x-3y)^2}{x^2-y^2}$; г) $\dfrac{4a^2-b^2}{(3b-6a)^2}$.

1.76*. Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $y=\dfrac{4x^2+12x}{4x}$;

в) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{1-x}$; г) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

1.77*. Докажите тождество $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2+y^2}=2$.

1.78*. Сократите дробь $\dfrac{4a^3-8a^2b+4ab^2}{(2a-2b)^3}$.

1.79*. Сократите дробь $\dfrac{x^4-4x^2+3}{x^3+2x^2-x-2}$. Какие способы разложения на множители многочлена были использованы?

1.80. Выполните действия:

а) $\dfrac{7}{15}+0{,}25$; б) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{6}$; в) $1{,}2+3\dfrac{1}{3}$; г) $6\dfrac{3}{7}-2\dfrac{7}{12}$.

1.81. Представьте в стандартном виде число $0{,}00057\cdot10^{12}$ и определите его порядок.

1.82. Функция задана формулой $y=5x-7$. Определите:
а) значение функции при значении аргумента, равном 2;
б) значение аргумента при значении функции, равном 13;
в) проходит ли график этой функции через точку $A(-7; -25)$.

1.83. Рекламный отдел компании планирует разместить на одном из телевизионных каналов два видеоролика продолжительностью 30 с. Компания хочет самостоятельно выбрать время показа роликов. Стоимость такой услуги составляет 15 % от стоимости размещения каждого ролика, равной 1000 р. За размещение двух роликов канал делает скидку в размере 10 % от общей стоимости заказа. Сколько придется заплатить компании?

1.84. Вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt{18a^2}$ при $a \leqslant 0$; б)* $\sqrt{-a^3b^4}$.

1.85. Решите уравнение с помощью метода замены переменной:

а) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; б)* $\left(x^2 + 2x\right)\left(x^2 + 2x - 2\right) = 3$.

§ 3. Сложение и вычитание рациональных дробей

1.86. Найдите значение выражения $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{5}{12}$.

1.87. Приведите дробь $\frac{2}{x+1}$ к знаменателю $x^2 + x$.

1.88. Приведите дробь $\frac{2x}{x-6}$ к знаменателю $x^2 - 36$.

Вспомним, как складывают и вычитают обыкновенные дроби. Например:

$$\frac{5}{18} + \frac{4}{18} = \frac{5+4}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}; \quad \frac{9}{17} - \frac{3}{17} = \frac{9-3}{17} = \frac{6}{17}.$$

Сложение и вычитание рациональных дробей выполняются по таким же правилам, что сложение и вычитание обыкновенных дробей.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же. Затем, если возможно, следует сократить полученную дробь.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{a}{b} = \frac{a^2+a}{b}$$

$$\frac{3m^2}{5n} + \frac{7m^2}{5n} = \frac{10m^2}{5n} = \frac{2m^2}{n}$$

$$\frac{3x-1}{2x^2} + \frac{x+1}{2x^2} = \frac{3x-1+x+1}{2x^2} = \frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x}$$

Пример 1. Найдите сумму рациональных дробей:

а) $\frac{7m}{4ab} + \frac{11m}{4ab}$;

б) $\frac{12-x}{x+3} + \frac{2x+8}{x+3}$.

Решение. а) $\frac{7m}{4ab}+\frac{11m}{4ab}=\frac{7m+11m}{4ab}=\frac{18m}{4ab}=\frac{9m}{2ab}$;

б) $\frac{12-x}{x+3}+\frac{2x+8}{x+3}=\frac{12-x+2x+8}{x+3}=\frac{x+20}{x+3}$.

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тем же. Затем, если возможно, следует сократить полученную дробь.

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

$$\frac{3n}{m}-\frac{1}{m}=\frac{3n-1}{m}$$

$$\frac{5b}{3a^2}-\frac{2b}{3a^2}=\frac{3b}{3a^2}=\frac{b}{a^2}$$

$$\frac{5}{x}-\frac{2x+5}{x}=\frac{5-(2x+5)}{x}=$$
$$=\frac{5-2x-5}{x}=-\frac{2x}{x}=-2$$

Пример 2. Найдите разность рациональных дробей:

а) $\frac{7am}{m-n}-\frac{7an}{m-n}$;

б) $\frac{a+2b}{a+3b}-\frac{2a-b}{a+3b}$.

Решение. а) $\frac{7am}{m-n}-\frac{7an}{m-n}=\frac{7am-7an}{m-n}=\frac{7a(m-n)}{m-n}=7a$;

б) $\frac{a+2b}{a+3b}-\frac{2a-b}{a+3b}=\frac{a+2b-(2a-b)}{a+3b}=\frac{a+2b-2a+b}{a+3b}=\frac{3b-a}{a+3b}$.

При сложении и вычитании обыкновенных дробей с разными знаменателями их приводят к общему знаменателю (например, $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{12}-\frac{2}{12}=\frac{1}{12}$).

Для того чтобы выполнить сложение или вычитание рациональных дробей с разными знаменателями, их также нужно привести к общему знаменателю.

Чтобы привести рациональные дроби к общему знаменателю, нужно:

① Разложить знаменатель каждой дроби на множители (если это необходимо) и определить общий знаменатель дробей.	Приведите к общему знаменателю рациональные дроби $\frac{c}{a^2-2a}$ и $\frac{1}{3a-6}$. ① $\frac{c}{a^2-2a}=\frac{c}{a(a-2)}$ и $\frac{1}{3a-6}=\frac{1}{3(a-2)}$. Общий знаменатель $3a(a-2)$.
② Умножить числитель и знаменатель каждой дроби на недостающие множители из общего знаменателя дробей.	② $\frac{c}{a(a-2)}=\frac{c\cdot 3}{a(a-2)\cdot 3}=\frac{3c}{3a(a-2)}$; $\frac{1}{3(a-2)}=\frac{1\cdot a}{3(a-2)\cdot a}=\frac{a}{3a(a-2)}$.

Пример 3. Приведите к общему знаменателю дроби:

а) $\frac{2a}{10x^3y}$ и $\frac{b}{15x^2y^2}$; б) $\frac{x}{x^2-4}$ и $\frac{5}{3x+6}$.

Решение. а) Общим знаменателем данных дробей является одночлен $30x^3y^2$, поскольку НОК $(10,\ 15)=30$ и переменные x и y взяты с наибольшим показателем степени.

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на $3y$, а числитель и знаменатель второй дроби на $2x$ и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2a}{10x^3y}=\frac{2a\cdot 3y}{10x^3y\cdot 3y}=\frac{6ay}{30x^3y^2} \text{ и } \frac{b}{15x^2y^2}=\frac{b\cdot 2x}{15x^2y^2\cdot 2x}=\frac{2bx}{30x^3y^2}.$$

б) Разложим на множители знаменатель каждой дроби и получим:

$$\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{(x-2)(x+2)} \text{ и } \frac{5}{3x+6}=\frac{5}{3(x+2)}.$$

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 3, а числитель и знаменатель второй дроби на $(x-2)$ и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x^2-4}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x}{3(x-2)(x+2)}$$

$$\text{и } \frac{5}{3x+6}=\frac{5}{3(x+2)}=\frac{5(x-2)}{3(x-2)(x+2)}.$$

Чтобы выполнить сложение (вычитание) рациональных дробей с разными знаменателями, нужно:

① Привести дроби к общему знаменателю. ② Применить правила сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.	Найдите сумму рациональных дробей $\frac{m-2}{2m}+\frac{m+3}{3m}$. ① $\frac{m-2}{2m}+\frac{m+3}{3m}=\frac{3(m-2)}{6m}+\frac{2(m+3)}{6m}$. ② $\frac{3(m-2)}{6m}+\frac{2(m+3)}{6m}=$ $=\frac{3(m-2)+2(m+3)}{6m}=\frac{3m-6+2m+6}{6m}=$ $=\frac{5m}{6m}=\frac{5}{6}$.

Пример 4. Найдите разность рациональных дробей

$$\frac{a+6}{a^2-a}-\frac{a-3}{a^2-1}.$$

Решение. $\frac{a+6}{a^2-a}-\frac{a-3}{a^2-1}=\frac{a+6}{a(a-1)}-\frac{a-3}{(a-1)(a+1)}=$

$=\frac{(a+6)(a+1)}{a(a-1)(a+1)}-\frac{a(a-3)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a+6)(a+1)-a(a-3)}{a(a-1)(a+1)}=$

$=\frac{a^2+a+6a+6-a^2+3a}{a(a-1)(a+1)}=\frac{10a+6}{a(a-1)(a+1)}.$

Сложение (вычитание) рациональных дробей с одинаковыми знаменателями	
1. Выполните сложение рациональных дробей: а) $\frac{mn}{n+2}+\frac{2m}{n+2}$; б) $\frac{m^2+n^2}{n^2-m^2}+\frac{2mn}{n^2-m^2}$.	а) $\frac{mn}{n+2}+\frac{2m}{n+2}=\frac{mn+2m}{n+2}=$ $=\frac{m(n+2)}{n+2}=m$; б) $\frac{m^2+n^2}{n^2-m^2}+\frac{2mn}{n^2-m^2}=\frac{m^2+n^2+2mn}{n^2-m^2}=$ $=\frac{(m+n)^2}{(n-m)(n+m)}=\frac{m+n}{n-m}$.
2. Найдите разность рациональных дробей: а) $\frac{m}{6ab}-\frac{5m}{6ab}$; б) $\frac{a}{2(m+n)}-\frac{3a}{2(m+n)}$; в) $\frac{2a-3}{a^2-b^2}-\frac{2b-3}{a^2-b^2}$.	а) $\frac{m}{6ab}-\frac{5m}{6ab}=\frac{m-5m}{6ab}=\frac{-4m}{6ab}=-\frac{2m}{3ab}$; б) $\frac{a}{2(m+n)}-\frac{3a}{2(m+n)}=\frac{a-3a}{2(m+n)}=$ $=\frac{-2a}{2(m+n)}=-\frac{a}{m+n}$; в) $\frac{2a-3}{a^2-b^2}-\frac{2b-3}{a^2-b^2}=\frac{2a-3-(2b-3)}{a^2-b^2}=$ $=\frac{2a-3-2b+3}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=$ $=\frac{2(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{2}{a+b}$.
3. Выполните действия: а) $\frac{3x-9}{x-2}+\frac{x-5}{2-x}$; б) $\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2-a}{1-2a}$.	а) Знаменатели дробей отличаются только знаком. Поменяем знак в знаменателе второй дроби и перед этой дробью и получим: $\frac{3x-9}{x-2}+\frac{x-5}{2-x}=\frac{3x-9}{x-2}+\frac{x-5}{-(x-2)}=$ $=\frac{3x-9}{x-2}-\frac{x-5}{x-2}=\frac{3x-9-(x-5)}{x-2}=$ $=\frac{3x-9-x+5}{x-2}=\frac{2x-4}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-2}=2$. б) $\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2-a}{1-2a}=\frac{2a+1}{2a-1}+\frac{2-a}{2a-1}=$ $=\frac{2a+1+2-a}{2a-1}=\frac{a+3}{2a-1}$.

4. Выполните действия: а) $\frac{c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}+\frac{2c}{c-d}$; б) $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{x-2}{x-1}$.	а) $\frac{c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}+\frac{2c}{c-d}=$ $=\frac{c}{c-d}-\frac{3d}{c-d}+\frac{2c}{c-d}=$ $=\frac{c-3d+2c}{c-d}=\frac{3c-3d}{c-d}=\frac{3(c-d)}{c-d}=3.$ б) $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{x-2}{x-1}=\frac{x^2-2x-(x-2)}{x-1}=$ $=\frac{x^2-2x-x+2}{x-1}=\frac{x^2-3x+2}{x-1}.$ Разложим на множители квадратный трехчлен в числителе дроби и сократим дробь: $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2.$
Сложение (вычитание) рациональных дробей с разными знаменателями	
5. Выполните сложение рациональных дробей: а) $\frac{5}{c}+\frac{4}{d}$; б) $\frac{a+2}{3}+\frac{a-3}{4}$; в) $\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$; г) $\frac{2a}{a^2-10a+25}+\frac{1}{15-3a}$.	а) $\frac{5}{c}+\frac{4}{d}=\frac{5\cdot d}{c\cdot d}+\frac{4\cdot c}{d\cdot c}=\frac{5d+4c}{cd}$; б) $\frac{a+2}{3}+\frac{a-3}{4}=\frac{4\cdot(a+2)}{4\cdot 3}+\frac{3\cdot(a-3)}{3\cdot 4}=$ $=\frac{4(a+2)+3(a-3)}{12}=\frac{4a+8+3a-9}{12}=$ $=\frac{7a-1}{12}$; в) $\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}=\frac{b}{(a-b)(a+b)}+\frac{1}{a+b}=$ $=\frac{b}{(a-b)(a+b)}+\frac{1\cdot(a-b)}{(a+b)(a-b)}=$ $=\frac{b+(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a}{(a+b)(a-b)}$; г) $\frac{2a}{a^2-10a+25}+\frac{1}{15-3a}=$ $=\frac{2a}{(a-5)^2}+\frac{1}{3(5-a)}=\frac{2a}{(5-a)^2}+\frac{1}{3(5-a)}=$ $=\frac{3\cdot 2a}{3(5-a)^2}+\frac{1\cdot(5-a)}{3(5-a)^2}=$ $=\frac{6a+5-a}{3(5-a)^2}=\frac{5a+5}{3(5-a)^2}=\frac{5(a+1)}{3(5-a)^2}.$
6. Выполните вычитание: а) $\frac{b+4}{b(b-2)}-\frac{3}{b-2}$;	а) $\frac{b+4}{b(b-2)}-\frac{3}{b-2}=\frac{b+4}{b(b-2)}-\frac{3b}{b(b-2)}=$ $=\frac{b+4-3b}{b(b-2)}=\frac{-2b+4}{b(b-2)}=\frac{-2(b-2)}{b(b-2)}=-\frac{2}{b}$;

б) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+2}{3x^2-3x}$; в) $\dfrac{12-a}{6a-36}-\dfrac{6}{a^2-6a}$; г) $\dfrac{3n^2}{n-4}-3n$; д) $\dfrac{x^2}{2x^2-3x+1}-\dfrac{1}{x-1}$.	б) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+2}{3x^2-3x}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x+2}{3x(x-1)}=$ $=\dfrac{1\cdot 3x}{3x(x-1)}-\dfrac{x+2}{3x(x-1)}=\dfrac{3x-x-2}{3x(x-1)}=$ $=\dfrac{2x-2}{3x(x-1)}=\dfrac{2(x-1)}{3x(x-1)}=\dfrac{2}{3x}$; в) $\dfrac{12-a}{6a-36}-\dfrac{6}{a^2-6a}=\dfrac{12-a}{6(a-6)}-\dfrac{6}{a(a-6)}=$ $=\dfrac{a\cdot(12-a)}{6a(a-6)}-\dfrac{6\cdot 6}{6a(a-6)}=\dfrac{a(12-a)-36}{6a(a-6)}=$ $=\dfrac{12a-a^2-36}{6a(a-6)}=\dfrac{-\left(a^2-12a+36\right)}{6a(a-6)}=$ $=-\dfrac{(a-6)^2}{6a(a-6)}=-\dfrac{a-6}{6a}=\dfrac{6-a}{6a}$; г) $\dfrac{3n^2}{n-4}-3n=\dfrac{3n^2}{n-4}-\dfrac{3n}{1}=$ $=\dfrac{3n^2}{n-4}-\dfrac{3n\cdot(n-4)}{n-4}=\dfrac{3n^2-3n(n-4)}{n-4}=$ $=\dfrac{3n^2-3n^2+12n}{n-4}=\dfrac{12n}{n-4}$; д) Разложим на множители квадратный трехчлен в знаменателе первой дроби и получим: $\dfrac{x^2}{2x^2-3x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2}{(x-1)(2x-1)}-\dfrac{1}{x-1}=$ $=\dfrac{x^2-(2x-1)}{(x-1)(2x-1)}=\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(2x-1)}=$ $=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-1)}=\dfrac{x-1}{2x-1}$.
7. Представьте в виде дроби выражение $\dfrac{5a}{a-2b}-\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{4ab}{4b^2-a^2}$.	$\dfrac{5a}{a-2b}-\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{4ab}{4b^2-a^2}=$ $=\dfrac{5a}{a-2b}-\dfrac{a}{a+2b}-\dfrac{4ab}{a^2-4b^2}=$ $=\dfrac{5a}{a-2b}-\dfrac{a}{a+2b}-\dfrac{4ab}{(a-2b)(a+2b)}=$ $=\dfrac{5a(a+2b)-a(a-2b)-4ab}{(a-2b)(a+2b)}=$ $=\dfrac{5a^2+10ab-a^2+2ab-4ab}{(a-2b)(a+2b)}=$ $=\dfrac{4a^2+8ab}{(a-2b)(a+2b)}=\dfrac{4a(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}=\dfrac{4a}{a-2b}$.

1. Общий знаменатель суммы рациональных дробей $\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{a}$ равен: а) $a+b$; б) a; в) $2a+b$; г) $a(a+b)$. Выберите правильный ответ.

2. Выберите верное равенство:

а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a+b$; б) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$;

в) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$; г) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$.

1.89. Выполните сложение рациональных дробей:

а) $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$; б) $\frac{2x}{7}+\frac{x}{7}$; в) $\frac{3m}{n}+\frac{1}{n}$;

г) $\frac{4a}{3b}+\frac{5a}{3b}$; д) $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a^2}$; е) $\frac{y^2}{8xz}+\frac{3y^2}{8xz}$.

1.90. Выполните вычитание рациональных дробей:

а) $\frac{9a^2}{8}-\frac{5a^2}{8}$; б) $\frac{2m}{5ab}-\frac{7}{5ab}$; в) $\frac{6b^3}{25c}-\frac{b^3}{25c}$;

г) $\frac{b}{ad}-\frac{3c}{ad}$; д) $\frac{x^2}{9y}-\frac{z^2}{9y}$; е) $\frac{5k^4}{2mn}-\frac{7k^4}{2mn}$.

1.91. Сложите дроби:

а) $\frac{2x-1}{4}$ и $\frac{3x}{4}$; б) $\frac{4b+3}{5}$ и $\frac{b-1}{5}$;

в) $\frac{a-b}{2c}$ и $\frac{a+b}{2c}$; г) $\frac{m+5}{m}$ и $\frac{2m-5}{m}$.

1.92. Найдите разность дробей:

а) $\frac{3a-7}{2}$ и $\frac{a}{2}$; б) $\frac{7m+4}{3}$ и $\frac{3m-2}{3}$;

в) $\frac{x-y}{4z}$ и $\frac{x+y}{4z}$; г) $\frac{6b-c}{5ab}$ и $\frac{5b-c}{5ab}$.

1.93. Представьте каждую из рациональных дробей $\frac{5x-2y}{7}$; $\frac{8b+c}{abc}$; $\frac{3a}{b}$ в виде: а) суммы рациональных дробей; б) разности рациональных дробей.

1.94. Выполните сложение или вычитание рациональных дробей:

а) $\frac{3x}{x+y}+\frac{3y}{x+y}$; б) $\frac{m}{m-2}-\frac{2}{m-2}$;

в) $\frac{6b+5}{4b-4}+\frac{2b-5}{4b-4}$; г) $\frac{3n-2k}{n+k}-\frac{2n-3k}{n+k}$;

д) $\frac{8x-6}{3x-2}+\frac{2-2x}{3x-2}$; е) $\frac{a+b}{b+3}-\frac{a-3}{b+3}$.

1.95. Выполните действия:

а) $\frac{y}{y^2-16}+\frac{4}{y^2-16}$; б) $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}$;

в) $\frac{4x}{x^2-y^2}+\frac{4y}{x^2-y^2}$; г) $\frac{10}{c^2-4}-\frac{5c}{c^2-4}$;

д) $\frac{3x^2}{(x-y)^2}-\frac{3y^2}{(x-y)^2}$; е) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}+\frac{2mn}{m^2-n^2}$;

ж) $\frac{c^2+3c}{c^2-4}-\frac{7c-4}{c^2-4}$; з) $\frac{3b^2}{b^2-6b+9}-\frac{2b^2+9}{b^2-6b+9}$;

и) $\frac{a^2-a}{a-5}-\frac{a+15}{a-5}$; к) $\frac{x^2}{x^2-6x+8}-\frac{4}{x^2-6x+8}$.

1.96. Найдите значение выражения:

а) $\frac{m^2-7}{m+5}-\frac{18}{m+5}$ при $m=12{,}67$;

б) $\frac{a^2}{a-7}-\frac{14a-49}{a-7}$ при $a=1\frac{3}{14}$;

в) $\frac{x^2-x}{x^2-4}+\frac{5x+4}{x^2-4}$ при $x=2{,}01$;

г) $\frac{c^2-4c}{c^2-7c+12}-\frac{c-6}{c^2-7c+12}$ при $c=3{,}5$.

1.97. Докажите тождество $\frac{(m+3n)^2}{2mn}-\frac{(m-3n)^2}{2mn}=6$.

1.98. Поменяйте знак в знаменателе одной из дробей и перед этой дробью, а затем упростите выражение:

а) $\frac{3a}{a-b}+\frac{3b}{b-a}$; б) $\frac{c-5d}{c-d}-\frac{5d}{d-c}$; в) $\frac{x+2y}{y-x}+\frac{x+3y}{x-y}$;

г) $\frac{m-3}{m-2}-\frac{m+3}{2-m}$; д) $\frac{2a-7}{a-b}+\frac{a+7}{b-a}$; е) $\frac{b^2}{b-4}+\frac{16}{4-b}$;

ж) $\frac{3y}{9y^2-1}-\frac{1}{1-9y^2}$; з) $\frac{a^2+4b^2}{a-2b}+\frac{4ab}{2b-a}$.

1.99. Найдите значение выражения:

а) $\frac{x^2-85}{x-9}-\frac{4}{9-x}$ при $x=3\frac{1}{9}$;

б) $\frac{n^2-n}{n-9}+\frac{9+7n}{9-n}$ при $n=\sqrt{3}-1$.

1.100. Упростите выражение:

а) $\frac{7m-1}{16m-8}-\frac{7-4m}{8-16m}-\frac{3m+2}{8-16m}$;

б) $\frac{2x^2+11x}{x^2-25}+\frac{7x-2}{25-x^2}-\frac{x^2+14x-23}{x^2-25}$.

1.101. Представьте в виде дроби выражение:

а) $\frac{10-9x}{(x-1)^2}-\frac{9-8x}{(1-x)^2}$; б) $\frac{a^2+4}{(a-2)^3}+\frac{4a}{(2-a)^3}$;

в) $\frac{b^2-5b}{(b-2)(b-3)}-\frac{3b}{(b-2)(3-b)}$; г) $\frac{c^2+c}{c^2-4c-12}+\frac{c+36}{4c+12-c^2}$.

1.102. Докажите, что значение выражения

$$\frac{(2-x)^2}{x^2-3}-\frac{3x-2}{3-x^2}+\frac{x-5}{x^2-3}$$

не зависит от значения переменной.

1.103. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^2-4ab}{a^2-4b^2}-\frac{4b^2}{4b^2-a^2}$ при $a=6$, $b=-0{,}5$;

б) $\frac{n^2+n}{n^2-81}+\frac{9-7n}{81-n^2}$ при $n=9{,}02$.

1.104. Выполните сложение или вычитание дробей с разными знаменателями, используя алгоритм:

а) $\frac{c}{5}+\frac{2d}{3}$; б) $\frac{6a}{7}-\frac{a}{4}$; в) $\frac{x}{6}+\frac{y}{9}$;

г) $\frac{5}{b}-\frac{6}{c}$; д) $\frac{x}{8y}+\frac{y}{6x}$; е) $\frac{m}{n}-\frac{3k}{5n}$;

ж) $\frac{14}{3x}+\frac{z}{12xy}$; з) $\frac{8a}{bcd}-\frac{3d}{bck}$; и) $\frac{c}{d^2}+\frac{2}{cd^3}$.

1.105. Упростите выражение:

а) $\frac{x+3}{8}-\frac{x-1}{10}$; б) $\frac{3m-5n}{9}+\frac{m+2n}{12}$;

в) $\frac{6a+1}{3a}-\frac{2a+8}{a}$; г) $\frac{x-2y}{14x}+\frac{3x+y}{7x}$;

д) $\frac{5c-2}{c}-\frac{5d-1}{d}$; е) $\frac{2a-1}{9a}+\frac{3-2b}{9b}$;

ж) $\frac{m+n}{mn}-\frac{m+k}{mk}$; з) $\frac{2b-1}{b^2}+\frac{1}{b}$;

и) $\frac{a-1}{a^4}-\frac{1}{a^3}$; к) $\frac{y+3}{y}-\frac{3y-1}{y^2}$.

1.106. Найдите разность $A-B$, если $A=-\frac{x+y}{36x}$, $B=-\frac{y+x}{6x}$.

1.107. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{1}{x}$ и $\frac{x}{x+3}$; б) $\frac{a^2-b}{a-b}$ и $\frac{b}{a}$;

в) $\frac{2}{m}$ и $\frac{3m-2}{m+1}$; г) $\frac{c-d}{d}$ и $\frac{c-d}{c+d}$.

1.108. Представьте в виде дроби выражение:

а) $\frac{m}{n}+n$; б) $d-\frac{c}{d}$; в) $\frac{a}{b}+1$;

г) $x-\frac{2}{x}$; д) $\frac{x^2-6y}{y}+6$; е) $3a-\frac{3a^2+b}{a}$;

ж) $\frac{3m^2}{m+1}-3m$; з) $5-\frac{5b}{b+c}$; и) $\frac{12x^2}{3x-2}-4x+1$.

1.109. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{x}{x-5}-\frac{5}{x+5}$; б) $\frac{a}{4a-1}-\frac{a}{4a+1}$; в) $\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m+n}$;

г) $\frac{1}{c+3d}+\frac{1}{3d-c}$; д) $\frac{n}{2n+1}-\frac{n}{3n-2}$; е) $\frac{a}{2a+3}+\frac{a}{a-1}$.

1.110. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{18}{c(c-6)}+\frac{3}{c}$; б) $\frac{5}{y-3}-\frac{4y+3}{y(y-3)}$;

в) $\frac{a}{2(b+7)}-\frac{a}{5(b+7)}$; г) $\frac{6x+1}{9(x+1)}+\frac{2x-1}{6(x+1)}$;

д) $\frac{3}{m(n-m)}-\frac{3}{n(n-m)}$; е) $\frac{2}{(a-1)(a-2)}+\frac{3}{(a-1)(a-3)}$.

1.111. Приведите рациональное выражение к несократимой рациональной дроби:

а) $\frac{15}{x^2+5x}-\frac{3}{x}$; б) $\frac{b}{b+2}+\frac{1-3b}{3b+6}$;

в) $\frac{4}{2y-y^2}+\frac{y}{y-2}$; г) $\frac{m-1}{6m-2}+\frac{m}{3m-1}$;

д) $\frac{3c+1}{3c+15}-\frac{2c-1}{2c+10}$; е) $\frac{2y-1}{10y-10z}-\frac{3y-1}{15z-15y}$;

ж) $\frac{2n+2}{n^2+2n}-\frac{n+4}{2n+4}$; з) $\frac{5a-4b}{a^2-2ab}-\frac{a-5b}{2b^2-ab}$.

1.112. Выполните действия: $\frac{a-6}{a^2+3a}-\frac{a-3}{a}+\frac{a}{a+3}$.

1.113. Найдите значение выражения $\frac{b+2}{b}-\frac{b}{b-2}-\frac{b+2}{2b-b^2}$ при $b=0,2$.

1.114. Примените формулу разности квадратов для разложения на множители знаменателей дробей и выполните действия:

а) $\frac{4d}{d^2-1}-\frac{4}{d+1}$; б) $\frac{x^2+9}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}$;

в) $\frac{2a+1}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{2}{3c+2}-\frac{8}{4-9c^2}$;

д) $\frac{4+y}{4-y}+\frac{y^2+16}{y^2-16}$; е) $\frac{b^2+4c^2}{b^2-4c^2}-\frac{b-2c}{b+2c}$.

1.115. Упростите выражение:

а) $\frac{3}{c+2}+\frac{2c-5}{4-c^2}+\frac{5}{c-2}$; б) $\frac{a+6}{4a+8}-\frac{a+2}{4a-8}+\frac{5}{a^2-4}$.

1.116. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{3x+3}$ при $x=0,3$;

б) $\frac{1}{a}-\frac{a+2b}{2ab-a^2}-\frac{4a}{a^2-4b^2}$ при $a=\sqrt{7}$, $b=5-\sqrt{7}$.

1.117. Примените формулы сокращенного умножения для разложения на множители знаменателей дробей и выполните действия:

а) $\frac{1}{x+y}-\frac{y}{x^2+2xy+y^2}$; б) $\frac{m^2}{m^2-2m+1}+\frac{m}{1-m}$;

в) $\frac{3x+1}{3x-15}-\frac{2x-10}{x^2-10x+25}$; г) $\frac{a}{64-a^2}+\frac{a-1}{a^2-16a+64}$.

1.118. Найдите значение выражения $\frac{3}{5a-20}-\frac{a-5}{a^2-8a+16}$ при $a=4{,}1$.

1.119. Замените M таким двучленом, при котором верно равенство $\frac{10}{a^2-2ab+b^2}-\frac{5}{b^2-a^2}=\frac{M}{(a-b)^2(a+b)}$.

1.120. С помощью какого способа можно разложить на множители знаменатели данных дробей? Примените этот способ и выполните действия:

а) $\frac{a+4}{ab-7b+5a-35}-\frac{1}{b+5}$; б) $\frac{2x+3y-1}{6xy+4x-9y-6}+\frac{1}{3-2x}$;

в) $\frac{1}{a+b}-\frac{x-y}{ax-3ay+bx-3by}$.

1.121. Примените формулу разложения квадратного трехчлена на множители и выполните действия:

а) $\frac{1}{a^2-4a+3}-\frac{2}{a^2-5a+4}$; б) $\frac{3-x}{x^2-5x+6}-\frac{x-4}{x^2-6x+8}$;

в) $\frac{a+2}{a^2-a-6}-\frac{a}{a^2-6a+9}$; г) $1-\frac{b-4}{b^2+2b-24}-\frac{2}{b+6}$.

1.122*. Упростите выражение наиболее рациональным способом:

а) $\frac{x^2+10x+24}{xy+4y-2x-8}-\frac{x+5}{y-2}$; б) $\frac{n-4}{2m-1}-\frac{n^2-3n-18}{2mn-n+6m-3}$.

1.123*. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{8}{c^4-4}+\frac{1}{c^2+2}-\frac{2}{c^2-2}$ принимает только отрицательные значения.

1.124*. Докажите, что значение выражения

$$\frac{a^2 - ac^2 + 2c^2 - 4}{a^2 + 2a + 2c^2 - c^4} - \frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 + ac^2 - 2a - 2c^2}$$

не зависит от значений переменных.

1.125*. Упростите выражение

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2 + 12xz + 36z^2} + \frac{36z^2 + 12yz}{y^2 - x^2 - 12xz - 36z^2}.$$

1.126*. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{a(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+8)}$;

б) $\frac{1}{b^2+3b} + \frac{1}{b^2+9b+18} + \frac{1}{b^2+15b+54} + \frac{1}{b^2+21b+108}$.

1.127*. Докажите тождество

$$\frac{a^2 - (b-c)^2}{(a+c)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (a-c)^2}{(a+b)^2 - c^2} + \frac{c^2 - (a-b)^2}{(b+c)^2 - a^2} = 1.$$

1.128*. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} \text{ при } a = \sqrt{3}.$$

1.129. Выполните сложение или вычитание рациональных дробей:

а) $\frac{m}{7} + \frac{n}{7}$; б) $\frac{5a}{b} - \frac{3a}{b}$; в) $\frac{5x}{y^2} + \frac{3}{y^2}$;

г) $\frac{12c^2}{5ab} - \frac{2c^2}{5ab}$; д) $\frac{mn}{3k} + \frac{cd}{3k}$; е) $\frac{2x^2}{9a^4} - \frac{20x^2}{9a^4}$.

1.130. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{5x+2}{7}$ и $\frac{3x}{7}$; б) $\frac{3a-1}{4}$ и $\frac{a+2}{4}$;

в) $\frac{m+n}{6a}$ и $\frac{m-n}{6a}$; г) $\frac{7y-2}{3xy}$ и $\frac{5y+2}{3xy}$.

1.131. Выполните сложение или вычитание рациональных дробей:

а) $\frac{5a}{a+b} + \frac{5b}{a+b}$; б) $\frac{3c}{3c-1} - \frac{1}{3c-1}$;

в) $\frac{4x+3}{5x+5} + \frac{6x-3}{5x+5}$; г) $\frac{m-n}{n-2} - \frac{m-2}{n-2}$.

1.132. Выполните действия:

а) $\frac{a}{a^2-9}+\frac{3}{a^2-9}$; б) $\frac{x^2}{x-4}-\frac{16}{x-4}$;

в) $\frac{5m}{m^2-n^2}+\frac{5n}{m^2-n^2}$; г) $\frac{6}{b^2-9}-\frac{2b}{b^2-9}$;

д) $\frac{a^2}{a^2-9b^2}+\frac{6ab+9b^2}{a^2-9b^2}$; е) $\frac{y^2+7y}{y^2-1}-\frac{5y-1}{y^2-1}$;

ж) $\frac{a^2+3a}{a-1}+\frac{2a-6}{a-1}$; з) $\frac{x^2}{x^2-4x+3}-\frac{1}{x^2-4x+3}$.

1.133. Найдите значение выражения $\frac{2n^2-7}{n^2-6n+9}-\frac{n^2+2}{n^2-6n+9}$ при $n=3{,}1$.

1.134. Поменяйте знак в знаменателе одной из дробей и перед этой дробью, а затем упростите выражение:

а) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{2-b}$; б) $\frac{7m}{m-n}+\frac{7n}{n-m}$;

в) $\frac{a-4b}{a-3b}-\frac{5a-14b}{3b-a}$; г) $\frac{49x^2}{7x-y}+\frac{y^2}{y-7x}$;

д) $\frac{m^2}{5m-10}+\frac{4}{10-5m}$; е) $\frac{9c^2}{3c-1}+\frac{6c-1}{1-3c}$.

1.135. Найдите значение выражения $\frac{5a+2}{a^2-16}+\frac{6a-2}{16-a^2}$ при $a=-4{,}5$.

1.136. Упростите выражение $\frac{9a+2}{a^2-4}+\frac{30-a}{a^2-4}-\frac{7a-2}{4-a^2}$.

1.137. Представьте в виде дроби выражение:

а) $\frac{16}{(4-a)^2}-\frac{a^2}{(a-4)^2}$; б) $\frac{1-6x}{(3x-1)^3}-\frac{9x^2}{(1-3x)^3}$.

1.138. Докажите, что значение выражения

$\frac{(a-1)^2}{a^2-2}+\frac{1-2a}{2-a^2}-\frac{2}{a^2-2}$ не зависит от значения переменной.

1.139. Выполните сложение или вычитание дробей с разными знаменателями, используя алгоритм:

а) $\frac{8a}{2}-\frac{b}{3}$; б) $\frac{x}{7}+\frac{3x}{5}$; в) $\frac{m}{10}-\frac{n}{15}$;

г) $\frac{9}{x}+\frac{5}{y}$; д) $\frac{2a}{15b}-\frac{3b}{5a}$; е) $\frac{c}{d}+\frac{5a}{7d}$;

ж) $\frac{2a}{5m}-\frac{1}{20mn}$; з) $\frac{x}{y^2z}+\frac{3}{yz^2}$; и) $\frac{1}{3x}-\frac{y}{5x^2}$.

1.140. Упростите выражение:

а) $\frac{a+4}{9}+\frac{a-1}{6}$; б) $\frac{2x-5}{3x}-\frac{x+1}{5x}$; в) $\frac{n+3}{3n}-\frac{m+3}{3m}$;

г) $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-d}{cd}$; д) $\frac{3}{y}-\frac{2y-3}{y^2}$; е) $\frac{a+3}{a^3}-\frac{1}{a^2}$;

ж) $\frac{6m+1}{m^9}-\frac{6+m}{m^8}$; з) $\frac{5x-3}{xy}+\frac{3x+1}{x^2y}$.

1.141. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n-m}$; б) $\frac{5a+4}{a+2}$ и $\frac{4}{a}$.

1.142. Представьте выражение в виде дроби:

а) $x+\frac{y}{x}$; б) $\frac{a}{b}-2$; в) $\frac{6}{m}+m$;

г) $3-\frac{c+3d}{d}$; д) $\frac{5x^2+2y}{x}-5x$; е) $\frac{7n^2}{1-n}+7n$;

ж) $8-\frac{8y}{x+y}$; з) $\frac{15b^2}{5b+1}-3b-1$.

1.143. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{m}{m-7}-\frac{7}{m+7}$; б) $\frac{2}{4-x}+\frac{3}{x+4}$; в) $\frac{3}{4a-3}-\frac{4}{3a+1}$.

1.144. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{5}{x}-\frac{20}{x(x+3)}$; б) $\frac{1-6a}{a(a-1)}+\frac{6}{a-1}$;

в) $\frac{m}{4(n-1)}-\frac{m}{7(n-1)}$; г) $\frac{y-1}{15(y+2)}+\frac{2y+1}{10(y+2)}$;

д) $\frac{5}{b(a-b)}-\frac{5}{a(a-b)}$; е) $\frac{1}{(c+1)(c+5)}-\frac{1}{(c+1)(c-4)}$.

1.145. Упростите выражение:

а) $\frac{18}{a^2+9a}-\frac{2}{a}$; б) $\frac{x}{x-7}-\frac{3x+2}{3x-21}$;

в) $\frac{9}{3b-b^2}+\frac{b}{b-3}$; г) $\frac{m-1}{4m-8}+\frac{m+2}{6m-12}$;

д) $\frac{y-5}{xy-y^2}+\frac{x-5}{xy-x^2}$; е) $\frac{m+4}{4m-24}-\frac{9-4m}{6m-m^2}$.

1.146. Выполните действия: $\frac{a-12}{a^2+4a}-\frac{a-4}{a}+\frac{a}{a+4}$.

1.147. Примените формулу разности квадратов для разложения на множители знаменателей дробей и приведите выражение к несократимой дроби:

а) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{x}{x-4}$; б) $\frac{4}{b-3}-\frac{3b+1}{b^2-9}$;

в) $\frac{3y}{9y^2-1}+\frac{1}{1-3y}$; г) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$.

1.148. Найдите значение выражения $\frac{c-3}{c^2+3c}+\frac{c+3}{3c-c^2}-\frac{4c}{c^2-9}$ при $c=3\frac{2}{7}$.

1.149. Примените формулы сокращенного умножения для разложения на множители знаменателей дробей и выполните действия:

а) $\frac{c}{c+6}-\frac{c^2}{c^2+12c+36}$; б) $\frac{4}{x^2-4x+4}-\frac{2}{2-x}$.

1.150. Примените способ группировки для разложения на множители знаменателей дробей и выполните действия:

а) $\frac{m+8}{mn-6n+3m-18}-\frac{1}{n+3}$; б) $\frac{x-y}{3x-2x^2+3y-2xy}+\frac{1}{2x-3}$.

1.151. Примените формулу разложения квадратного трехчлена на множители и выполните действия:

а) $\frac{2}{y^2-3y+2}-\frac{1}{y^2-6y+5}$; б) $\frac{a-3}{a^2-9a+20}-\frac{a-5}{a^2-7a+12}$;

в) $\frac{a-4}{a^2-2a+1}-\frac{a+2}{a^2+a-2}$.

1.152*. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{10}{25-m^4}+\frac{1}{5+m^2}-\frac{1}{5-m^2}$ принимает только положительные значения.

1.153*. Упростите выражение

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

и найдите его значение при $x=10$.

1.154. Выполните действия:

а) $\frac{3}{7}\cdot 49$; б) $25:\frac{5}{9}$; в) $3\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{12}$; г) $10\frac{1}{3}:2\frac{2}{3}$.

1.155. Примените свойства степени с целым показателем и найдите значение выражения $\frac{6^{-3}\cdot 2^{-4}}{18^{-2}}$.

1.156. Вычислите: $\left(\sqrt{108}-\sqrt{147}\right)\cdot 2\sqrt{3}$.

1.157. Постройте параболу $y=x^2$ и прямую $y=x+6$. Запишите координаты точек пересечения графиков этих функций.

1.158. Запишите все двузначные числа, кратные 7, но не кратные 21.

1.159. Решите систему квадратных неравенств
$$\begin{cases} x^2 - 25 \leqslant 0, \\ x^2 + 5x \geqslant 0. \end{cases}$$

1.160. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 7x - 2 = 0$; б) $3x^2 + 5x - 13 = 0$.

1.161. Выберите рациональный способ и решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25. \end{cases}$

§ 4. Умножение и деление рациональных дробей

1.162. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3}{8} : \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12}$; б) $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5}$.

1.163. Выполните умножение: $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$.

1.164. Разложите на множители многочлен $x^4 - 8x^2 + 16$.

Вспомним, как умножают и делят обыкновенные дроби.
Например: $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5 \cdot 6}{12 \cdot 7} = \frac{5}{14}$; $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2}{3}$.

Правила умножения и деления рациональных дробей аналогичны правилам умножения и деления обыкновенных дробей.

Произведение рациональных дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель равен произведению знаменателей данных дробей.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Чтобы найти произведение рациональных дробей, нужно:

① Произведение числителей данных дробей записать в числителе новой дроби, а произведение знаменателей данных дробей записать в знаменателе новой дроби. ② Сократить полученную дробь, если это возможно.	Найдите произведение рациональных дробей $\frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{(2x+1)^2}$. ① $\frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1) \cdot (x^2-9)}{(x-3) \cdot (2x+1)^2}$. ② $\frac{(2x+1) \cdot (x^2-9)}{(x-3) \cdot (2x+1)^2} = \frac{(2x+1)(x-3)(x+3)}{(x-3)(2x+1)^2} =$ $= \frac{x+3}{2x+1}$.

Пример 1. Найдите произведение рациональных дробей:

а) $\frac{8a^2b}{c} \cdot \frac{c^3}{4ab^2}$;

б) $\frac{6x^3}{x-5} \cdot \frac{25-x^2}{18x^2}$.

$$\frac{3x}{5y} \cdot \frac{m}{4n} = \frac{3x \cdot m}{5y \cdot 4n} = \frac{3mx}{20ny}$$

$$\frac{a^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{a} = \frac{a^2 \cdot (a+b)}{\left(a^2-b^2\right) \cdot a} = \frac{a^2 \cdot (a+b)}{(a-b)(a+b) \cdot a} = \frac{a}{a-b}$$

Решение. а) $\frac{8a^2b}{c} \cdot \frac{c^3}{4ab^2} = \frac{8a^2b \cdot c^3}{c \cdot 4ab^2} = \frac{2ac^2}{b}$;

б) $\frac{6x^3}{x-5} \cdot \frac{25-x^2}{18x^2} = \frac{6x^3 \cdot (25-x^2)}{18x^2 \cdot (x-5)} = -\frac{6x^3 \cdot (5-x)(5+x)}{18x^2 \cdot (5-x)} = -\frac{x(x+5)}{3}$.

Правило умножения рациональных дробей можно использовать при возведении рациональной дроби в степень. Например:

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = \frac{m-n}{m+n} \cdot \frac{m-n}{m+n} = \frac{(m-n) \cdot (m-n)}{(m+n) \cdot (m+n)} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}.$$

Обобщим этот прием и получим правило:

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель дроби и полученный результат записать в числителе новой дроби, возвести в эту степень знаменатель дроби и полученный результат записать в знаменателе новой дроби.

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{n}}}$$

Пример 2. Возведите в степень дробь:

а) $\left(\frac{3b^2c}{2a^5}\right)^4$; б) $\left(\frac{2x-y}{4xy}\right)^3$.

$$\left(\frac{xy^3}{2z}\right)^5 = \frac{\left(xy^3\right)^5}{(2z)^5} = \frac{x^5y^{15}}{32z^5}$$

$$\left(\frac{a-2b}{a+2b}\right)^4 = \frac{(a-2b)^4}{(a+2b)^4}$$

Решение.

а) $\left(\frac{3b^2c}{2a^5}\right)^4 = \frac{(3b^2c)^4}{(2a^5)^4} = \frac{81b^8c^4}{16a^{20}}$;

б) $\left(\frac{2x-y}{4xy}\right)^3 = \frac{(2x-y)^3}{(4xy)^3} = \frac{(2x-y)^3}{64x^3y^3}$.

Чтобы разделить одну рациональную дробь на другую, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} : \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} \cdot \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}}$$

Пример 3. Найдите частное:

а) $\dfrac{25z^2}{64x^3y^3} : \dfrac{15z}{16xy}$;

б) $\dfrac{a^2+ab}{b} : \dfrac{a+b}{b^2}$.

$$\frac{3a}{7b} : \frac{m}{2n} = \frac{3a}{7b} \cdot \frac{2n}{m} = \frac{6an}{7bm}$$

$$\frac{a-3}{a^2} : \frac{(a-3)^2}{a} = \frac{a-3}{a^2} \cdot \frac{a}{(a-3)^2} = \frac{(a-3)\cdot a}{a^2\cdot(a-3)^2} = \frac{1}{a(a-3)}$$

Решение. а) $\dfrac{25z^2}{64x^3y^3} : \dfrac{15z}{16xy} = \dfrac{25z^2}{64x^3y^3} \cdot \dfrac{16xy}{15z} = \dfrac{25z^2\cdot 16xy}{64x^3y^3\cdot 15z} = \dfrac{5z}{12x^2y^2}$;

б) $\dfrac{a^2+ab}{b} : \dfrac{a+b}{b^2} = \dfrac{a^2+ab}{b} \cdot \dfrac{b^2}{a+b} = \dfrac{a(a+b)\cdot b^2}{b\cdot(a+b)} = ab$.

Пример 4. Представьте в виде дроби рациональное выражение:

а) $3a^2b \cdot \dfrac{2b}{9a^3}$;

б) $(x+y)^2 : \dfrac{x^2+xy}{x-y}$.

$$\frac{a+b}{a-b}\cdot\left(a^2-b^2\right) = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a^2-b^2}{1} = \frac{(a+b)(a-b)(a+b)}{a-b} = (a+b)^2$$

$$\frac{9l^4n^2}{k} : 3l^3n^2 = \frac{9l^4n^2}{k} : \frac{3l^3n^2}{1} = \frac{9l^4n^2}{k}\cdot\frac{1}{3l^3n^2} = \frac{9l^4n^2}{k\cdot 3l^3n^2} = \frac{3l}{k}$$

Решение. а) Представим множитель $3a^2b$ в виде рациональной дроби: $3a^2b = \dfrac{3a^2b}{1}$.

Выполним умножение дробей:

$$\frac{3a^2b}{1}\cdot\frac{2b}{9a^3} = \frac{3a^2b\cdot 2b}{1\cdot 9a^3} = \frac{2b^2}{3a}.$$

б) Представив выражение $(x+y)^2$ в виде рациональной дроби $\dfrac{(x+y)^2}{1}$, получим: $(x+y)^2 : \dfrac{x^2+xy}{x-y} = \dfrac{(x+y)^2}{1} : \dfrac{x(x+y)}{x-y} = \dfrac{(x+y)^2}{1}\cdot\dfrac{x-y}{x(x+y)} = \dfrac{(x+y)^2(x-y)}{1\cdot x(x+y)} = \dfrac{(x+y)(x-y)}{x} = \dfrac{x^2-y^2}{x}$.

Умножение и деление рациональных дробей	
1. Выполните умножение рациональных дробей: а) $\dfrac{l}{n}\cdot\dfrac{1}{l^2}$; б) $\dfrac{b}{2a}\cdot\dfrac{a^2}{3b}$.	а) $\dfrac{l}{n}\cdot\dfrac{1}{l^2} = \dfrac{l\cdot 1}{n\cdot l^2} = \dfrac{1}{ln}$; б) $\dfrac{b}{2a}\cdot\dfrac{a^2}{3b} = \dfrac{b\cdot a^2}{2a\cdot 3b} = \dfrac{a}{6}$.

2. Представьте в виде рациональной дроби произведение: а) $\frac{a+b}{2(a-b)} \cdot \frac{4(a-b)^2}{(a+b)^2}$; б) $\frac{a-b}{c} \cdot \frac{a-b}{b}$; в) $\frac{x-1}{y} \cdot \frac{5y^2}{1-x^2}$.	а) $\frac{a+b}{2(a-b)} \cdot \frac{4(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b) \cdot 4(a-b)^2}{2(a-b)(a+b)^2} = \frac{2(a-b)}{a+b}$; б) $\frac{a-b}{c} \cdot \frac{a-b}{b} = \frac{(a-b)(a-b)}{c \cdot b} = \frac{(a-b)^2}{bc}$; в) $\frac{x-1}{y} \cdot \frac{5y^2}{1-x^2} = \frac{(x-1) \cdot 5y^2}{y \cdot (1-x^2)} = \frac{(x-1) \cdot 5y^2}{y \cdot (1-x)(1+x)} = -\frac{(x-1) \cdot 5y^2}{y \cdot (x-1)(1+x)} = -\frac{5y}{x+1}$.
3. Представьте в виде рациональной дроби выражение: а) $\left(\frac{2a^2b}{c^4}\right)^5$; б) $\left(\frac{x}{y+z}\right)^2$; в) $\left(-\frac{4x^3}{3yz^2}\right)^3$.	а) $\left(\frac{2a^2b}{c^4}\right)^5 = \frac{\left(2a^2b\right)^5}{\left(c^4\right)^5} = \frac{32a^{10}b^5}{c^{20}}$; б) $\left(\frac{x}{y+z}\right)^2 = \frac{x^2}{(y+z)^2}$; в) $\left(-\frac{4x^3}{3yz^2}\right)^3 = -\left(\frac{4x^3}{3yz^2}\right)^3 = -\frac{\left(4x^3\right)^3}{\left(3yz^2\right)^3} = -\frac{64x^9}{27y^3z^6}$.
4. Представьте в виде степени рациональную дробь: а) $\frac{16a^8b^2}{c^4}$; б) $\frac{(x-y)^{18}}{a^9b^{27}}$.	а) $\frac{16a^8b^2}{c^4} = \frac{\left(4a^4b\right)^2}{\left(c^2\right)^2} = \left(\frac{4a^4b}{c^2}\right)^2$; б) $\frac{(x-y)^{18}}{a^9b^{27}} = \frac{\left((x-y)^2\right)^9}{\left(ab^3\right)^9} = \left(\frac{(x-y)^2}{ab^3}\right)^9$.
5. Выполните деление рациональных дробей: а) $\frac{a^4}{9b^3} : \frac{a^2}{18b^3}$; б) $\frac{y}{9x^2} : \frac{xy+y^2}{3x}$; в) $\frac{a-3b}{a+3b} : \frac{6b-2a}{b}$;	а) $\frac{a^4}{9b^3} : \frac{a^2}{18b^3} = \frac{a^4}{9b^3} \cdot \frac{18b^3}{a^2} = \frac{a^4 \cdot 18b^3}{9b^3 \cdot a^2} = 2a^2$; б) $\frac{y}{9x^2} : \frac{xy+y^2}{3x} = \frac{y}{9x^2} \cdot \frac{3x}{xy+y^2} = \frac{y \cdot 3x}{9x^2 \cdot y(x+y)} = \frac{1}{3x(x+y)}$; в) $\frac{a-3b}{a+3b} : \frac{6b-2a}{b} = \frac{a-3b}{a+3b} \cdot \frac{b}{6b-2a} = \frac{(a-3b) \cdot b}{(a+3b) \cdot 2(3b-a)} = -\frac{(a-3b) \cdot b}{(a+3b) \cdot 2(a-3b)} = -\frac{b}{2(a+3b)}$;

г) $\dfrac{1}{x^2-1}:\dfrac{x}{x^2-2x+1}$; д) $\dfrac{p}{3p^2+p-2}:\dfrac{p}{9p^2-4}$.	г) $\dfrac{1}{x^2-1}:\dfrac{x}{x^2-2x+1}=\dfrac{1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{x}=$ $=\dfrac{1\cdot(x-1)^2}{(x-1)(x+1)\cdot x}=\dfrac{x-1}{x(x+1)}$. д) Воспользуемся формулой разложения квадратного трехчлена на множители и получим: $3p^2+p-2=(p+1)(3p-2)$. Тогда $\dfrac{p}{3p^2+p-2}:\dfrac{p}{9p^2-4}=\dfrac{p}{3p^2+p-2}\cdot\dfrac{9p^2-4}{p}=$ $=\dfrac{p\cdot(3p-2)(3p+2)}{(p+1)(3p-2)\cdot p}=\dfrac{3p+2}{p+1}$.
6. Выполните действия: а) $(3a-9)\cdot\dfrac{a}{a^2-6a+9}$; б) $\dfrac{4x^2-36x}{y}:(9-x)$; в) $\dfrac{a+b}{5ax-ay+5bx-by}\times$ $\times(10x-2y)$.	а) $(3a-9)\cdot\dfrac{a}{a^2-6a+9}=\dfrac{3a-9}{1}\cdot\dfrac{a}{a^2-6a+9}=$ $=\dfrac{3(a-3)\cdot a}{(a-3)^2}=\dfrac{3a}{a-3}$; б) $\dfrac{4x^2-36x}{y}:(9-x)=\dfrac{4x^2-36x}{y}:\dfrac{9-x}{1}=$ $=\dfrac{4x^2-36x}{y}\cdot\dfrac{1}{9-x}=\dfrac{4x(x-9)}{y(9-x)}=-\dfrac{4x(x-9)}{y(x-9)}=$ $=-\dfrac{4x}{y}$. в) Разложим на множители многочлен, применив способ группировки: $5ax-ay+5bx-by=(5x-y)(a+b)$. Тогда $\dfrac{a+b}{5ax-ay+5bx-by}\cdot(10x-2y)=$ $=\dfrac{a+b}{5ax-ay+5bx-by}\cdot\dfrac{10x-2y}{1}=$ $=\dfrac{(a+b)\cdot 2(5x-y)}{(5x-y)(a+b)}=2$.
7. Найдите значение выражения $\dfrac{(x-13)^2}{x^2-169}:\dfrac{x^2}{13+x}$ при $x=-4$.	Выполним деление: $\dfrac{(x-13)^2}{x^2-169}:\dfrac{x^2}{13+x}=\dfrac{(x-13)^2}{(x-13)(x+13)}\cdot\dfrac{13+x}{x^2}=$ $=\dfrac{x-13}{x^2}$. При $x=-4$ получим: $\dfrac{x-13}{x^2}=\dfrac{-4-13}{16}=-\dfrac{17}{16}=$ $=-1\dfrac{1}{16}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{5a^2}{2a^2-4a+2}\cdot(a-1)^2$ при $a=-2\sqrt{3}$.	Выполним умножение: $\frac{5a^2}{2a^2-4a+2}\cdot(a-1)^2=\frac{5a^2}{2a^2-4a+2}\cdot\frac{(a-1)^2}{1}=$ $=\frac{5a^2\cdot(a-1)^2}{2(a^2-2a+1)}=\frac{5a^2\cdot(a-1)^2}{2(a-1)^2}=\frac{5a^2}{2}$. При $a=-2\sqrt{3}$ имеем: $\frac{5a^2}{2}=\frac{5\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)^2}{2}=\frac{5\cdot12}{2}=30.$

1. Верно ли, что при умножении дроби $\frac{x}{3}$ на дробь $\frac{9}{x^2}$ получится:

а) $\frac{27}{x^3}$; б) $\frac{x^3}{27}$; в) $\frac{3}{x}$?

2. Верно ли, что при делении дроби $\frac{a}{3}$ на дробь $\frac{a^2}{9}$ получится:

а) $\frac{a}{3}$; б) $\frac{27}{a^3}$; в) $\frac{3}{a}$?

3. Какая из дробей: $\frac{b}{c^2}$, $\frac{(a-b)^2}{b}$ — является результатом умножения, а какая — результатом деления дробей $\frac{a-b}{c}$ и $\frac{(a-b)c}{b}$?

1.165. Выполните умножение рациональных дробей, применив алгоритм:

а) $\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{y}$; б) $\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{5}$; в) $\frac{2}{m}\cdot\frac{3}{m}$;

г) $\frac{3y}{z}\cdot\frac{y^2}{z}$; д) $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}$; е) $\frac{a-b}{x}\cdot\frac{a-b}{3x}$;

ж) $\frac{7a}{b-2}\cdot\frac{1}{(b-2)^2}$; з) $\frac{1}{(x-5)^2}\cdot\frac{2}{(x-5)^3}$.

1.166. Возведите в степень рациональную дробь:

а) $\left(\frac{a}{b^3}\right)^2$; б) $\left(\frac{5}{mn^2}\right)^3$; в) $\left(\frac{2x^2y^3}{m^4n}\right)^5$; г) $\left(\frac{ab}{3c^4}\right)^4$;

д) $\left(\frac{10a}{a-1}\right)^5$; е) $\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^6$; ж) $\left(\frac{x-y}{2x+3y}\right)^7$; з) $\left(\frac{c^3+3}{c^2-3}\right)^5$.

1.167. Найдите частное рациональных дробей:

а) $\frac{a}{4}:\frac{7}{b}$; б) $\frac{x}{6}:\frac{7}{x}$; в) $\frac{5}{c}:\frac{c}{2}$;

г) $\frac{b}{a}:\frac{a}{b^2}$; д) $\frac{y^2}{x}:\frac{1}{y}$; е) $\frac{c-d}{4}:\frac{3}{c-d}$;

ж) $\frac{x+1}{y}:\frac{1}{(x+1)^2}$; з) $\frac{1}{(m-3)^2}:\frac{(m-3)^5}{7}$.

1.168. Выполните умножение рациональных дробей:

а) $\frac{5x}{y} \cdot \frac{y}{15x}$; б) $\frac{12a}{b^2} \cdot \frac{b^2c}{4a}$; в) $\frac{b}{cd} \cdot \frac{d^4}{7b}$;

г) $\frac{m}{nk} \cdot \frac{n}{2mk}$; д) $\frac{x^3y}{6z} \cdot \frac{18z}{xy^3}$; е) $\frac{b^5c^2}{12mn} \cdot \frac{9m^2}{b^3c^2}$.

1.169. Найдите частное рациональных дробей:

а) $\frac{4m^2}{n} : \frac{m}{n}$; б) $\frac{a}{3b} : \frac{a}{b^2}$; в) $\frac{x^3}{y^2} : \frac{x^2}{y}$;

г) $\frac{9x}{14y} : \frac{5x^2}{28y^2}$; д) $\frac{5a^2b}{3cd^2} : \frac{15a^3}{cd}$; е) $\frac{3x^4y^2}{ab} : \frac{x^2y^2}{18a^3}$.

1.170. Представьте степень в виде рациональной дроби:

а) $\left(-\frac{5x^2}{y}\right)^2$; б) $\left(-\frac{3a}{2b^4c}\right)^3$; в) $\left(-\frac{2}{x^6y}\right)^4$; г) $\left(-\frac{l^2n^4}{k^3}\right)^5$.

1.171. Выполните умножение рациональных дробей:

а) $\frac{c^2+2dc}{d} \cdot \frac{d}{c}$; б) $\frac{3}{b^2} \cdot \frac{ab-3b}{3a}$; в) $\frac{m+n}{m} \cdot \frac{5m}{m+n}$;

г) $\frac{2y}{x^2+x} \cdot \frac{x+1}{10xy}$; д) $\frac{b^3}{c-d} \cdot \frac{5d-5c}{b^4}$; е) $\frac{x^2+xy}{y} \cdot \frac{1}{x+y}$.

1.172. Выполните деление рациональных дробей:

а) $\frac{x+y}{3x} : \frac{x+y}{3y}$; б) $\frac{ab-2b}{a} : \frac{a^2-2a}{b}$;

в) $\frac{m^2-mn}{m^2} : \frac{n-m}{n}$; г) $\frac{a-b}{a^4} : \frac{3a-3b}{a^2}$;

д) $\frac{b+c}{bc} : \frac{7b+7c}{5bc}$; е) $\frac{1}{m^2-3m} : \frac{m}{15-5m}$.

1.173. Выполните действия с рациональными дробями:

а) $\frac{x+4}{x^2-25} \cdot \frac{x+5}{x+4}$; б) $\frac{a-4}{a^2-3a} : \frac{a-4}{a^2-9}$;

в) $\frac{a+2}{b^2-ab} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+2a}$; г) $\frac{1}{a^2-2a} : \frac{2}{a^2-4}$;

д) $\frac{x^2-y^2}{3xy^2} \cdot \frac{6xy}{5y-5x}$; е) $\frac{m}{m^2-n^2} : \frac{1}{7m+7n}$;

ж) $\frac{5a-b}{4a+4b} \cdot \frac{(a+b)^2}{25a^2-b^2}$; з) $\frac{3c+9}{c^2-4} : \frac{(c+3)^2}{4-2c}$.

1.174. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a+2}{a} \cdot \frac{3a^2}{a^2-4}$ при $a = 1{,}9$;

б) $\frac{x^2-9}{y^2-y} : \frac{3x-9}{4y^2-4}$ при $x = 6{,}3$, $y = -\frac{1}{3}$.

1.175. Возведите в квадрат, куб и пятую степень выражение и запишите результат в виде рациональной дроби:

а) $\frac{1}{a^2b}$; б) $-\frac{2m^3}{m-n}$; в) $\frac{x^2+y^2}{10xy}$; г) $-\frac{c-d}{c+d}$.

1.176. Целым или дробным рациональным выражением является результат упрощения выражения:

а) $(3x-12)\cdot\frac{x^2}{x-4}$; б) $(3m-n):\frac{3m-n}{3m+n}$;

в) $\frac{c+1}{c^2-25d^2}\cdot(2c+10d)$; г) $\frac{9-4a^2}{3a}:(2a+3)$;

д) $(b^2-64c^2)\cdot\frac{bc}{8c-b}$; е) $\frac{2x+10y}{y}:(x^2-25y^2)$;

ж) $\frac{1}{m^2-25n^2}\cdot(15n-3m)$; з) $\frac{a^2-16}{5}:(a-4)^2$?

1.177. Выполните действия наиболее рациональным способом:

а) $\frac{m^2-m}{m^4+m^3}\cdot\frac{m^5+m^4}{(3m-3)^2}$; б) $\frac{n^7+n^5}{(2n-2)^2}:\frac{n^6+n^4}{9n^2-9n}$.

1.178. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(m+3)^2}{(2m-4)^2}:\frac{(2m+6)^2}{(2-m)^3}$ при $m=\sqrt{2}+2$;

б) $\frac{a+b}{(2a-2b)^4}\cdot\frac{(2a-2b)^5}{(3a+3b)^2}$ при $a=\sqrt{3}-2$, $b=4-\sqrt{3}$.

1.179. Выполните действия:

а) $\frac{a+6}{a-3}\cdot\frac{a-3}{a^2+12a+36}$; б) $\frac{2-a}{a^2}:\frac{a^2-4a+4}{2a}$;

в) $\frac{x+3}{x^2-6x+9}\cdot(x-3)$; г) $\frac{m^2+10m+25}{m-5}:(m^2-25)$;

д) $\frac{1}{c^2-8c+16}\cdot\frac{16-c^2}{c}$; е) $\frac{m^2-12m+36}{3m+21}:\frac{5m-30}{m^2-49}$;

ж) $\frac{2x+6y}{100y^2-x^2}\cdot\frac{x^2-20xy+100y^2}{7x+21y}$;

з) $\frac{4x^2-y^2}{2x^4+x^3}:\frac{4x^2+4xy+y^2}{12x^3+6x^2}$;

и) $\frac{4x^2-9y^2}{18y^2}\cdot\frac{24y}{4x^2+12xy+9y^2}$;

к) $\frac{5x-15}{2x}:(3x^2-18x+27)$.

1.180. Найдите значение выражения $\frac{x^2-2xy+y^2}{xy^2+y^3}:\frac{y^2-x^2}{y^3}$ при $x=2\sqrt{5}$, $y=\sqrt{5}$.

1.181. Представьте в виде степени рациональную дробь:

а) $\frac{25m^2n^6}{k^8}$; б) $\frac{x^3y^6}{(a+y)^9}$; в) $\frac{(m-n)^{25}}{m^{10}n^{15}}$; г) $\frac{(c+d)^8}{c^{16}(c-d)^{12}}$.

1.182. Представьте выражение в виде несократимой рациональной дроби:

а) $\frac{x^2-x}{x^2-3x+ax-3a}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1}$; б) $\frac{x^2-25}{x^2-4}:\frac{5x-x^2}{x^3+2x^2-4x-8}$.

1.183. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{x^2-9}\cdot\left(x^2-4x+3\right)$; б) $\frac{x^2+7x+10}{x}:\left(x^2+2x\right)$;

в) $\frac{2-m}{3m+2}\cdot\frac{9m^2-4}{2m^2-5m+2}$; г) $\frac{10b^2-9b+2}{25b^2-36}:\frac{5b-2}{5b+6}$;

д) $\frac{x^2+8x+15}{x^2+8x+12}\cdot\frac{x^2-36}{x^2-25}$; е) $\frac{a^2-8a+16}{4-a^2}:\frac{a^2-5a+4}{a^2-5a+6}$.

1.184*. Выполните действия:

а) $\frac{2xz^2}{3x-2x}\cdot\frac{9xy-4xy}{10x^4z^4}:\frac{3y+2y}{25x^3z^2}$; б) $\frac{3c^2x}{ax-bx}:\frac{6c^3x^5}{a^2x-b^2x}\cdot\frac{4cx^4}{a+b}$.

1.185*. Выполните деление и запишите частное в виде несократимой дроби: $\frac{ac+ay-cx-xy}{bx-5x-ab+5a}:\frac{cx+xy-ac-ay}{ab+6b-2a-12}$.

1.186*. Выполните умножение $\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{b^2-3ab+2a^2}{2a^2+ab-b^2}$.

1.187*. Выполните действия с рациональными дробями:

а) $\frac{x^2+xy}{6x-x^2+y^2-6y}\cdot\frac{x^2-y^2+36-12x}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{m+n}{m^2-5n+5m-n^2}:\frac{m^2+mn}{25-n^2-m^2-2mn}$.

1.188. Выполните умножение рациональных дробей, используя алгоритм:

а) $\frac{3}{b}\cdot\frac{4}{b}$; б) $\frac{5a^2}{b}\cdot\frac{a}{b}$; в) $\frac{1}{c^4}\cdot\frac{1}{c^2}$; г) $\frac{1}{y+2}\cdot\frac{5}{y+2}$.

1.189. Каким правилом можно воспользоваться для возведения в степень рациональной дроби? Возведите в степень рациональную дробь:

а) $\left(\frac{m^2}{n}\right)^4$; б) $\left(\frac{2}{x^2y}\right)^5$; в) $\left(\frac{10ab^2}{c^4d}\right)^3$;

г) $\left(\frac{a-b}{d}\right)^3$; д) $\left(\frac{x}{x^2-5}\right)^4$; е) $\left(\frac{3m+n}{m^2-7}\right)^6$.

1.190. Каким действием можно заменить деление рациональных дробей? Выполните деление рациональных дробей:

а) $\frac{n}{3} : \frac{5}{n}$; б) $\frac{x^2}{y} : \frac{y}{x^2}$; в) $\frac{a^3}{b} : \frac{1}{a}$; г) $\frac{1}{d+5} : \frac{d+5}{c}$.

1.191. Выполните действия с рациональными дробями:

а) $\frac{12a}{b} \cdot \frac{b}{3a}$; б) $\frac{x}{5y^3} : \frac{x}{y^2}$; в) $\frac{a^4b}{c^2} \cdot \frac{cd}{ab}$;

г) $\frac{3m}{16n^2} : \frac{7m^2}{12n}$; д) $\frac{7a^2b}{2c} \cdot \frac{ac^2}{14b}$; е) $\frac{5xy^3}{z} : \frac{x^2y^2}{15z^3}$.

1.192. Возведите в степень выражение:

а) $\left(-\frac{8a^3}{b}\right)^2$; б) $\left(-\frac{xy}{z^8}\right)^3$; в) $\left(-\frac{3c}{a^2b}\right)^4$; г) $\left(-\frac{2mn^2}{k^6}\right)^5$.

1.193. Выполните умножение рациональных дробей:

а) $\frac{a^2-3ab}{b} \cdot \frac{b}{a}$; б) $\frac{c}{3c-3d} \cdot \frac{c-d}{cd}$;

в) $\frac{x+5}{x} \cdot \frac{1}{x^2+5x}$; г) $\frac{5m-5n}{m^3} \cdot \frac{m^2}{2n-2m}$.

1.194. Выполните деление рациональных дробей:

а) $\frac{m-2n}{m} : \frac{m-2n}{n}$; б) $\frac{xy+3y}{x} : \frac{x^2+3x}{y^2}$;

в) $\frac{5b+c}{c^5} : \frac{10b^2+2bc}{c^3}$; г) $\frac{3}{a^2-6a} : \frac{1}{6a^2-a^3}$.

1.195. Выполните действия:

а) $\frac{a^2-36}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a+6}$; б) $\frac{m^2-n^2}{m^3} : \frac{5m-5n}{m^4}$;

в) $\frac{x^2+3x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{x+3}$; г) $\frac{3c}{c^2-d^2} : \frac{1}{2c-2d}$;

д) $\frac{a^2}{6-2a} \cdot \frac{a^2-9}{a}$; е) $\frac{(y-5)^2}{1-y} : \frac{2y-10}{y^2-1}$;

1.196. Найдите значение выражения $\frac{b^2-9}{b^2+b}:\frac{b^2-3b}{b+1}$ при $b=0{,}01$.

1.197. Возведите в квадрат, куб и четвертую степень выражение $-\frac{3a^2b}{a^2-b}$.

1.198. Приведите к рациональной дроби выражение:

а) $(a-7)\cdot\frac{a}{a-7}$; б) $(2x-y):\frac{4x-2y}{x+y}$;

в) $\frac{b-3}{9b^2-1}\cdot(3b-1)$; г) $\frac{m-1}{m}:(1-m^2)$;

д) $\frac{1}{a^2-4b^2}\cdot(10b-5a)$; е) $\frac{4c^2-1}{8}:(2c-1)^2$.

1.199. Выполните действия с рациональными дробями:

$$\frac{(2a-2)^2}{a^5+a^3}\cdot\frac{a^7+a^5}{a^2-1}.$$

1.200. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-6x+9}{2x+3}\cdot\frac{4x+6}{x-3}$; б) $\frac{9y^2-6y+1}{4y-2}:\frac{3y-1}{2y-1}$;

в) $\frac{n^2-4n+4}{n+1}\cdot\frac{n^2+n}{5n-10}$; г) $(x-1):\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

д) $\frac{a+7}{a-8}\cdot\frac{a^2-16a+64}{a^2-49}$; е) $\frac{y^2-10y+25}{y+3}:(5-y)^2$;

ж) $\frac{c-2d}{1-5d}\cdot\frac{5d^2-d}{c^2-4cd+4d^2}$; з) $\frac{x+5}{3x-1}:(2x^2+20x+50)$.

1.201. Представьте в виде степени рациональную дробь:

а) $\frac{49a^8}{b^2c^{10}}$; б) $\frac{(m-n)^6}{c^9d^{12}}$; в) $\frac{a^8b^{12}}{(a+b)^{16}}$.

1.202. Упростите выражение, результат запишите в виде несократимой дроби:

а) $\frac{3x^2-6x}{x^2+x-ax-a}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}$; б) $\frac{x^2-16}{x^2-a^2}:\frac{x^2+4x}{x^3-a^2x+x^2-a^2}$.

1.203. Выполните действия:

а) $\frac{3}{2a^2-5a-3}\cdot(a-3)$; б) $\frac{b-3}{4b^2-1}:\frac{6-2b}{2b^2+7b+3}$;

в) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1}$; г) $(4m^2-5m+1):\frac{m-1}{m}$.

1.204*. Представьте частное $\frac{x^2+ax+bx+ab}{x^2-ax+cx-ac}:\frac{x^2-a^2}{x^2-c^2}$ в виде несократимой рациональной дроби.

1.205*. Выполните умножение рациональных выражений:

$$\frac{a-b+c}{a^2-b^2+c^2+2ac}\cdot\left(a^2+ab-bc-c^2\right).$$

1.206. Определите порядок действий в выражении $\left(\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\cdot 0{,}15\right):0{,}3$ и найдите его значение.

1.207. График функции $f(x)=x^3$ проходит через точку, абсцисса которой равна 4. Чему равна ордината этой точки? Найдите значение выражения $f(-1)+f(0)-f(2)$.

1.208. Выполните действия:

а) $\left(5\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^5$; б) $\frac{4^7\cdot 64}{16^4}$.

1.209. Вычислите, используя свойства квадратных корней:

а) $\sqrt{50\cdot 44\cdot 550}$; б) $3\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{13}$.

1.210. Решите двойное неравенство $-1\leqslant 2-5x<3$.

1.211. В школьную библиотеку доставили упаковки с новыми учебниками. Число учебников в каждой упаковке на 15 меньше числа упаковок. Сколько учебников в одной упаковке, если всего доставлено 700 учебников?

§ 5. Преобразования рациональных выражений

1.212. Найдите значение выражения $4\frac{8}{11}\cdot\frac{6}{13}-1\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{26}$.

1.213. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(-3{,}47)^2}$; б) $\sqrt{y^2}$, если $y>0$.

1.214. Вычислите: $4^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}:(-2)^{15}$.

При решении многих задач требуется упрощать рациональные выражения, приводя их к рациональным дробям. Для этого выполняют преобразования рациональных выражений.

Чтобы преобразовать рациональное выражение, нужно:

① Установить порядок действий в выражении. ② Выполнить действия по порядку, используя правила сложения, вычитания, умножения и деления рациональных дробей.	Упростите выражение $\frac{m}{n} : \left(\frac{3m}{n} - \frac{m}{3n}\right).$ ① $\frac{m}{n} \overset{2)}{:} \left(\frac{3m}{n} \overset{1)}{-} \frac{m}{3n}\right).$ ② 1) $\frac{3m}{n} - \frac{m}{3n} = \frac{9m-m}{3n} = \frac{8m}{3n};$ 2) $\frac{m}{n} : \frac{8m}{3n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{3n}{8m} = \frac{3}{8}.$

Пример 1. Представьте выражение $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b}{a-b}$ в виде рациональной дроби.

Решение. ① Сначала необходимо выполнить вычитание выражений, стоящих в скобках, а затем выполнить умножение.

② 1) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ba} - \frac{b^2}{ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab};$

2) $\frac{(a-b)(a+b)}{ab} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)b}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{a}.$

Преобразование рационального выражения можно выполнять не по действиям, а «цепочкой». В данном случае получим:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b}{a-b} = \left(\frac{a^2}{ba} - \frac{b^2}{ab}\right) \cdot \frac{b}{a-b} =$$

$$= \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right) \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)b}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{a}.$$

Пример 2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2-4x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2}\right) \text{ при } x = \frac{1}{8}.$$

Решение. Упростим выражение, выполнив действия по порядку:

1) $\frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2-4x^2} = \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} + \frac{3y}{4x^2-y^2} =$

$= \frac{2(2x-y)-(2x+y)+3y}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{4x-2y-2x-y+3y}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{2x}{(2x-y)(2x-y)};$

2) $\frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2} = \frac{y^2-4x^2}{8x^2} = -\frac{4x^2-y^2}{8x^2} = -\frac{(2x-y)(2x+y)}{8x^2};$

3) $\frac{2x}{(2x-y)(2x-y)} \cdot \left(-\frac{(2x-y)(2x+y)}{8x^2}\right) = -\frac{1}{4x}.$

При $x = \frac{1}{8}$ получим: $-\frac{1}{4x} = -\frac{8}{4} = -2.$

Преобразования рациональных выражений можно выполнять наряду с другими, ранее изученными преобразованиями.

Пример 3. Упростите выражение $\left(a^{-1} + a^{-2}\right) : \frac{a^2 - 1}{a} - \frac{1}{a - 1}$, приведя его к рациональной дроби.

Решение. 1) $a^{-1} + a^{-2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{a + 1}{a^2}$;

2) $\frac{a + 1}{a^2} : \frac{a^2 - 1}{a} = \frac{a + 1}{a^2} \cdot \frac{a}{a^2 - 1} = \frac{(a + 1) \cdot a}{a^2(a - 1)(a + 1)} = \frac{1}{a(a - 1)}$;

3) $\frac{1}{a(a - 1)} - \frac{1}{a - 1} = \frac{1}{a(a - 1)} - \frac{1 \cdot a}{(a - 1)a} = \frac{1 - a}{(a - 1)a} = -\frac{a - 1}{(a - 1)a} = -\frac{1}{a}.$

Правила преобразования рациональных выражений можно использовать и для преобразования выражений, содержащих корни.

Пример 4. Сократите дробь:

а) $\frac{x - 3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}$; б) $\frac{3\sqrt{a} - a}{a - 9}$; в) $\frac{b - 2\sqrt{b} + 1}{\sqrt{b} - b}$.

Решение. а) $\frac{x - 3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\right)}{5\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 3}{5}$;

б) $\frac{3\sqrt{a} - a}{a - 9} = \frac{3\sqrt{a} - \left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2 - 9} = \frac{\sqrt{a}\left(3 - \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a} - 3\right)\left(\sqrt{a} + 3\right)} = -\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - 3\right)}{\left(\sqrt{a} - 3\right)\left(\sqrt{a} + 3\right)} =$

$= -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3}$;

в) $\frac{b - 2\sqrt{b} + 1}{\sqrt{b} - b} = \frac{\left(\sqrt{b} - 1\right)^2}{\sqrt{b}\left(1 - \sqrt{b}\right)} = \frac{\left(1 - \sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{b}\left(1 - \sqrt{b}\right)} = \frac{1 - \sqrt{b}}{\sqrt{b}}.$

Пример 5. Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

Решение. 1) $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} - \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)} =$

$= \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 - \left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1} = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 - x + 2\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{4\sqrt{x}}{x - 1}$;

2) $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1}{\sqrt{x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$;

3) $\frac{4\sqrt{x}}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x}} = 4.$

Преобразования рациональных выражений	
1. Представьте выражение $$\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{a-b}$$ в виде дроби.	1) $1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{b^2}-\frac{2ab}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}=$ $=\frac{b^2-2ab+a^2}{b^2}=\frac{(a-b)^2}{b^2}$; 2) $\frac{(a-b)^2}{b^2}\cdot\frac{b}{a-b}=$ $=\frac{(a-b)^2\cdot b}{b^2\cdot(a-b)}=\frac{a-b}{b}$.
2. Найдите значение выражения $$\left(a+1+\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2}{1-2a+a^2}$$ при $a=-2{,}13$.	Преобразуем данное выражение «цепочкой»: $\left(a+1+\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2}{1-2a+a^2}=$ $=\frac{(a+1)(a-1)+1}{a-1}:\frac{a^2}{(a-1)^2}=$ $=\frac{a^2-1+1}{a-1}\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2}=$ $=\frac{a^2\cdot(a-1)^2}{(a-1)\cdot a^2}=a-1$. При $a=-2{,}13$ получим: $a-1=-2{,}13-1=-3{,}13$.
3. Упростите выражение $$\left(\frac{a-4}{a^2-2a+1}-\frac{a+2}{a^2+a-2}\right):\frac{1}{(2a-2)^2}.$$	1) Корнями квадратного трехчлена a^2+a-2 являются числа $a_1=-2$, $a_2=1$, значит, $a^2+a-2=$ $=(a+2)(a-1)$, тогда: $\frac{a-4}{a^2-2a+1}-\frac{a+2}{a^2+a-2}=$ $=\frac{a-4}{(a-1)^2}-\frac{a+2}{(a+2)(a-1)}=$ $=\frac{a-4}{(a-1)^2}-\frac{1}{a-1}=\frac{a-4-(a-1)}{(a-1)^2}=$ $=\frac{-3}{(a-1)^2}$; 2) $\frac{-3}{(a-1)^2}:\frac{1}{(2a-2)^2}=$ $=\frac{-3}{(a-1)^2}\cdot\frac{(2a-2)^2}{1}=$ $=\frac{-3(2a-2)^2}{(a-1)^2}=\frac{-3\cdot4(a-1)^2}{(a-1)^2}=-12$.

4. Докажите, что значение выражения $\left(\frac{4y}{x^2-3xy}-\frac{x}{xy-3y^2}\right):\frac{x^2-4y^2}{3xy^2-x^2y}$ не зависит от значений переменных.	Значение выражения при различных значениях переменных из области его определения можно найти, предварительно упростив его: 1) $\frac{4y}{x^2-3xy}-\frac{x}{xy-3y^2}=$ $=\frac{4y}{x(x-3y)}-\frac{x}{y(x-3y)}=$ $=\frac{4y^2-x^2}{xy(x-3y)}$; 2) $\frac{4y^2-x^2}{xy(x-3y)}:\frac{x^2-4y^2}{3xy^2-x^2y}=$ $=\frac{4y^2-x^2}{xy(x-3y)}\cdot\frac{xy(3y-x)}{x^2-4y^2}=$ $=\frac{\left(4y^2-x^2\right)\cdot xy(3y-x)}{xy(x-3y)\cdot\left(x^2-4y^2\right)}=$ $=\frac{xy\left(x^2-4y^2\right)(x-3y)}{xy(x-3y)\left(x^2-4y^2\right)}=1.$ Получили, что результат упрощения равен числу 1, значит, при любых значениях переменных из области определения значение данного выражения равно 1, т. е. не зависит от значений переменных.
5*. Упростите выражение $\frac{a-\frac{4a-4}{a}}{\frac{2}{a}-1}$.	Запишем дробь в виде частного и получим: $\frac{a-\frac{4a-4}{a}}{\frac{2}{a}-1}=$ $=\left(a-\frac{4a-4}{a}\right):\left(\frac{2}{a}-1\right)=$ $=\frac{a^2-4a+4}{a}:\frac{2-a}{a}=$ $=\frac{(2-a)^2\cdot a}{a\cdot(2-a)}=2-a.$
6. Упростите выражение $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-2}-1$, приведя его к несократимой дроби.	1) $a^{-2}-b^{-2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$; 2) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-2}=\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-2}=$

	$= \left(\frac{ab}{b-a}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(b-a)^2}$; 3) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2} \cdot \frac{a^2b^2}{(b-a)^2} =$ $= \frac{(b-a)(b+a)\cdot a^2b^2}{a^2b^2\cdot(b-a)^2} = \frac{b+a}{b-a}$; 4) $\frac{b+a}{b-a} - 1 = \frac{b+a}{b-a} - \frac{b-a}{b-a} =$ $= \frac{b+a-b+a}{b-a} = \frac{2a}{b-a}$.
7. Применните к выражению алгоритм сокращения рациональной дроби: а) $\frac{5\sqrt{b}+b\sqrt{5}}{\sqrt{b}+\sqrt{5}}$; б) $\frac{m-2\sqrt{3m}+3}{3-m}$.	а) $\frac{5\sqrt{b}+b\sqrt{5}}{\sqrt{b}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5b}\left(\sqrt{5}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}+\sqrt{5}} =$ $=\sqrt{5b}$; б) $\frac{m-2\sqrt{3m}+3}{3-m} =$ $= \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{m}\right)^2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{m}\right)} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{m}}{\sqrt{3}+\sqrt{m}}$.
8. Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right) \cdot \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a+b}$.	1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} =$ $= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} =$ $= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} =$ $= \frac{a-2\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} =$ $= \frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$; 2) $\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} \cdot \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a+b} =$ $= \frac{(a+b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot(a+b)} =$ $= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

<table>
<tr>
<td>

9. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

при $x = 0{,}6,\ y = 0{,}006.$

</td>
<td>

Упростим данное выражение:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

При $x = 0{,}6$ и $y = 0{,}006$ получим:

$$2\sqrt{\frac{x}{y}}=2\sqrt{\frac{0{,}6}{0{,}006}}=2\sqrt{100}=20.$$

</td>
</tr>
</table>

Результат преобразования дробного рационального выражения может быть: а) целым рациональным выражением; б) дробным рациональным выражением; в) рациональной дробью; г) рациональным числом; д) иррациональным числом. Выберите правильные ответы. Приведите примеры.

1.215. Установите порядок действий и преобразуйте выражение:

а) $\left(\frac{x}{5}-\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{9}{x^2}$;

б) $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right):\frac{2n-m}{3mn}$;

в) $\frac{x+y}{y^2}\cdot\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)$;

г) $\left(1-\frac{m}{n}\right):\left(1+\frac{m}{n}\right)$.

1.216. Упростите рациональное выражение:

а) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{ab}{(a-b)^2}$;

б) $\left(\frac{9x}{y}-\frac{y}{x}\right):\frac{(3x+y)^2}{2xy}$;

в) $\frac{3mn}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$;

г) $\frac{2c-d}{cd}:\left(\frac{4c}{d^2}-\frac{1}{c}\right)$;

д) $\left(\frac{16b}{a}-\frac{a}{4b}\right)\cdot\frac{1}{a-8b}$;

е) $\left(36m^2-n^2\right):\left(\frac{1}{2m}+\frac{3}{n}\right)$;

ж) $\frac{1}{x}-\frac{x-5}{x}:(x-5)^2$;

з) $(c-4)\cdot\frac{1}{16-c^2}+\frac{3}{c}$.

1.217. Упростите выражение $\frac{3ab}{9b^2-a^2}\cdot\left(\frac{1}{3b}-\frac{1}{a}\right)$ и найдите его значение при $a=8\frac{1}{7}$, $b=1\frac{2}{7}$.

1.218. Выполните действия:

а) $\left(\frac{40}{a-6}+a+6\right)\cdot\frac{a^2-12a+36}{a^2+4}$; б) $\left(x-\frac{x^2+1}{x+1}\right):\frac{1-x}{x^2+2x+1}$;

в) $\frac{1}{c^2+6c+9}\cdot\frac{c^2-9}{c}-\frac{c-9}{c^2-9}$; г) $\frac{5}{m-2}-\frac{m+2}{m^2-2m+1}:\frac{m^2-4}{5m-5}$.

1.219. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{5b}{4b+2}-\frac{b}{2-4b}\right):\frac{9b^2-3b}{1-4b+4b^2} \text{ при } b=4{,}5.$$

1.220. Докажите тождество $\left(\frac{1}{1-2n}-2n-1\right):\left(\frac{4n^2}{2n-1}-2n\right)=-2n$.

1.221. Упростите выражение:

а) $\frac{c+24}{c-5}-\frac{c}{c+5}\cdot\frac{c^2-25}{c}-\frac{6c-1}{c-5}$;

б) $\frac{2y^2-y-1}{y^2-1}+\frac{y}{y^2-1}:\frac{y}{1-y}-\frac{y-1}{y+1}$.

1.222. Преобразуйте рациональное выражение:

а) $\left(\frac{1}{2a-4}-\frac{4}{a^2-4}-\frac{1}{a+2}\right)\cdot\left(a^2-4a+4\right)$;

б) $\left(\frac{2b}{b-5}+\frac{b}{b^2-10b+25}\right):\frac{2b-9}{b^2-25}-\frac{5b+25}{b-5}$;

в) $\frac{4xy}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

г) $\frac{12}{m^2-9}+\frac{6m}{9-6m+m^2}\cdot\left(\frac{3}{m^2+3m}-\frac{m}{3m+9}\right)$.

1.223. Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\left(\frac{b^2}{ab-a^2}+\frac{a}{a-b}\right):\frac{a+b}{a}$; б) $\left(\frac{1}{y+2}-\frac{4}{4-y^2}\right)\cdot\left(y^2-2y\right)-y$;

в) $\frac{9a^2-16b^2}{7a}\cdot\left(\frac{3b-4a}{4b^2-3ab}-\frac{3b+4a}{4b^2+3ab}\right)$;

г) $\left(m^2-2m+1\right)\cdot\left(\frac{1}{(1-m)^2}-\frac{1}{1-m^2}\right)+\frac{m+3}{m+1}$.

1.224. Упростите дробное рациональное выражение, применив законы арифметических действий:

а) $\frac{4y^2-9}{2y^2-7y+3}:\frac{3+2y}{1-2y}+\frac{9-4y}{3-y}$;

б) $\left(\frac{3x-x^2}{x^2-6x+9}+\frac{2x}{2x+5}\right)\cdot\left(2x^2-x-15\right)$;

в) $\left(\frac{a}{a^2-6a+9}-\frac{a+2}{a^2-a-6}\right)\cdot(2a-6)^2$;

г) $\left(\frac{p}{3p^2+p-2}+\frac{8}{9p^2-4}\right):\frac{3p+4}{9p^2-4}-\frac{1}{p+1}$.

1.225. Используйте свойства степени с целым показателем и выполните действия:

а) $\left(b^{-2}-a^{-2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}$;

б) $\left(a^{-2}+2(ab)^{-1}+b^{-2}\right)\cdot(a+b)^{-1}$;

в) $\left(a^{-1}-(a-b)^{-1}\right)\cdot\left(\frac{b}{a-b}\right)^{-2}-1$;

г) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right)^{-1}$.

1.226. Какое правило можно применить для сокращения дроби:

а) $\frac{2\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}}$; б) $\frac{2\sqrt{x}-x}{x-4}$;

в) $\frac{m-6\sqrt{m}+9}{3\sqrt{m}-m}$; г) $\frac{b-2\sqrt{5b}+5}{5-b}$?

Выполните сокращение в соответствии с правилом.

1.227. Выполните вычитание

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x+4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}},$$

предварительно сократив дроби.

1.228. Выполните действия:

а) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\frac{10\sqrt{m}}{n-m}+\frac{5}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$; г) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-1}-\frac{\sqrt{b}}{b-1}$.

1.229. Установите порядок действий и упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{xy}-\dfrac{xy}{x+\sqrt{xy}}\right):\dfrac{x^2y}{x-y}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{m}-2}{\sqrt{m}+2}+\dfrac{8\sqrt{m}}{m-4}\right):\dfrac{\sqrt{m}+2}{m-2\sqrt{m}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{y-1}{2}$;

г) $\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-2\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)$.

1.230. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+a}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

не зависит от значений переменной.

1.231. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ при } x=7{,}25.$$

1.232*. Представьте выражение в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{6x-9}{x}-x}$; б) $\dfrac{a-\dfrac{bc}{b-c}}{b-\dfrac{ac}{a-c}}$; в) $\dfrac{a-3+\dfrac{2}{a}}{a+\dfrac{1}{a}-2}$.

1.233*. Упростите дробное рациональное выражение

$$\left(\frac{y}{xy-x^2}+\frac{x}{xy-y^2}\right):\frac{x^2+2xy+y^2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$$

и найдите его значение при $x=-\dfrac{1}{7}$; $y=\dfrac{1}{3}$.

1.234*. Преобразуйте рациональное выражение

$$\left(\frac{y^2-xy}{xy^2+x^3}-\frac{2y^2}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}\right)\cdot\left(1-\frac{x-1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{xy}{y+1}.$$

1.235*. Установите порядок действий и упростите выражение:

а) $\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right):\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{1+2x+x^2}\right)^{-1}$; б) $\dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{1-\left(\dfrac{1-x}{2x}\right)^{-1}}$.

1.236*. Преобразуйте рациональное выражение к несократимой дроби:

а) $\frac{x^2+2x}{4x^2-1}\cdot\left(\frac{1}{x+2}:x-\left(\frac{x^2}{x+2}-x+2\right)\right)$;

б) $\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{ab+b^2}+\frac{b}{a^2+ab}\right)\right):\frac{b^2}{a^2-b^2}$.

1.237*. Наиболее рациональным способом найдите, при каком значении переменной a значение выражения

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)\cdot\frac{a}{x^4+x^2a^2-a^4}\text{ равно }-\frac{1}{125}.$$

1.238*. Упростите выражение $\frac{1}{a-\frac{3}{b+\frac{1}{c}}}\cdot\frac{3}{c+\frac{1}{b}}-\frac{3b}{abc+a-3c}$.

1.239*. Докажите, что значение выражения

$$\left(\left(\left(\frac{a-4}{a}-a+3\right)\left(\frac{1}{a+2}-\frac{a+2}{a^2-4a+4}\right)\right)^{-1}-\frac{a}{8}\right)^{-1}$$

не зависит от значений переменной.

1.240*. Разложите числитель дроби на множители и сократите дробь $\frac{x+\sqrt{x}+y-\sqrt{y}-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

1.241. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

а) $\frac{21}{m^2}\cdot\left(\frac{m}{7}+\frac{m}{2}\right)$; б) $\left(\frac{3}{a+b}-\frac{2}{a-b}\right):\frac{a-5b}{a-b}$.

1.242. Установите порядок действий и упростите выражение:

а) $\left(\frac{x}{y}-\frac{4y}{x}\right)\cdot\frac{xy}{(x+2y)^2}$; б) $\frac{m-3n}{mn}:\left(\frac{m}{n^2}-\frac{9}{m}\right)$;

в) $\left(\frac{8b}{a}-\frac{a}{2b}\right):(a+4b)$; г) $\frac{7}{b^2-4}\cdot(b-2)^2-\frac{14}{b+2}$.

1.243. Выполните преобразование рационального выражения:

а) $\left(a-\frac{1+a^2}{a-1}\right):\frac{a^2+2a+1}{a-1}$;

б) $\left(\dfrac{21}{m+4}+m-4\right)\cdot\dfrac{m^2+8m+16}{m^2+5}$;

в) $\dfrac{x+6}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-4}:\dfrac{x}{x^2+4x+4}$.

1.244. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{1}{1-a}-a\right):\dfrac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$ при $a=-8{,}1$.

1.245. Докажите тождество

$$\left(\frac{36}{6-a}-a-6\right):\frac{a^2}{a^2-12a+36}=6-a.$$

1.246. Определите порядок действий и упростите рациональное выражение $\dfrac{5x+21}{9-x^2}+\dfrac{5}{x^2-9}:\dfrac{5}{3-x}-\dfrac{x+3}{3-x}$.

1.247. Выполните преобразование рационального выражения:

а) $\left(\dfrac{1}{4c-16}-\dfrac{4}{c^2-16}-\dfrac{1}{2c+8}\right)\cdot\left(c^2-8c+16\right)$;

б) $\left(\dfrac{5a}{a+1}-\dfrac{3a}{a^2+2a+1}\right):\dfrac{5a+2}{a^2-1}+\dfrac{a-1}{a+1}$.

Целым или дробным выражением получился результат преобразований?

1.248. Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\left(a-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{a-b}\right)$; б) $\left(\dfrac{m+n}{m-n}-\dfrac{m-n}{m+n}\right):\dfrac{4mn}{n^2-m^2}$.

1.249. Упростите выражение:

а) $\dfrac{9y^2-4}{2y^2-5y+2}\cdot\dfrac{2-y}{3y+2}+\dfrac{y}{1-2y}$;

б) $\dfrac{21}{4y+6}+\dfrac{y^2-25}{y+2}\cdot\left(\dfrac{6}{25-y^2}+\dfrac{y}{2y^2-7y-15}\right)$.

1.250. Примените свойства степени с целым показателем и выполните действия:

а) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)^{-1}$; б) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}:\left(\dfrac{1}{y^{-1}}-\dfrac{1}{x^{-1}}\right)^{-1}$.

1.251. Представьте выражение в виде рациональной дроби

$$\left(\frac{2xy}{4x^2-9y^2}+\frac{y}{3y-2x}\right)\cdot\left(1-\frac{2x-3y}{2x+3y}\right)^{-1}.$$

1.252. Сократите дробь, используя алгоритм:

а) $\dfrac{b-5\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{c+5\sqrt{c}}{c-25}$;

в) $\dfrac{a+8\sqrt{a}+16}{a+4\sqrt{a}}$; г) $\dfrac{x+2\sqrt{7x}+7}{x-7}$.

1.253. Выполните сложение $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{4a-b}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, предварительно сократив дроби.

1.254. Выполните действия, используя алгоритм сложения дробей:

а) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$; б) $\dfrac{6\sqrt{a}}{a-b}-\dfrac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

1.255. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{ab}+\dfrac{ab}{a-\sqrt{ab}}\right):\dfrac{a^2b}{a-b}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2}$;

в) $\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-2\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{4\sqrt{a}}{a-1}\right):\dfrac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}}$.

1.256. Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{a^2+ab}{a-b}=\frac{1}{a}.$$

1.257*. Представьте выражение в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{1-\dfrac{4}{m}}{\dfrac{8m-16}{m}-m}$; б) $\dfrac{t-2+\dfrac{1}{t}}{t+\dfrac{3}{t}-4}$.

1.258. Запишите число $3{,}27\cdot10^{-4}$ в виде десятичной дроби.

1.259. График функции $y=x^2-2x$ проходит через точку, ордината которой равна 15. Чему равна абсцисса этой точки? Сколько решений имеет задача?

1.260. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x+2}{2}\leqslant\dfrac{x+2}{6},\\ \dfrac{x}{2}+x\geqslant\dfrac{3x}{4}-\dfrac{x-7}{8}.\end{cases}$

1.261. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

1.262. Решите уравнение $0{,}4\left(1{,}5x-\frac{1}{3}\right)=0{,}6x-0{,}1$.

1.263. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{5-x}$; б) $\sqrt{x^2-x-2}$.

1.264. Известно, что число девочек в классе относится к числу мальчиков как $2:1$. Выберите все верные утверждения:

а) девочек в классе в три раза больше, чем мальчиков;

б) число мальчиков составляет $\frac{1}{3}$ числа учеников класса;

в) в классе мальчиков больше, чем девочек;

г) мальчиков в классе в два раза меньше, чем девочек;

д) число девочек составляет 50 % от числа учеников класса.

1.265. В 9.00 из города A в город B выехал автобус со скоростью 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а через 40 мин по тому же маршруту выехал легковой автомобиль со скоростью 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Верно ли, что легковой автомобиль догонит автобус еще до полудня?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определения целого рационального выражения, дробного рационального выражения, рациональной дроби;
- знать основное свойство дроби, определение понятия «сокращение дроби»;
- уметь сокращать рациональные дроби;
- уметь применять основное свойство рациональной дроби для приведения дробей к новому знаменателю;
- уметь применять алгоритмы сложения и вычитания рациональных дробей для преобразования рациональных выражений;
- уметь применять алгоритм умножения рациональных дробей для преобразования рациональных выражений;
- уметь выполнять действие возведения в степень рациональной дроби;

• уметь выполнять действие деления рациональных дробей и применять правила деления рациональных дробей для упрощения вычислений;

• уметь выполнять задания на действия с рациональными дробями;

• уметь применять правила и алгоритмы преобразования рациональных выражений для упрощения вычислений.

Я проверяю свои знания

1. Из выражений $\frac{3}{8m+n}$; $\frac{3a}{8b^3}$; $\frac{a}{b}+14$; $\frac{x^2-x+7}{3x}$; $3{,}6x^2y$; $\frac{a+1}{a-7}$; $2x-\frac{y^4}{5}$; $2\sqrt{cd}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{a^2+ac}{5}$ выберите:

а) целые рациональные выражения;

б) дробные рациональные выражения.

2. Выберите все верные равенства:

а) $\frac{2a+b}{2c}=\frac{a+b}{c}$; б) $\frac{(a-b)^2}{b-a}=\frac{-(b-a)^2}{b-a}$;

в) $\frac{1}{b}\cdot a^2=\frac{a^2}{b}$; г) $\frac{5a+5b}{a+b}=4a+4b$;

д) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b-a}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-b}$; е) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b}=2a-2b$.

3. Найдите область определения рациональной дроби $\frac{x^2-2x}{x+1}$ и вычислите значение данной дроби при $x=9$.

4. Приведите дробь $\frac{a}{x-3}$ к знаменателю:

а) $3-x$; б) x^2-3x; в) x^2-9; г) x^2-6x+9.

5. Сократите рациональную дробь:

а) $\frac{18m^2n}{24mn^2}$; б) $\frac{p^2-25q^2}{10q-2p}$; в) $\frac{3y^2+24y}{y^2+16y+64}$;

г) $\frac{a^2-6a+9}{9-a^2}$; д) $\frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$; е) $\frac{2x-3}{2x^2-x-3}$.

Какие способы разложения многочленов на множители вы использовали?

6. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{2c}{c-1}+\frac{1-c}{c-1}$; б) $\frac{2a+1}{a-1}-\frac{2-a}{1-a}$;

в) $\frac{2m-1}{(m-1)^2}-\frac{3-2m}{(1-m)^2}$; г) $5x^2-\frac{15x^2-1}{3}$;

д) $\frac{5b}{b^2-1}-\frac{5}{b+1}$; е) $\frac{c^2}{c^2-4c+4}+\frac{c}{2-c}$;

ж) $\frac{x+7}{xy-9y+5x-45}-\frac{1}{y+5}$; з) $\frac{d^2}{d^2-5d+4}-\frac{1-d}{4-d}$.

7. Каким правилом нужно воспользоваться, чтобы выполнить умножение рациональных дробей; деление рациональных дробей; возведение рациональной дроби в степень? Примените эти правила и выполните действия:

а) $\frac{a^6b^3}{15xy}\cdot\frac{12x^2}{a^4b^3}$; б) $\frac{x^4}{x-y}:\frac{x^3}{2x-2y}$;

в) $\left(\frac{a^3b^2}{2c}\right)^5\cdot 16c^4$; г) $\left(\frac{3x^2}{y^3z}\right)^2:\frac{27x^3}{y^5z^2}$;

д) $\frac{c^2-1}{c^3+2c^2}\cdot\frac{c^4+2c^3}{(2c-2)^2}$; е) $\left(a^2+9-6a\right):\frac{(3-a)^2}{3a+1}$;

ж) $\frac{a^2-1}{4a+8b}\cdot\frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$; з) $\frac{m^2+2m}{m^2-3x+mx-3m}:\frac{m^2-4}{m^2-5m+6}$.

8. Определите порядок действий и упростите рациональное выражение:

а) $\left(\frac{5}{x-2}-x-2\right)\cdot\frac{2-x}{x^2-6x+9}$;

б) $\left(\frac{a^2}{a+5}-\frac{a^3}{a^2+10a+25}\right):\left(\frac{a}{a+5}-\frac{a^2}{a^2-25}\right)$;

в) $\left(\frac{a+b}{a^2-ab}-\frac{2b}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{b^2-a^2}{1+\frac{b^2}{a^2}}$;

г) $\left(\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x^2-5x+6}+\frac{2x}{x-2}\right):\frac{2x+1}{3}-\frac{x-12}{9-3x}$.

9. Докажите тождество $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(x+y)^2}+\frac{2x^{-1}+2y^{-1}}{(x+y)^3}=x^{-2}y^{-2}$.

10. Постройте график функции:

а) $f(x)=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x^2+3x}{x}$;

б) $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4x}{x-1}$;

в) $f(x)=\frac{12x+12}{x^2+x}$.

Практическая математика

1. В некоторых странах мира для измерения температуры пользуются шкалой Фаренгейта. Для перевода температуры из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта пользуются формулой $F = 1{,}8C + 32$, где C — температура по Цельсию, а F — температура по Фаренгейту. Выведите формулу, с помощью которой можно перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия. Нужно ли волноваться, если у ребенка температура 100 °F? При какой температуре число градусов по Цельсию и по Фаренгейту одинаково?

2. Торговая сеть приобрела партию обуви общей стоимостью 180 тыс. р. Первую неделю в магазинах сети обувь продавалась с 25 %-й наценкой. Затем наценка была снижена до 16 %. В итоге вся партия обуви была продана на 20 % дороже, чем куплена. На какую сумму было продано обуви в первую неделю?

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание.

Верно ли, что $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$? Представьте в виде дроби выражение

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)}.$$

Обобщите результат и придумайте аналогичное задание для друзей.

Готовимся к олимпиадам

1. Докажите, что

если $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-a}{a+b} = 1$, то $\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} = 4$.

2. Трехзначное число разложили на целые множители. После этого некоторые множители увеличили не более чем на 10 %, так, чтобы снова получилось целое число. На какое наибольшее число процентов могло увеличиться произведение?

3. Сократите дробь $\frac{x^3 + 2x^2 - 16x - 32}{(x-1)^5 + (1-x)^5 + (x-1)^2 - 9}$.

ФУНКЦИИ

§ 6. Функция числового аргумента. Область определения, множество значений. Способы задания функции

2.1. Выберите точки, через которые проходит график функции $f(x) = x^2 - 4x$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(-1;\ 3)$; в) $C(5;\ 5)$.

2.2. Верно ли, что точка $M(2;\ 9)$ принадлежит графику функции:

а) $f(x) = 2x + 5$; б) $g(x) = \frac{9}{x}$; в) $h(x) = 2x^2 + 1$?

2.3. Постройте график функции:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $g(x) = 1 - x^2$.

Вам известно, что зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению одной переменной соответствует единственное значение другой переменной, **называется функциональной зависимостью или функцией**. Уточним определение функции.

Говорят, что **задана функция** $y = f(x)$, если заданы:

- числовое множество X;
- правило (закон, зависимость) f, по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственное число y.

Множество X называют **областью определения функции** $y = f(x)$ и обозначают $D(f)$.

Значения переменной x называют значениями аргумента, а значения переменной y — значениями функции.

Множество $X = D(f)$ — это множество всех значений аргумента. Множество X может быть числовым промежутком, объединением нескольких промежутков, конечным или бесконечным множеством чисел.

Множество всех значений, которые принимает функция $y = f(x)$, называют **множеством значений функции** и обозначают $E(f)$.

Функция $y = f(x)$
x — аргумент
$D(f)$ — область определения
$E(f)$ — множество значений

Чтобы задать функцию, нужно:

① Указать область определения функции.

② Указать правило, с помощью которого по значению аргумента x можно найти соответствующее значение функции y.

Например, рассмотрим функции $f(x) = x^2$, если $D(f) = \boldsymbol{R}$, и $g(x) = x^2$, если $D(g) = [0; +\infty)$.

Зависимость между переменными в этих функциях определяется одним и тем же правилом: значение аргумента возводится в квадрат, и получается значение функции. Но, согласно определению, это *две разные* функции, поскольку у них *разные* области определения.

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то в таких случаях подразумевается, что область определения функции состоит из всех тех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$, задающее функцию, имеет смысл.

Например, рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \frac{4}{x-1}$ и $h(x) = x^2 - 4x + 3$. Выражение $\sqrt{x-3}$ имеет смысл при $x \in [3; +\infty)$, так как при этих значениях переменной x подкоренное выражение неотрицательно и корень из числа имеет смысл. Значит, $D(f) = [3; +\infty)$.

Выражение $\frac{4}{x-1}$ имеет смысл для всех значений переменной x, кроме числа 1. Тогда $D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Областью определения функции $h(x) = x^2 - 4x + 3$ является множество всех действительных чисел, т. е. $D(h) = (-\infty; +\infty)$, поскольку выражение $x^2 - 4x + 3$ имеет смысл при любом значении переменной x.

Аналитический способ задания функции

Если соответствие между значениями аргумента и значениями функции определяется с помощью формулы, то такой способ задания функции называют *аналитическим*.

Так, функции $g(x) = x^3$, $h(x) = \frac{1}{x}$ заданы аналитически.

Отметим, что одна и та же функция может быть задана разными формулами. Например, формулы $y = |x|$ и $y = \sqrt{x^2}$ задают одну и ту же функцию.

Словесный способ задания функции

Если соответствие между значениями аргумента и значениями функции описывается словами, т. е. если объясняется, каким образом значению аргумента ставится в соответствие значение функции, то такой способ задания функции — **словесный.**

Рассмотрим пример функции, заданной словесно: «Функция $y = g(x)$ определена на множестве натуральных чисел, и каждому значению аргумента ставится в соответствие сумма цифр в его десятичной записи». Вычислим несколько значений данной функции: $g(12) = 1 + 2 = 3$; $g(325) = 3 + 2 + 5 = 10$; $g(30\,000) = 3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3$.

Табличный способ задания функции

Если соответствие между значениями аргумента и значениями функции указывается с помощью таблицы, в первой строке которой указываются значения аргумента, а во второй — соответствующие значения функции, то говорят, что функция задана **таблицей.**

x	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	y_3	...	y_{n-1}	y_n

Например, метеорологи составляют таблицы, которые описывают различные зависимости между значениями наблюдаемых величин.

Таблица 1. **Суточные суммы солнечной радиации при отсутствии атмосферы (Северное полушарие, зимнее солнцестояние)**

Широта, град.	20	30	40	50	60	70	80	90
Суточные суммы солнечной радиации, кал/см^2 сут.	624	480	327	181	51	0	0	0

Таблица 1 задает функцию $p(x)$ зависимости суточной суммы солнечной радиации от широты, на которой выполняется наблюдение.

С помощью таблицы найдем $p(30)$; $p(60)$; $p(70)$ и выясним, на какой широте значение суточной суммы радиации равно нулю. Для этого найдем значения функции $y = p(x)$ по значениям аргумента: $p(30) = 480$; $p(60) = 51$; $p(70) = 0$. А затем найдем значение аргумента по значениям функции: значение суточной суммы радиации равно нулю на широтах: 70°; 80°; 90°.

Графический способ задания функции

Способ задания функции с помощью множества точек координатной плоскости называется **графическим.**

Пусть кривая L (рис. 2) — некоторое множество точек на координатной плоскости.

Напомним, как по значению аргумента x найти значение функции $f(x)$. Возьмем на оси абсцисс произвольную точку x_0 и проведем через нее прямую, параллельную оси ординат. Она пересечет кривую L в некоторой точке $A(x_0; y_0)$. Ордината $y_0 = f(x_0)$ этой точки является значением функции при значении аргумента, равном x_0.

Таким образом указывается соответствие между множеством значений аргумента и значениями функции.

Областью определения функции является множество абсцисс точек кривой L, а множеством значений функции — множество ординат этих точек.

По графику определяем, что $D(f) = [1; 6]$, а $E(f) = [1; 5]$.

Важно помнить, что не любое множество точек на координатной плоскости задает функцию. Например, кривую, изображенную на рисунке 3, прямая $x = x_0$ пересекает в двух точках, т. е. значению x_0 соответствует не единственное значение y. Значит, эта кривая не задает функцию.

Произвольная кривая на координатной плоскости задает функцию, если любая прямая, параллельная оси ординат, имеет с этой кривой не более одной общей точки.

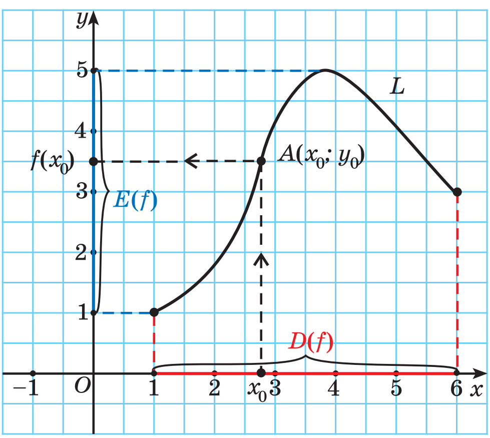


Рис. 2

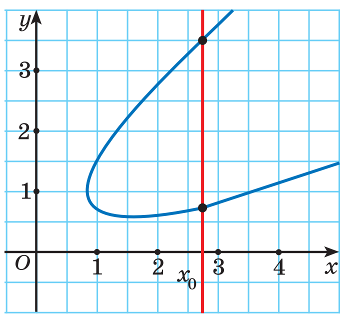


Рис. 3

Определение. Множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции, называют **графиком функции**.

Со свойствами и графиками некоторых функций вы познакомились в 7—8-х классах. Так, вам известно, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая (рис. 4, *а*), графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, — парабола (рис. 4, *б*), графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, — гипербола (рис. 4, *в*). Кроме того, вы изучали свойства функций $y = x^3$, $y = |x|$ и $y = \sqrt{x}$, графики которых изображены на рисунках 4, *г—е*.

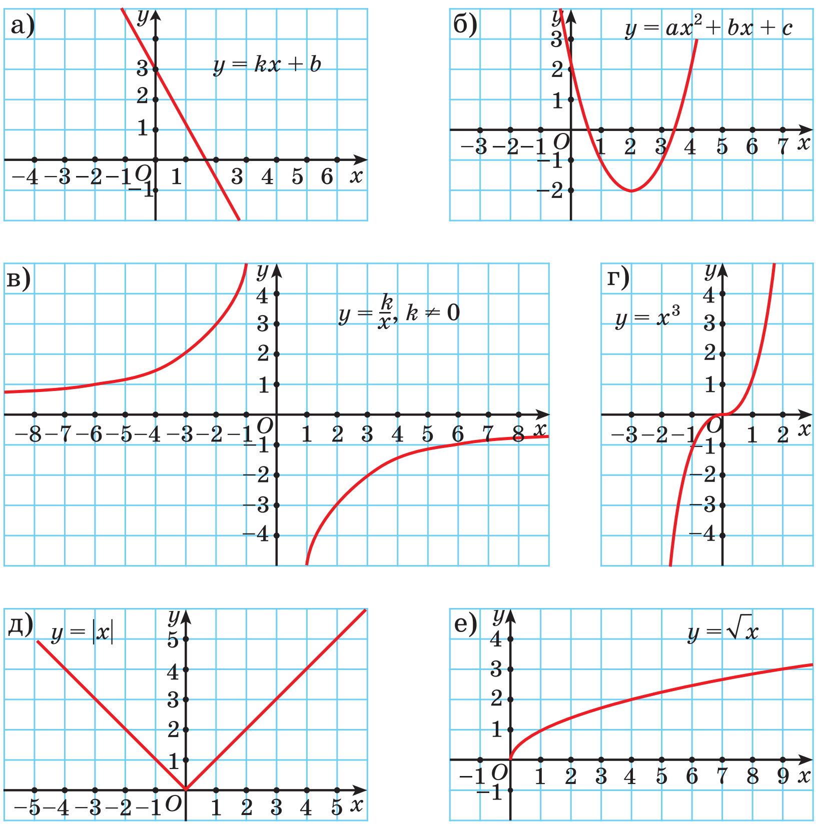


Рис. 4

Функция числового аргумента

1. Найдите значение функции:

а) $f(x) = -x^2 - 1$;

б) $g(x) = \dfrac{2x}{x^3 + 4}$;

в) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, — если значение аргумента равно -2.

а) Значение аргумента $x = -2$ подставим в формулу функции $f(x) = -x^2 - 1$ и получим: $f(-2) = -(-2)^2 - 1 = -5$.

б) $g(-2) = \dfrac{2 \cdot (-2)}{(-2)^3 + 4} = \dfrac{-4}{-4} = 1$.

в) $h(-2) = \sqrt{(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2. Найдите, при каком значении аргумента значение функции:

а) $f(x) = x^2 - 8$;

б) $g(x) = \dfrac{8}{x}$;

в) $h(x) = |x|$ — равно 1.

а) $f(x) = 1$. Решим уравнение:

$x^2 - 8 = 1$; $x^2 = 9$; $\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Таким образом, значение функции $f(x)$ равно 1 при значениях аргумента, равных -3 и 3.

б) $g(x) = 1$; $\dfrac{8}{x} = 1$; $x = 8$. Значит, значение функции $g(x)$ равно 1 при значении аргумента, равном 8.

в) $h(x) = 1$; $|x| = 1$; $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$ Значение функции $h(x)$ равно 1 при значениях аргумента, равных 1 и -1.

Способы задания функции. График функции

3. Функция $g(x) = \dfrac{4}{x - 3}$ задана аналитически на множестве $D = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7\}$.

Задайте ее:

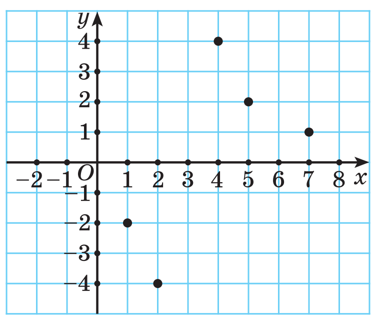
а) таблицей;

б) графически.

а) Вычислим по заданным значениям аргумента значения функции и заполним таблицу:

x	1	2	4	5	7
$g(x)$	-2	-4	4	2	1

б) Построим точки, координаты которых заданы таблицей.



Область определения, множество значений функции

4. Найдите $D(f)$ и $E(f)$ по графику функции, изображенному на рисунке 5.

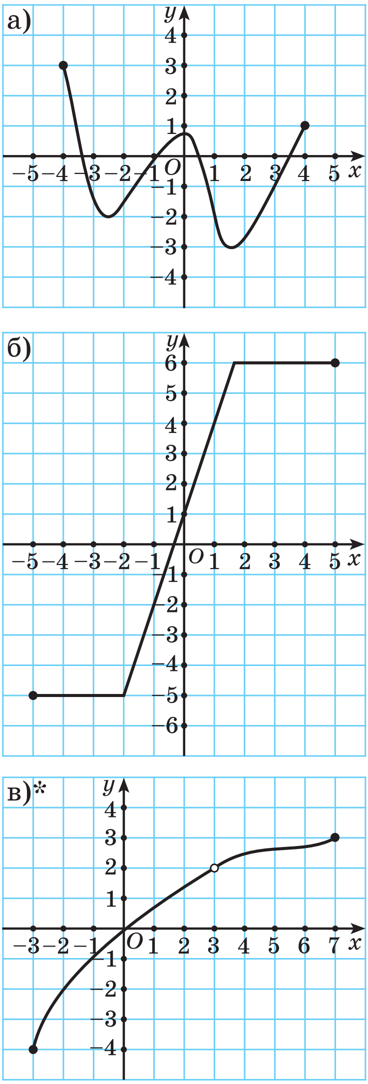
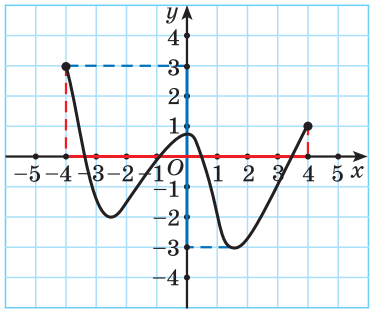


Рис. 5

а) Областью определения данной функции является множество абсцисс точек графика функции, а множеством значений — множество ординат этих точек.



По данному графику определяем, что $D(f) = [-4; 4]$, а $E(f) = [-3; 3]$.

б) Областью определения функции, график которой изображен на рисунке 5, *б*, является отрезок $[-5; 5]$, т. е. $D(f) = [-5; 5]$. Поскольку $-5 \leqslant y \leqslant 6$, то $E(f) = [-5; 6]$.

в)* Так как на графике функции нет точки с координатами (3; 2), то $D(f) = [-3; 3) \cup (3; 7]$, а $E(f) = [-4; 2) \cup (2; 3]$.

5. Найдите область определения функции: а) $g(x) = \dfrac{5x-1}{1-3x}$; б) $p(x) = \dfrac{2x+3}{x+2} + \dfrac{9x-2}{x}$; в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$; г) $h(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x-4}} + \sqrt{13-2x}$.	а) Областью определения данной функции является множество всех чисел, при которых знаменатель дроби $\dfrac{5x-1}{1-3x}$ не равен нулю, т. е. $1-3x \neq 0$; $x \neq \dfrac{1}{3}$. Тогда $D(g) = \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. б) Дробь $\dfrac{2x+3}{x+2}$ имеет смысл для всех значений переменной x, кроме $x=-2$, а дробь $\dfrac{9x-2}{x}$ имеет смысл для всех значений переменной x, кроме $x=0$. Значит, областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, кроме чисел -2 и 0. Таким образом, $D(p) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$. в) Областью определения функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ является множество всех значений переменной x, при которых подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0$. Решим полученное квадратное неравенство. Нулями функции $y = x^2 - 5x + 4$ являются числа 1 и 4. Ветви параболы направлены вверх. Неотрицательные значения функция $y = x^2 - 5x + 4$ принимает при $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. Значит, $D(f) = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. г) Область определения данной функции совпадает со множеством решений системы неравенств: $\begin{cases} x-4>0, \\ 13-2x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ 2x \leqslant 13; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ x \leqslant 6{,}5; \end{cases}$ $D(h) = (4; 6{,}5]$.
6. Найдите множество значений функции: а) $f(x) = \|x\| + 4$;	а) Так как по определению модуля числа $\|x\| \geqslant 0$ для любого числа x, то $\|x\| + 4 \geqslant 4$. Значит, $E(f) = [4; +\infty)$.

б) $g(x) = -x^2 + 6x - 2$; в) $h(x) = \sqrt{x+3} - 5$.	б) Графиком функции $g(x) = -x^2 + 6x - 2$ является парабола, ветви которой направлены вниз ($a = -1 < 0$). Значит, множеством значений данной функции является промежуток $(-\infty;\ y_в]$. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3$. Тогда $y_в = -3^2 + 6\cdot 3 - 2 = -9 + 18 - 2 = 7$. Значит, $E(g) = (-\infty;\ 7]$. в) По определению арифметический квадратный корень из неотрицательного числа является числом неотрицательным. Значит, $\sqrt{x+3} \geqslant 0$ для всех значений переменной, принадлежащих области определения функции. Поскольку $\sqrt{x+3} \geqslant 0$, то $\sqrt{x+3} - 5 \geqslant -5$, т. е. $E(h) = [-5; +\infty)$.

? Определите, какие из линий (рис. 6) являются изображениями графика функции.

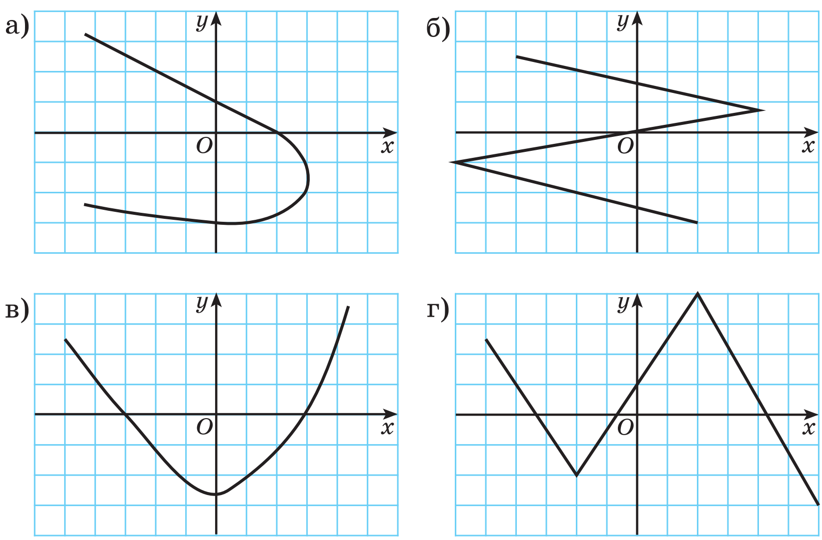


Рис. 6

2.4. Найдите значение функции $f(x) = x^2 - 5$, если значение аргумента равно:

а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1,6; г) $\sqrt{7}$.

2.5. Известно, что $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$. Найдите значение выражения:

а) $g(3)$; б) $2g(-1{,}9)$;

в) $\frac{1}{3}g(0)$; г) $3\sqrt{5} \cdot g(\sqrt{5} - 2)$.

2.6. Сравните значения $h(-3)$ и $h(\sqrt{2})$, если функция задана формулой:

а) $h(x) = \sqrt{x^2 + 7}$; б) $h(x) = \frac{1}{x} - 2x$;

в) $h(x) = x^4 - 3x^2$; г) $h(x) = -x^3 + 8x$.

2.7. Функция задана формулой $q(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2}$. Найдите значение выражения $q(2) - q(-1) + 2q(\sqrt{3})$.

2.8. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $g(x) = 6 - 5x$ равно:

а) 1; б) 6; в) –4; г) 0.

2.9. Известно, что $f(x) = 3x^2 - 10x$. Сколько существует значений аргумента, при которых:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) = -3$;

в) $f(x) = -8\frac{1}{3}$; г) $f(x) = -15$?

2.10. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции равно 5:

а) $f(x) = x^2 + 4x$; б) $g(x) = \frac{2}{x}$; в) $h(x) = |x|$.

2.11. Из данных функций выберите те, для которых выполняется равенство $f(-2) = 8$:

а) $f(x) = x + 8$; б) $f(x) = x^2 + 4$;

в) $f(x) = -\frac{16}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{6 - x}$.

2.12. Определите, является ли зависимость, заданная таблицей 2, функцией.

Таблица 2. **Суточные суммы солнечной радиации при отсутствии атмосферы (Северное полушарие, летнее солнцестояние)**

Широта, град.	30	40	50	60	70	80	90
Суточные суммы солнечной радиации, кал/см^2 сут.	1005	1022	1020	1009	1043	1093	1110

В каком случае по данным таблицы можно установить, что зависимость не является функцией?

2.13. Функция $q(x) = \frac{x^2}{2}$ задана аналитически на множестве $D = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Задайте ее:

а) таблицей; б) графически; в) словесно.

2.14. Функция задана словесно: «Функция $y = f(x)$ определена на множестве целых чисел, больших –7, но меньших 10, и каждому значению аргумента ставится в соответствие число, противоположное значению аргумента». Задайте эту функцию:

а) таблицей; б) графически; в) аналитически.

2.15. На рисунке 7 изображен график функции $y = f(x)$. Пользуясь графиком, найдите:

а) $f(-6)$; $f(1)$; $f(7)$; б) все значения аргумента, при которых верно равенство $f(x) = 3$; $f(x) = 0$; $f(x) = -6$; в) $D(f)$; г) $E(f)$.

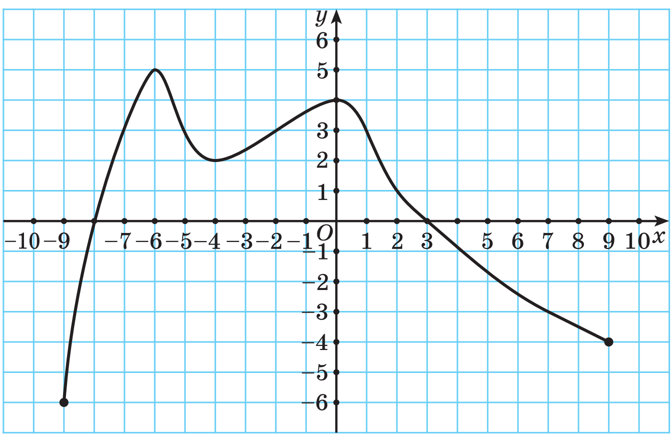


Рис. 7

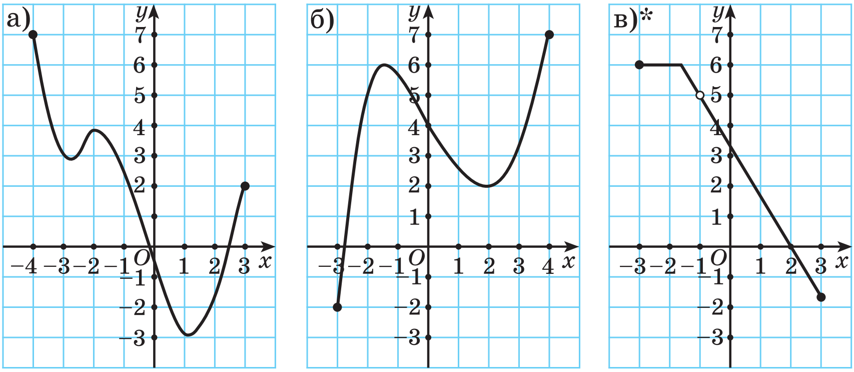


Рис. 8

2.16. Найдите область определения и множество значений функции, график которой изображен на рисунке 8.

2.17. Приведите пример графика функции $y = f(x)$, для которой известно, что:

а) $D(f) = [-7; 5]$; $E(f) = [-2; 3]$; $f(1) = 3$;

б)* $D(f) = [-8; -2) \cup (-2; 4]$; $E(f) = [-3; -1) \cup (-1; 5]$; $f(0) = -3$; $f(1) = -2$.

2.18. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$;

б) $y = \dfrac{3}{8x^2+x}$;

в) $y = \dfrac{x+4}{x^2-6x+9}$;

г) $y = \dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{x}{9}$;

д) $y = \dfrac{x-4}{x} + \dfrac{9x+1}{2x-3}$;

е) $y = \dfrac{7}{x^2+5} + \dfrac{3}{x^2}$.

2.19. Определите, при каких значениях переменной выражение, задающее функцию, имеет смысл:

а) $f(x) = \dfrac{7}{x^2-3x+2}$;

б) $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{x-1}{3x^2-10x+3}$;

в) $f(x) = \dfrac{15x+4}{x^4-13x^2+36}$.

2.20. Приведите пример функции $y = f(x)$, у которой:

а) $D(f) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$;

б) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$;

в) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2.21. Как найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{x+3}$; б) $y = \sqrt{5x-1}$;

в) $y = \frac{5}{\sqrt{7-0{,}1x}}$; г) $y = \sqrt{x^2-6x+8}$;

д) $y = \sqrt{10x - x^2 - 9}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}$?

Найдите $D(y)$. Обобщите способ решения.

2.22. Приведите пример функции $y = f(x)$, у которой:

а) $D(f) = [7;\ +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty;\ 2)$;

в) $D(f) = [-3;\ 3]$; г) $D(f) = (-\infty;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$.

2.23. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{5-x}$; б) $y = \frac{8}{\sqrt{2x+3}} + \frac{1}{x+1}$;

в) $y = \frac{3x}{\sqrt{5-3x}} - \sqrt{2x+7}$; г) $y = \sqrt{x^2+x-20} + \sqrt{36-x^2}$;

д) $y = \frac{3}{\sqrt{x^2-5x}} - \sqrt{8x-x^2}$; е) $y = \sqrt{x-8} + \frac{8}{\sqrt{x^2-9x+8}}$.

2.24. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = x^2 + 5$; б) $f(x) = |x| - 2$;

в) $f(x) = \sqrt{x-4} + 7$; г) $f(x) = -x^2 + 8x + 1$.

2.25. Найдите значение функции $h(x) = 2x^2 + 3$, если значение аргумента равно:

а) 1; б) $-\frac{1}{4}$; в) 0,7; г) $\sqrt{5}$.

2.26. Сравните $f(-1)$ и $f(\sqrt{6})$, если:

а) $f(x) = \sqrt{10-x^2}$; б) $f(x) = 5x^3 - x$;

в) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$; г) $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$.

2.27. Функция задана формулой $g(x) = 3x^4 - x^2$. Верно ли равенство:

а) $g(-1) = 4$; б) $\frac{1}{5}g(\sqrt{2}) = 2$?

2.28. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $g(x) = 3x - 2$ равно: а) 1; б) 0; в) -4.

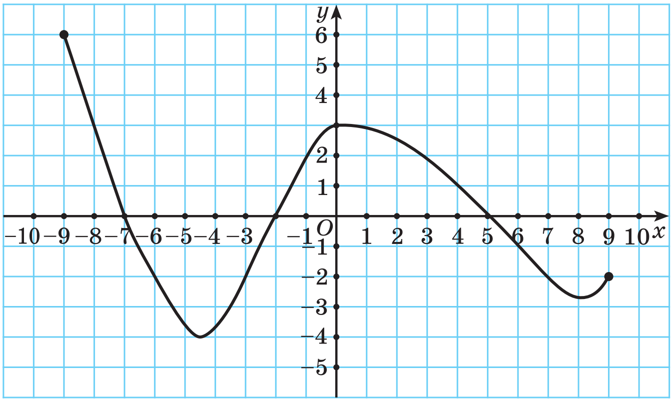


Рис. 9

2.29. Известно, что $f(x) = x^2 - x$. Найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) = 6$; в) $f(x) = 12$.

2.30. Функция $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ задана аналитически на множестве $D = \{0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16\}$. Задайте ее:

а) таблицей; б) графически; в) словесно.

2.31. На рисунке 9 изображен график функции $y = f(x)$. Пользуясь графиком, найдите: а) $f(-9)$; $f(-2)$; $f(7)$; б) все значения аргумента, при которых верно равенство $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; в) $D(f)$; г) $E(f)$.

2.32. Найдите область определения и множество значений функции, график которой изображен на рисунке 10.

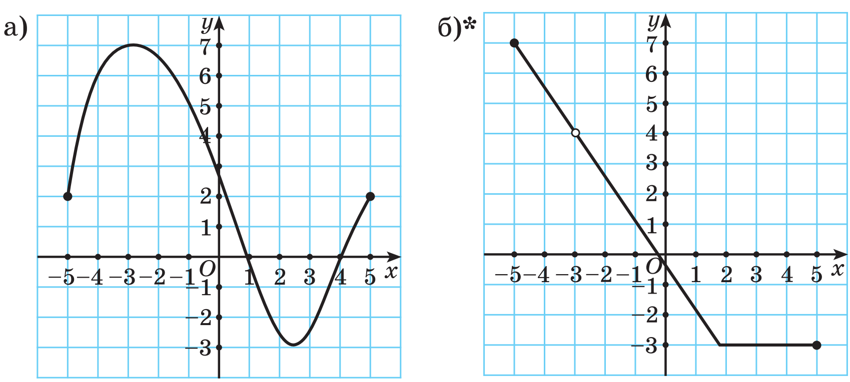


Рис. 10

2.33. Приведите пример графика функции $y = f(x)$, для которой известно, что $D(f) = [-5;\ 6]$; $E(f) = [-3;\ 4]$; $f(-2) = 2$.

2.34. Определите, при каких значениях переменной выражение, задающее функцию, имеет смысл:

а) $y = \frac{7-x}{x-3}$; б) $y = \frac{15}{x^2-6x}$;

в) $y = \frac{7x+2}{x^2+10x+25}$; г) $y = \frac{8}{x^2-81} + \frac{x}{4}$;

д) $y = \frac{7x+1}{x-4} + \frac{5x-7}{x+2}$; е) $y = \frac{x+1}{x^2-10} + \frac{5}{x}$;

ж) $y = \frac{2-x}{x^2-5x+6}$; з) $y = \frac{x}{x^2+8}$.

2.35. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x-4}$; б) $y = \frac{6}{\sqrt{8-3x}}$;

в) $y = \sqrt{2x^2+5x}$; г) $y = \frac{7}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

2.36. Найдите $D(y)$ и запишите ответ в виде числового промежутка или объединения числовых промежутков:

а) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$; б) $y = \frac{7x}{\sqrt{6-x}} - \sqrt{3x+2}$;

в) $y = \sqrt{x^2+4x-5} + \sqrt{6-x}$; г) $y = \sqrt{3x-x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^2-4}}$.

2.37. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = x^2 - 7$; б) $f(x) = |x| + 6$;

в) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$; г) $f(x) = -x^2 - 10x - 5$.

2.38. Представьте выражение $\frac{(3^{-2})^3}{27^{-3}}$ в виде степени с основанием 3.

2.39. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство $a(a+5) < (a+3)(a+2)$.

2.40. Верно ли, что значение выражения

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$$

является рациональным числом?

2.41. В сплав входят медь, олово и цинк в отношении $12 : 13 : 25$. Найдите, сколько процентов в сплаве составляет медь.

§ 7. Свойства функции

2.42. Функция $f(x)$ задана формулой $f(x) = 5x^2 - 3x$. Найдите нули функции.

2.43. Найдите наибольшее значение функции $g(x) = 4 - x^2$.

2.44. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = 5x^2 - 3x$; б) $g(x) = 4 - x^2$.

При изучении функций в 7—8-х классах вы познакомились с их свойствами, например такими как нули функции, промежутки знакопостоянства функции, промежутки монотонности функции. Обобщим эти свойства для функции числового аргумента $y = f(x)$, заданной графически и аналитически.

Нули функции

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют **нулем функции.**

Нулями функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 11, являются значения аргумента, равные –2, 4 и 8, так как при $x = -2$, $x = 4$, $x = 8$ значение функции равно нулю.

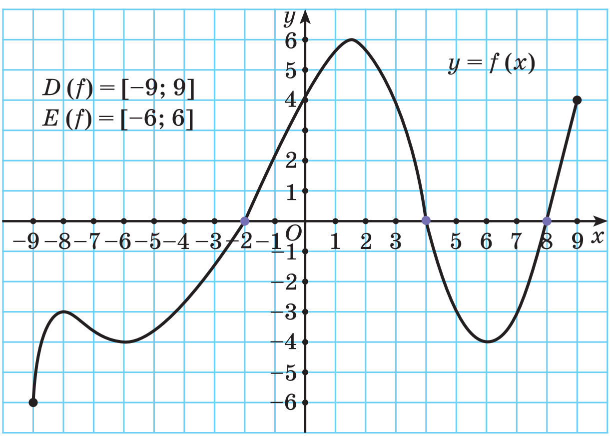


Рис. 11

В точках с абсциссами –2, 4 и 8 график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс.

Найдем нули функции $h(x) = (x + 1)(x - 1)(2x - 5)$, заданной аналитически. Для этого решим уравнение $h(x) = 0$, т. е. $(x + 1)(x - 1)(2x - 5) = 0$.

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, т. е.

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ x - 1 = 0, \\ 2x - 5 = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \\ x = 2,5. \end{array}\right.$$

Значит, числа –1, 1 и 2,5 являются нулями функции
$h(x) = (x + 1)(x - 1)(2x - 5)$.

> $\boldsymbol{f(x_0) = 0,}$
>
> x_0 — нуль функции $y = f(x)$

Промежутки знакопостоянства функции

Промежуток, на котором функция принимает значения только одного знака, называется **промежутком знакопостоянства функции.**

На промежутках [–9; –2) и (4; 8) график функции $y = f(x)$ лежит ниже оси абсцисс (рис. 12), следовательно, значения функции на этих промежутках отрицательны, т. е. $y < 0$ при $x \in [-9; -2) \cup (4; 8)$.

На промежутках (–2; 4) и (8; 9] график функции $y = f(x)$ лежит выше оси абсцисс (см. рис. 12), следовательно, значения

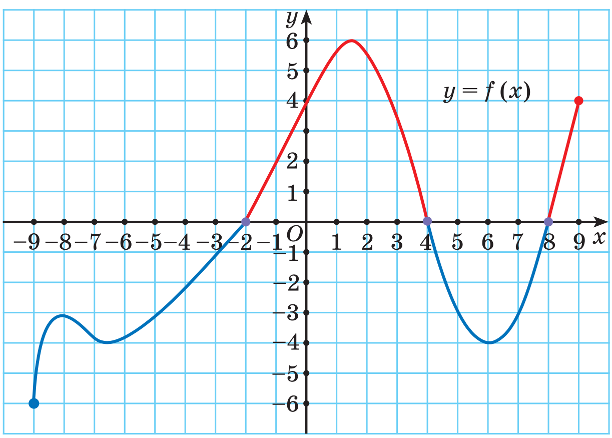


Рис. 12

функции на этих промежутках положительны, т. е. $y > 0$ при $x \in (-2; 4) \cup (8; 9]$.

Промежутки $[-9; -2)$ и $(4; 8)$, $(-2; 4)$ и $(8; 9]$ являются промежутками знакопостоянства данной функции.

Обычно при изучении свойств функций рассматривают промежутки знакопостоянства максимальной длины.

Найдем промежутки знакопостоянства функции $g(x) = -2x + 6$, заданной аналитически. Для этого решим неравенства $g(x) < 0$ и $g(x) > 0$, т. е. выясним, при каких значениях аргумента значения данной функции отрицательны, а при каких положительны. Получим: $-2x + 6 < 0$; $-2x < -6$; $x > 3$, т. е. $g(x) < 0$ при $x \in (3; +\infty)$.

Очевидно, что $g(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 3)$, т. е. на промежутке $(-\infty; 3)$ значения функции положительны.

Промежутки $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства функции $g(x) = -2x + 6$.

Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ **возрастает** на некотором промежутке из области определения, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 13).

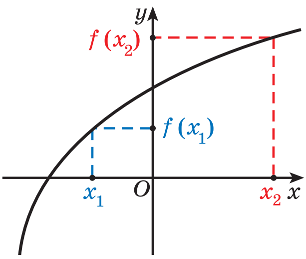


Рис. 13

Другими словами, функция возрастает на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции.

Функция $y = f(x)$ **убывает** на некотором промежутке из области определения, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 14).

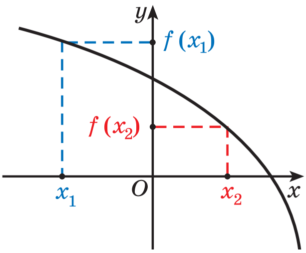


Рис. 14

Иначе говоря, функция убывает на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка **большему** значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции.

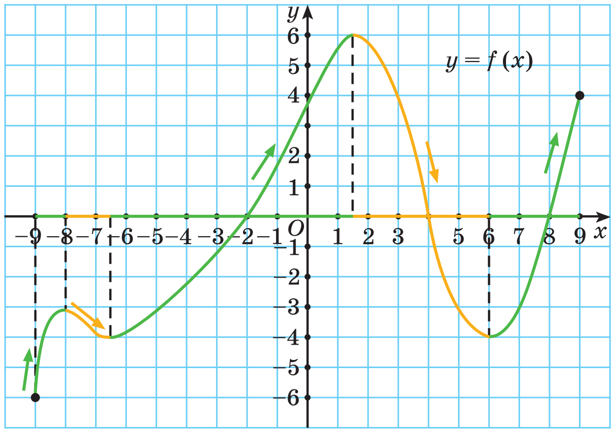


Рис. 15

Промежутки возрастания и убывания функции называют **промежутками монотонности** функции, а функцию называют **монотонной** на промежутке возрастания или убывания.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют **возрастающей функцией**, а если убывает, то **убывающей функцией.**

Определим промежутки возрастания функции $y = f(x)$, заданной графически (рис. 15). При увеличении абсциссы от −9 до −8 значения функции увеличиваются (точки на графике «поднимаются вверх»), значит, на отрезке [−9; −8] функция $y = f(x)$ возрастает. Функция $y = f(x)$ возрастает еще на двух промежутках: [−6,5; 1,5] и [6; 9].

При увеличении абсциссы от −8 до −6,5 значения функции уменьшаются (точки на графике «опускаются вниз»), значит, на отрезке [−8; −6,5] функция $y = f(x)$ убывает. Данная функция убывает также на промежутке [1,5; 6].

Пример. Докажите, что при $k > 0$ линейная функция $h(x) = kx + b$, $D(h) = \boldsymbol{R}$, возрастает на области определения, т. е. является возрастающей, а при $k < 0$ убывает на области определения, т. е. является убывающей.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из области определения функции, причем $x_2 > x_1$.

Тогда $h(x_1) = kx_1 + b$ и $h(x_2) = kx_2 + b$. Рассмотрим разность $h(x_2) - h(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 + b - kx_1 - b =$
$= kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$.
Поскольку $x_2 > x_1$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$, то знак произведения $k(x_2 - x_1)$ зависит от знака числа k.
Если $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$, тогда $h(x_2) - h(x_1) > 0$, т. е. $h(x_2) > h(x_1)$.
Значит, для $x_2 > x_1$ при $k > 0$ получим, что $h(x_2) > h(x_1)$, т. е. функция $h(x) = kx + b$ при $k > 0$ является возрастающей.
Если $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$, тогда $h(x_2) - h(x_1) < 0$, т. е. $h(x_2) < h(x_1)$.
Значит, для $x_2 > x_1$ при $k < 0$ получим, что $h(x_2) < h(x_1)$, т. е. функция $h(x) = kx + b$ при $k < 0$ является убывающей.

Свойства функции

1. На рисунке 16 изображен график функции $y = f(x)$.
Найдите:
а) нули функции;
б) промежутки знакопостоянства функции;
в) промежутки монотонности функции.

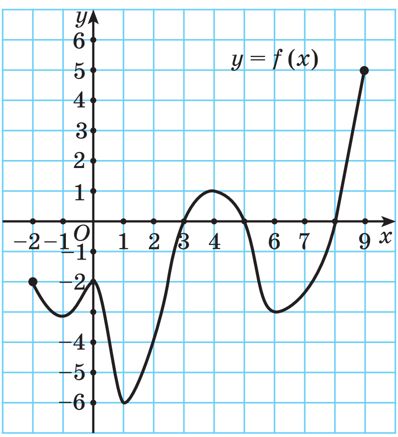


Рис. 16

а) Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью абсцисс: $x = 3$, $x = 5$, $x = 8$. При этих значениях аргумента значения функции равны нулю, т. е. числа 3; 5 и 8 являются нулями функции.
б) Функция принимает положительные значения (график функции расположен выше оси абсцисс) на промежутках $(3; 5)$ и $(8; 9]$, а отрицательные значения (график функции расположен ниже оси абсцисс) на промежутках $[-2; 3)$ и $(5; 8)$.
в) Функция убывает (при увеличении абсцисс точек графика ординаты точек графика уменьшаются) на промежутках: $[-2; -1]$; $[0; 1]$ и $[4; 6]$.
Функция возрастает (при увеличении абсцисс точек графика ординаты точек графика увеличиваются) на промежутках: $[-1; 0]$; $[1; 4]$ и $[6; 9]$.

2. Найдите нули функции: а) $f(x) = 6 - 1,5x$; б) $g(x) = x^2 - 4x + 3$; в)* $h(x) = \lvert x \rvert + 5$.	а) Для того чтобы найти нули данной функции, нужно решить уравнение $f(x) = 0$, т. е. $6 - 1,5x = 0$; $1,5x = 6$; $x = 4$. Значение аргумента $x = 4$ является нулем данной функции. б) Нулями данной функции являются корни уравнения $g(x) = 0$. Решим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Воспользуемся теоремой Виета и получим: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Числа 1 и 3 являются нулями функции $g(x) = x^2 - 4x + 3$. в)* Решим уравнение $h(x) = 0$, т. е. $\lvert x \rvert + 5 = 0$; $\lvert x \rvert = -5$. Поскольку модуль не может быть равен отрицательному числу, то уравнение не имеет корней, а значит, функция $h(x) = \lvert x \rvert + 5$ не имеет нулей.
3. Найдите промежутки знакопостоянства функции: а) $f(x) = 6 - 1,5x$; б) $g(x) = x^2 - 4x + 3$; в)* $h(x) = \lvert x \rvert + 5$.	а) Найдем, при каких значениях аргумента функция $f(x) = 6 - 1,5x$ принимает положительные значения, т. е. решим неравенство: $6 - 1,5x > 0$; $-1,5x > -6$; $1,5x < 6$; $x < 4$. Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ 4)$. Функция принимает отрицательные значения, т. е. $f(x) < 0$ при $x \in (4;\ +\infty)$. б) Найдем промежутки знакопостоянства функции $g(x) = x^2 - 4x + 3$: $g(x) > 0$, т. е. $x^2 - 4x + 3 > 0$ при $x \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$; $g(x) < 0$, т. е. $x^2 - 4x + 3 < 0$ при $x \in (1;\ 3)$. Таким образом, на промежутках $(-\infty;\ 1)$ и $(3;\ +\infty)$ значения функции положительны, а на промежутке $(1;\ 3)$ значения функции отрицательны.

	в)* Решим неравенство $h(x) > 0$, т. е. $\lvert x\rvert + 5 > 0$; $\lvert x\rvert > -5$. Решением полученного неравенства является любое действительное число ($x \in \boldsymbol{R}$). Значит, функция принимает положительные значения при любых значениях аргумента, т. е. $h(x) > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.
4*. Найдите промежутки монотонности функции $g(x) = -\frac{10}{x}$.	Покажем, что функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(0; +\infty)$, причем $x_2 > x_1$. По свойству числовых неравенств, если $x_2 > x_1 > 0$, то $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$ и $-\frac{10}{x_2} > -\frac{10}{x_1}$. Следовательно, функция $g(x)$ возрастает на промежутке $(0;\ +\infty)$. Если x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(-\infty; 0)$, причем $0 > x_2 > x_1$, то по свойству числовых неравенств $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$, а $-\frac{10}{x_2} > -\frac{10}{x_1}$. Значит, функция $g(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$. Таким образом, функция $g(x) = -\frac{10}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. Отметим, что функция $g(x) = -\frac{10}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, но не возрастает на всей ее области определения $D(g) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Покажем это, приведя контрпример. Пусть $x_1 = -5$, а $x_2 = 1$, тогда $g(x_1) = g(-5) = -\frac{10}{-5} = 2$, а $g(x_2) = g(1) = -\frac{10}{1} = -10$. В данном случае для $x_2 > x_1$ получили $g(x_2) < g(x_1)$, что противоречит определению.

1. Верно ли, что если функция не имеет нулей, то ее график на всей области определения функции лежит:

а) выше оси абсцисс;

б) ниже оси абсцисс;

в) по разные стороны от оси абсцисс?

2. На рисунке 17 функция $r(x)$ задана графически на множестве $\boldsymbol{R}$. Можно ли, используя график, решить неравенство:

а) $r(x) > 0$; б) $r(x) < 0$?

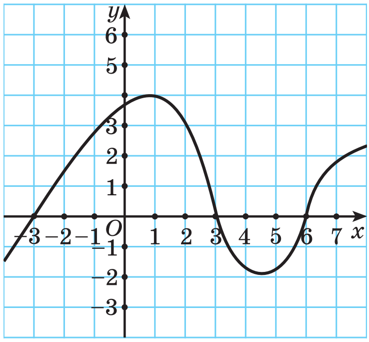


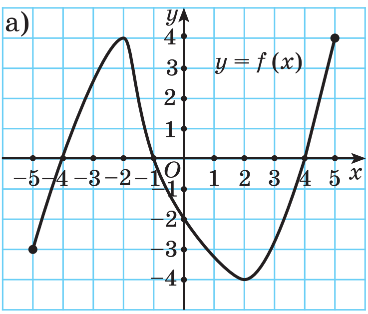
Рис. 17

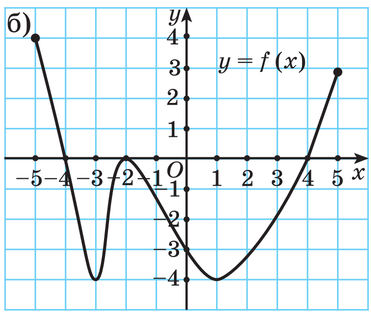
2.45. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 18). Найдите:

1) нули функции;

2) промежутки знакопостоянства функции;

3) промежутки монотонности функции.





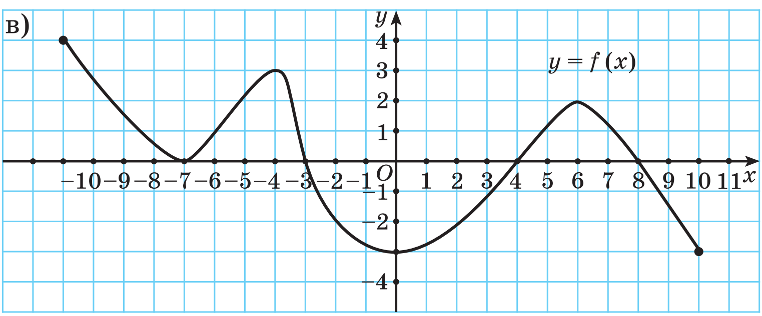


Рис. 18

2.46. На рисунке 19 изображен график функции $y = f(x)$. Выберите неверное утверждение: а) $D = [-7;\ 7]$; б) $E = [-3;\ 5]$; в) $f(x) > 0$ при $x \in (-6;\ -1) \cup (5;\ 7]$; г) функция убывает на промежутке $(-1;\ 5)$; д) нулями функции являются числа $-6;\ -1;\ 5$.

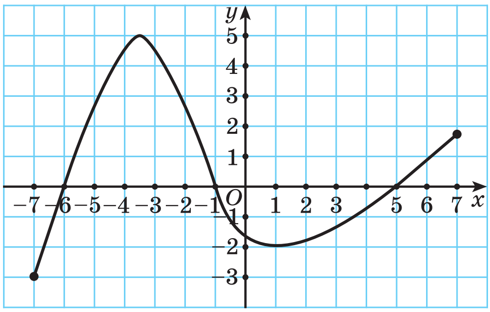


Рис. 19

2.47. Изобразите график функции $y = f(x)$, для которой известно, что: а) $D(f) = [-5;\ 6]$; б) $E(f) = [-4;\ 2]$; в) нулями функции являются числа -3 и 4; г) функция убывает на промежутке $[-5;\ -1]$ и возрастает на промежутке $[-1;\ 6]$.

2.48. На рисунке 20 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите: а) промежутки знакопостоянства функции; б) промежутки возрастания функции. Сколько нулей имеет данная функция?

2.49. На рисунке 21 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество всех действительных чисел. С помощью графика решите:

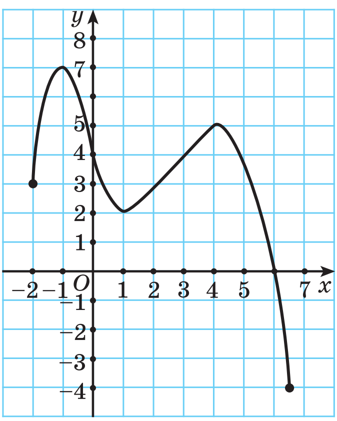


Рис. 20

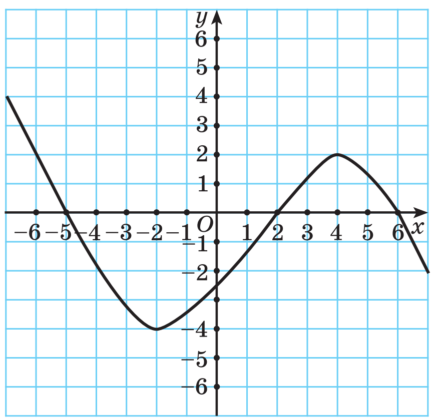


Рис. 21

а) уравнение $f(x) = 0$;

б) неравенство $f(x) < 0$;

в) неравенство $f(x) \geqslant 0$.

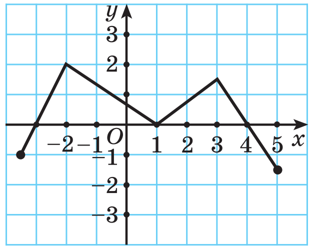


Рис. 22

2.50. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 22, найдите:

а) промежутки, на которых функция принимает положительные значения;

б) промежутки убывания функции;

в) количество корней уравнения $f(x) = 0$.

Верно ли, что на промежутке [1; 4] функция возрастает; на промежутке [–2; 1] функция принимает отрицательные значения?

2.51. Определите нули функции, заданной таблицей.

x	-22	$-\sqrt{17}$	-3	-2	0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{17}$	5	43
y	-8	0	2	6	12	18	0	29	0

2.52. Какие значения аргумента называют нулями функции? Найдите нули функции:

а) $f(x) = 18 - 2x$; б) $g(x) = 6x - x^2 - 5$;

в) $h(x) = x^2 + 8x$; г) $q(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Приведите пример функции, имеющей один нуль; два нуля; три нуля.

2.53. Верно ли, что функция $g(x) = x^2 + x + 3$ не имеет нулей? Приведите несколько примеров функций, не имеющих нулей.

2.54. Сколько нулей имеет функция:

а) $y = x^3 - 2x^2$; б) $y = 8$; в) $y = 5x$;

г) $y = |x| - 4$; д) $y = x^3 + 1$; е) $y = -\frac{5}{x}$?

2.55. График функции, областью определения которой являются все действительные числа, проходит через точки $A(-5; 7)$ и $B(8; -4)$. Верно ли, что на промежутке $(-5; 8)$ функция имеет хотя бы один нуль?

2.56. Изобразите график функции $y = f(x)$, если известно, что уравнение $f(x) = 0$:

а) имеет один корень;

б) имеет один положительный и два отрицательных корня;

в) не имеет корней.

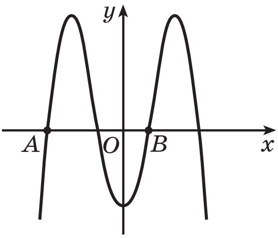


Рис. 23

2.57. На рисунке 23 изображен график функции $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Точки $A(x_1;\ y_1)$; $B(x_2;\ y_2)$ принадлежат данному графику. Найдите x_1 и x_2.

2.58. Составьте план решения и найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = 8 - 3x$; б) $g(x) = x^2 - 9$;

в) $h(x) = 5x - x^2$; г)* $p(x) = |x| + 7$.

2.59. Найдите, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения:

а) $f(x) = 8x$; б) $f(x) = x^2 + 6x + 9$;

в) $f(x) = \frac{6}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

2.60. Из функций $y = -x^2 - 5$; $y = -\sqrt{2}$; $y = -6x$; $y = -\sqrt{x}$ выберите те, которые принимают только отрицательные значения для всех значений аргумента из области определения функции. Приведите несколько примеров функций, принимающих только положительные значения для всех значений аргумента из области определения функции.

2.61. Известно, что функция $y = h(x)$ возрастает на промежутке $(-2;\ 5)$. Расположите в порядке возрастания значения выражений $h(0)$; $h\ (-1{,}2)$ и $h(4)$.

2.62. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает на множестве действительных чисел и $f(5) = 4$. Выберите верное утверждение:

а) $f(6) > 4$; б) $f(-5) < -4$;

в) $f(10) > 8$; г) $f(0) > 4$.

2.63*. Докажите, что функция:

а) $f(x) = 2x$ является возрастающей;

б) $f(x) = 1 - 3x$ является убывающей.

2.64*. Докажите, что функция $g(x) = \frac{3}{x}$ убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$.

2.65*. Найдите расстояние между нулями функций $f(x) = 5x - 12$ и $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

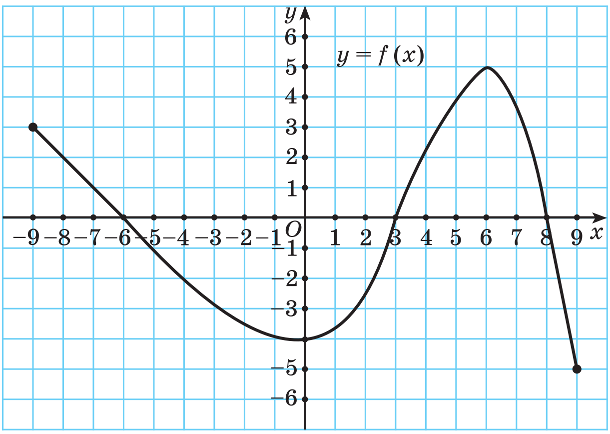
2.66*. Найдите, при каких значениях числа a функция $f(x) = x^2 - ax - 3a$ не имеет нулей.

2.67*. Докажите, что функция $y = |x + 5|$ возрастает на промежутке $[-5; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -5]$.

2.68. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 24). Найдите:

1) нули функции;
2) промежутки знакопостоянства функции;
3) промежутки монотонности функции.

а)



б)

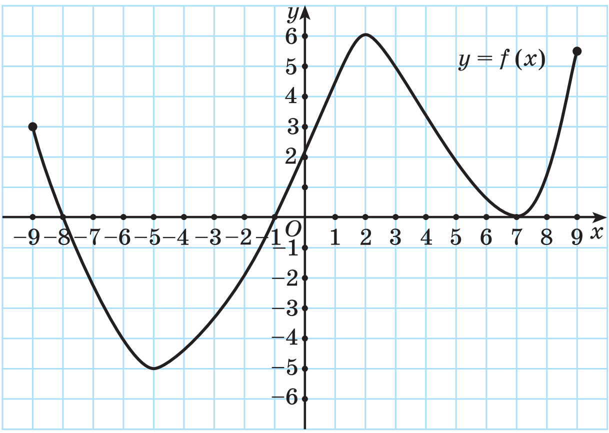


Рис. 24

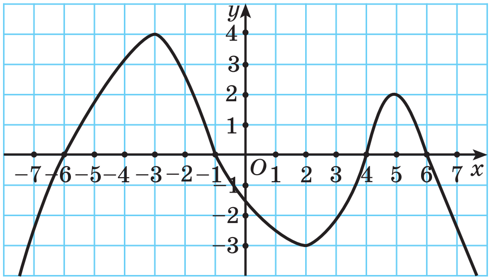


Рис. 25

2.69. На рисунке 25 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество всех действительных чисел. С помощью графика решите: а) уравнение $f(x) = 0$; б) неравенство $f(x) < 0$; в) неравенство $f(x) \geqslant 0$.

2.70. Какие значения аргумента называют нулями функции? Найдите нули функции:

а) $f(x) = 5x - 7$; б) $g(x) = 49 - x^2$;

в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$; г) $q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

2.71. Какие из данных функций не имеют нулей:

а) $f(x) = |x| - 8$; б) $g(x) = x^2 + 5$;

в) $h(x) = \frac{7}{x}$; г) $q(x) = \sqrt{x} + 2$?

2.72. Приведите пример линейной функции; квадратичной функции, не имеющей нулей.

2.73. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $g(x) = x^2 + 2x$;

в) $h(x) = 3x - x^2 - 2$; г) $p(x) = x^2 + 7$.

2.74. Найдите, при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения:

а) $f(x) = 3 - x$; б) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$; в) $f(x) = \frac{4}{x}$.

2.75. Известно, что функция $y = g(x)$ убывает на промежутке $(-7; 4)$. Расположите в порядке возрастания значения выражений $q(0)$; $q(-5)$ и $q(2)$.

2.76*. Докажите, что функция $f(x) = 2 - 3x$ является убывающей.

2.77*. Докажите, что функция $g(x) = -\frac{7}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

2.78*. Докажите, что функция $y = x^2 - 8x + 16$ возрастает на промежутке $[4; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 4]$.

2.79. Из чисел $\frac{5}{7}$; 8,(3); $\sqrt{15}$; $-\frac{4}{12}$; $\sqrt{2}$; π выберите все те, которые нельзя представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Какому числовому множеству принадлежат все оставшиеся числа?

2.80. Найдите, на какое число нужно умножить сумму чисел $4\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$, чтобы получить их разность.

2.81. Дано: $-2 < a < 7$. Оцените значение выражения:

а) $3a$; б) $-\frac{a}{5}$; в) $a - 8$; г) $2a + 5$.

2.82. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{3x-7}{4} - \frac{2y-3}{5} = 1, \\ \frac{2x-y}{2} = y - 1. \end{cases}$$

2.83. Найдите значение выражения

$$-0{,}5^2 : 0{,}5^3 + 0{,}3^0 - 2^8 \cdot 4^{-2}.$$

2.84. Упростите выражение $\sqrt{(1-2x)^2} - \sqrt{(2x+1)^2}$, если $x \in (-0{,}2;\ 0{,}1)$.

§ 8. Четные и нечетные функции

2.85. Функция задана формулой $f(x) = 5x^2$. Найдите $f(2)$; $f(-2)$; $f(0{,}5)$; $f(-0{,}5)$.

2.86. Определите координаты точек, симметричных точкам (1; 3), (1; 2), (–5; 0), (–3; –2), (4; –2) относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат.

2.87. Запишите промежутки, симметричные данным относительно нуля: (0; 3), (1; 2], [–1; 0), [–3; –2], (0; $+\infty$).

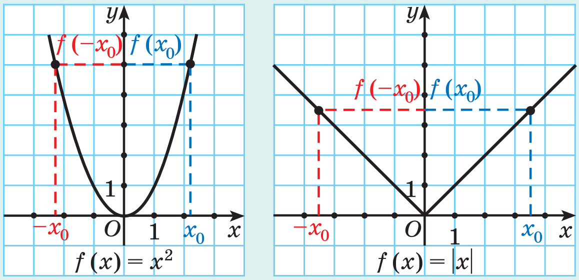
Для построения графиков функций, решения уравнений и неравенств вы используете свойства функций. Еще одним свойством, позволяющим найти рациональное решение, является свойство четности (нечетности) функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если:

① ее область определения симметрична относительно нуля;

② для любого $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$.

Четные функции



$$f(-x_0) = f(x_0)$$

Рассмотрим отрезок [–5; 6]. Он не может быть областью определения четной функции, так как значение аргумента, например, равное 6, принадлежит этому отрезку, а противоположное значение –6 не принадлежит.

Условие $f(-x) = f(x)$ означает, что значения функции при противоположных значениях аргумента равны.

Чтобы доказать, что функция является четной, нужно:

① Проверить симметричность области определения функции относительно нуля. ② Записать выражение $f(-x)$. ③ Показать, что $f(-x) = f(x)$.	Докажите, что функция $f(x) = x^4 - 3x^2$ является четной. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$ симметрична относительно нуля. ② $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2$. ③ $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$. Функция $f(x) = x^4 - 3x^2$ является четной.

Пример 1. Докажите, что функция является четной:
а) $f(x) = |x|$; б) $h(x) = 7x^6$.

Решение. а) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$ симметрична относительно нуля.
② $f(-x) = |-x|$.
③ $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

Функция $f(x) = |x|$ является четной.
б) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$ симметрична относительно нуля.
② $h(-x) = 7(-x)^6$.
③ $h(-x) = 7(-x)^6 = 7x^6 = h(x)$.

Функция $h(x) = 7x^6$ является четной.

Пример 2. Выясните, является ли функция $g(x) = \sqrt{x}$ четной.

Решение. Областью определения функции $g(x) = \sqrt{x}$ является луч $[0; +\infty)$, он не симметричен относительно нуля. Первое условие определения четной функции не выполнено, значит, данная функция не является четной.

Пример 3. Определите, является ли функция $h(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$ четной.

Решение. Областью определения данной функции является множество всех чисел, при которых знаменатель дроби не равен нулю, т. е. $x^2 \neq 0$; $D(h) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Таким образом, область определения данной функции симметрична относительно нуля.

Проверим выполнение условия $h(-x) = h(x)$:

$h(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 1}{(-x)^2} = \dfrac{x^4 - 1}{x^2} = h(x)$. Функция является четной.

Пример 4. Докажите, что функция $f(x) = x - 1$ не является четной.

Решение. Чтобы доказать, что функция не является четной, достаточно привести контрпример, т. е. найти хотя бы одно значение x из ее области определения, для которого не выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Например, пусть $x = 2$, тогда $f(2) = 1$, а $f(-2) = -3$. Получили, что $f(2) \neq f(-2)$, значит, функция $f(x) = x - 1$ не является четной.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 26).

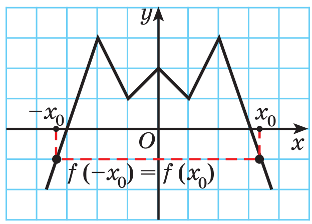


Рис. 26

На рисунке 27 даны примеры графиков четных функций.

Если график некоторой функции симметричен относительно оси ординат, то эта функция является четной.

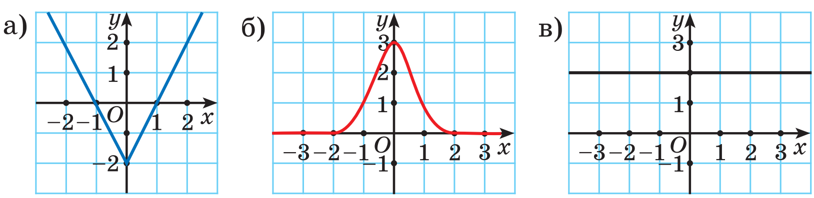


Рис. 27

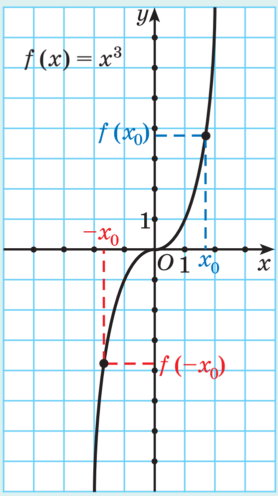
Определение. Функция $y = f(x)$ называется **нечетной,** если:

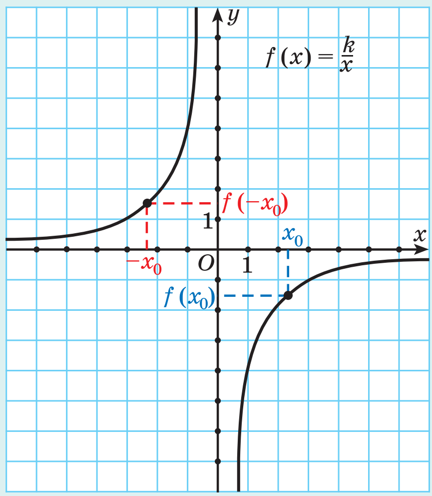
① ее область определения симметрична относительно нуля;

② для любого $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

Условие $f(-x) = -f(x)$ означает, что значения функции при противоположных значениях аргумента противоположны.

Нечетные функции





$$f(-x_0) = -f(x_0)$$

Чтобы доказать, что функция является нечетной, нужно:

① Проверить симметричность области определения функции относительно нуля. ② Записать выражение $f(-x)$. ③ Показать, что $f(-x) = -f(x)$.	Докажите, что функция $f(x) = x^3 + 5x$ является нечетной. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$ симметрична относительно нуля. ② $f(-x) = (-x)^3 + 5(-x)$. ③ $f(-x) = (-x)^3 + 5(-x) = -x^3 - 5x = -(x^3 + 5x) = -f(x)$. Функция $f(x) = x^3 + 5x$ является нечетной.

Пример 5. Докажите, что функция $h(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, является нечетной.

Решение. ① $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ симметрична относительно нуля.

② $h(-x) = \frac{k}{-x}$.

③ $h(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -h(x)$.

Функция $h(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, является нечетной.

Пример 6. Определите, является ли функция $h(x) = x^5 - x$ нечетной.

Решение. $D(h) = \boldsymbol{R}$ симметрична относительно нуля.

$h(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -(x^5 - x) = -h(x)$.

Функция $h(x) = x^5 - x$ является нечетной.

Пример 7. Известно, что функция $y = f(x)$ нечетная и $f(3) = -7$ и $f(-4) = 3$. Найдите значение выражения $f(-3) + f(4)$.

Решение. Так как функция $y = f(x)$ нечетная, то выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

Поскольку $f(3) = -7$, то $f(-3) = 7$. Так как $f(-4) = 3$, то $f(4) = -3$.

Тогда $f(-3) + f(4) = 7 - 3 = 4$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 28).

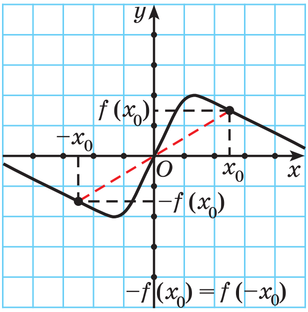


Рис. 28

На рисунке 29 приведены примеры графиков нечетных функций.

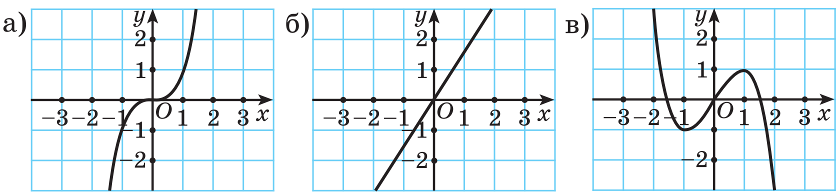


Рис. 29

Если график некоторой функции симметричен относительно начала координат, то эта функция является нечетной.

Если необходимо **исследовать функцию на четность**, то нужно выяснить является ли данная функция четной; нечетной. Если оба ответа отрицательны, то говорят, что функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 8. Исследуйте на четность функцию $g(x) = 5x^2 - 2x$.

Решение. Так как $D(g) = \boldsymbol{R}$, то область определения данной функции симметрична относительно нуля, значит, первое условие четности (нечетности) функции выполнено.

Проверим, верно ли одно из равенств: $g(-x) = g(x)$ или $g(-x) = -g(x)$.

$g(-x) = 5(-x)^2 - 2(-x) = 5x^2 + 2x \neq g(x)$ для $x \in D(g)$, значит, функция $g(x) = 5x^2 - 2x$ не является четной.

$g(-x) = 5x^2 + 2x \neq -g(x)$ для $x \in D(g)$, значит, функция $g(x) = 5x^2 - 2x$ не является нечетной.

Таким образом, функция $g(x) = 5x^2 - 2x$ не является ни четной, ни нечетной.

Область определения четной или нечетной функции	
1. Определите, может ли областью определения четной или нечетной функции являться множество чисел: а) $[-8;\ 8]$; б) $[-7;\ 7)$; в) $[-7;\ 0) \cup (0;\ 7]$; г) $[-9;\ 2) \cup (2;\ 9]$; д) $(-\infty;\ +\infty)$; е) $[-5;\ 10]$.	Множества чисел а); в); д) симметричны относительно нуля, значит, они могут быть областью определения четной или нечетной функции. Множества чисел б); г); е) не симметричны относительно нуля, следовательно, они не могут быть областью определения четной или нечетной функции.
Определение четной (нечетной) функции	
2. Докажите, что функция: а) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2}{x^2}$ является четной; б) $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 4}$ является нечетной.	а) ① $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ симметрична относительно нуля. ② $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 2}{(-x)^2}$. ③ $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - 2}{(-x)^2} = \dfrac{x^4 - 2}{x^2} = f(x)$. Функция $f(x) = \dfrac{x^4 - 2}{x^2}$ четная. б) ① $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ симметрична относительно нуля.

	② $g(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 4}$. ③ $g(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x^3 + 3x}{x^2 - 4} =$ $= \dfrac{-(x^3 - 3x)}{x^2 - 4} = -\dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 4} = -g(x)$. Функция $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 4}$ нечетная.
3. Какой (нечетной; четной; ни четной, ни нечетной) является функция: а) $f(x) = 7x^3$; б) $g(x) = \dfrac{x}{\lvert x\rvert}$; в) $h(x) = -\sqrt{2x}$; г) $d(x) = -6x^4 - 8$; д) $q(x) = 2x + 2$; е)* $p(x) = \lvert x - 5\rvert + \lvert x + 5\rvert$?	а) $D(f) = \boldsymbol{R}$ — область определения функции симметрична относительно начала координат; $f(-x) = 7(-x)^3 = -7x^3 = -f(x)$ — функция нечетная; б) $D(g) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ — область определения функции симметрична относительно начала координат; $g(-x) = \dfrac{-x}{\lvert -x\rvert} = -\dfrac{x}{\lvert x\rvert} = -g(x)$ — функция нечетная; в) $D(h) = [0; +\infty)$ — область определения функции не симметрична относительно начала координат, значит, функция не является ни четной, ни нечетной; г) $D(d) = \boldsymbol{R}$ — область определения функции симметрична относительно начала координат; $d(-x) =$ $= -6(-x)^4 - 8 = -6x^4 - 8 = d(x)$ — функция четная; д) $D(q) = \boldsymbol{R}$ — область определения функции симметрична относительно начала координат, но функция ни четная, ни нечетная, так как, например, $q(-1) = 0$, а $q(1) = 4$, т. е. $q(-1) \neq q(1)$ и $q(-1) \neq -q(1)$; е)* $D(p) = \boldsymbol{R}$ — область определения функции симметрична относительно начала координат; $p(-x) = \lvert -x - 5\rvert + \lvert -x + 5\rvert =$ $= \lvert x + 5\rvert + \lvert x - 5\rvert = p(x)$ — функция четная.

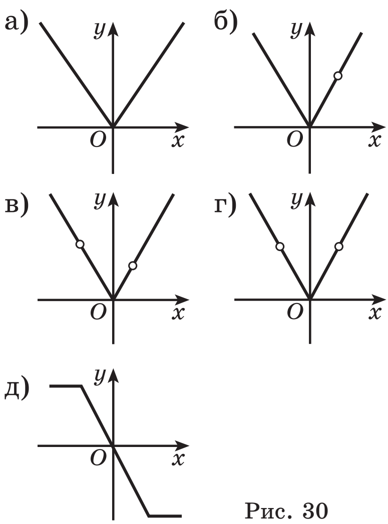
<table>
<tr><td>4. Исследуйте на четность функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.</td><td>$D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Область определения функции симметрична относительно нуля.
$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$.
Так как $f(-x) = -f(x)$, то функция является нечетной.</td></tr>
<tr><td>5. Известно, что функция $y = f(x)$ является четной и $f(3) = -7$; $f(-4) = 5$. Найдите значение выражения $2f(-3) - f(4)$.</td><td>Так как функция $y = f(x)$ является четной, то выполняется условие $f(-x) = f(x)$. Тогда $f(-3) = f(3) = -7$ и $f(4) = f(-4) = 5$.
Найдем значение выражения
$2f(-3) - f(4) = 2 \cdot (-7) - 5 = -19$.</td></tr>
<tr><td>6. Известно, что функция $y = f(x)$ является нечетной и $f(-5) = 3$; $f(2) = -8$. Найдите значение выражения $4f(5) + f(-2)$.</td><td>Так как функция $y = f(x)$ является нечетной, то $f(-x) = -f(x)$.
Тогда $f(5) = -f(-5) = -3$
и $f(-2) = -f(2) = 8$.
Найдем значение выражения
$4f(5) + f(-2) = 4 \cdot (-3) + 8 = -4$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">График четной (нечетной) функции</td></tr>
<tr><td>7. Определите вид функции (четная; нечетная; ни четная, ни нечетная), заданной графически (рис. 30).


Рис. 30</td><td>На рисунках 30, а, г изображены графики четных функций, так как они симметричны относительно оси ординат.
Графики функций на рисунках 30, б, в имеют несимметричные области определения, значит, эти функции не являются ни четными, ни нечетными.
На рисунке 30, д изображен график нечетной функции, так как он симметричен относительно начала координат.</td></tr>
</table>

8. На рисунке 31 изображена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f) = [-5; -1] \cup [1; 5]$. Изобразите график функции $y = f(x)$, если известно, что она является: а) четной; б) нечетной.

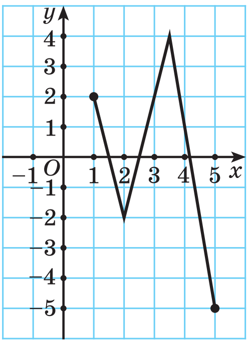
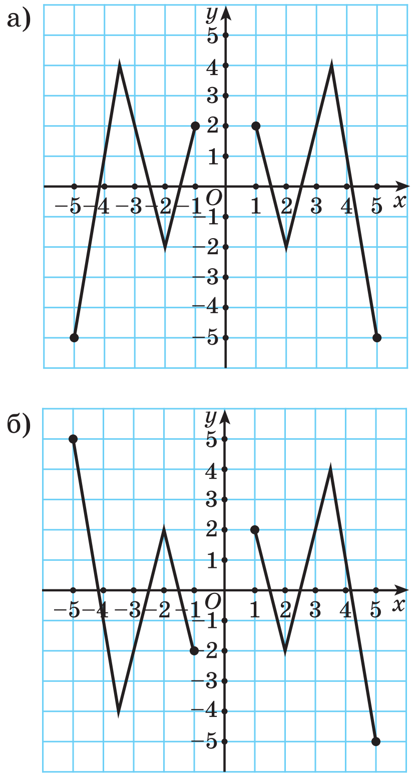


Рис. 31



1. Существуют ли функции, определенные на множестве всех действительных чисел, которые одновременно являются:

а) четными и возрастающими;
б) нечетными и убывающими?

2. Можно ли знак «?» на схеме (рис. 32) заменить названием вида функции? Если можно, приведите пример.

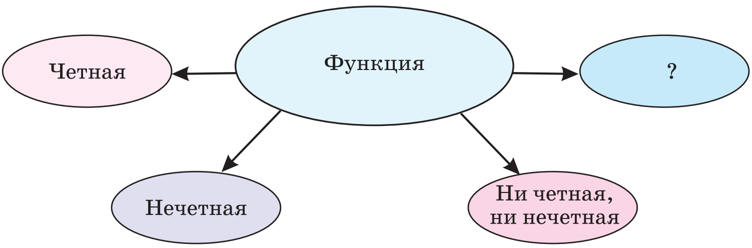


Рис. 32

2.88. Выберите множество чисел, которое не может являться областью определения четной или нечетной функции:

а) $(-10;\ 10)$; б) $[-5;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ 5]$;

в) $[-1;\ 3]$; г) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2.89. На рисунке 33 выберите изображения графиков:

а) четных функций; б) нечетных функций.

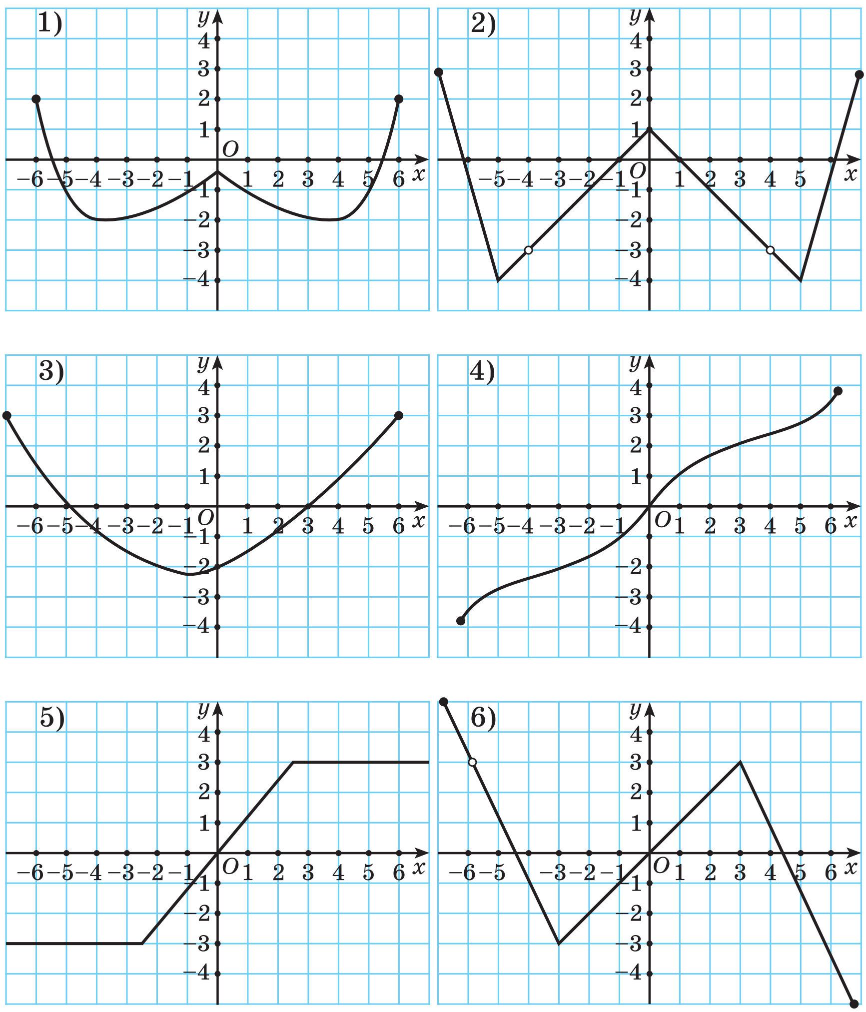


Рис. 33

2.90. На рисунке 34 изображена часть графика функции $y = f(x)$ для $x \in [-7; -1]$. Изобразите в тетради часть графика этой функции для $x \in [1; 7]$, если известно, что она является: а) четной; б) нечетной.

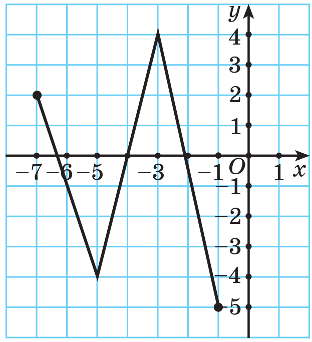


Рис. 34

2.91. На рисунке 35 изображена часть графика функции $y = f(x)$ для всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant 0$. Изобразите в тетради график функции на всей ее области определения, зная, что эта функция: а) четная; б) нечетная. Для каждого случая найдите $f(-1)$; $f(-4)$.

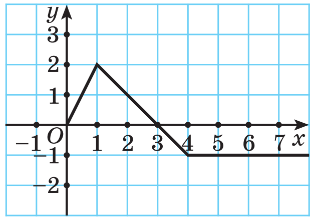


Рис. 35

2.92. На рисунке 36 изображена часть графика четной функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-7; 7]$. Найдите значение выражения $f(-2) + f(-6)$.

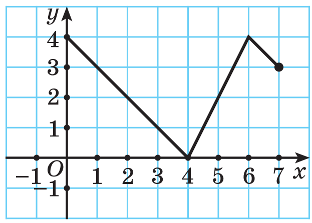


Рис. 36

2.93. Функция $y = f(x)$ является четной и $f(7) = -5$; $f(-8) = 3$. Найдите значение выражения $3f(-7) + f(8)$.

2.94. Функция $y = f(x)$ является нечетной и $f(-3) = 10$; $f(1) = -2$. Найдите значение выражения $2f(3) - 4f(-1)$.

2.95. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел, и точки $A(-7; 5)$ и $B(-2; 9)$ принадлежат графику данной функции. Найдите значение выражения $f(7) + f(2)$, если известно, что график функции симметричен относительно: а) оси ординат; б) начала координат.

2.96. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-6; 6]$ и является нечетной. Ее график для $x \leqslant 0$ изображен на рисунке 37. Найдите количество корней уравнения $f(x) = 0$. Решите неравенство $f(x) < 0$.

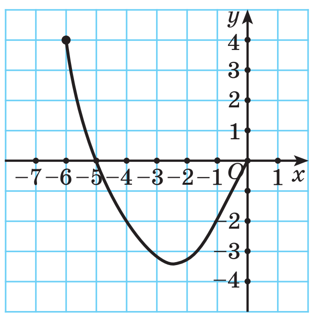


Рис. 37

2.97. Используя алгоритм, докажите, что функция является четной:

а) $f(x) = 3x^4 + 5x^2$; б) $f(x) = 5|x| - 2$;

в) $f(x) = \frac{7}{x^2}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

2.98. Приведите примеры линейной и квадратичной функций, являющихся четными.

2.99. Используя алгоритм, докажите нечетность функции:

а) $f(x) = x^3 + 2x$; б) $f(x) = \frac{7}{x^5}$;

в) $f(x) = x|x|$; г) $f(x) = 9x^7$.

2.100. Приведите пример линейной функции, являющейся нечетной.

2.101. Докажите, что функция не является ни четной, ни нечетной:

а) $f(x) = 3x + 1$; б) $f(x) = x^2 + 4x$; в) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

2.102. Исследуйте функцию на четность:

а) $f(x) = -2x^5$; б) $f(x) = 3|x| + 1$;

в) $f(x) = \sqrt{x - 8}$; г)* $f(x) = |x + 7| - |x - 7|$.

Из данных функций выберите функции, графики которых симметричны относительно оси ординат; относительно начала координат.

2.103. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке [–7; 7] и является нечетной. Часть ее графика для $x \geqslant 0$ изображена на рисунке 38.

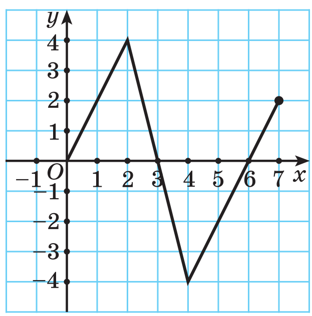


Рис. 38

Найдите:

а) множество значений функции;

б) нули функции;

в) промежутки знакопостоянства функции;

г) промежутки монотонности функции.

2.104. Может ли функция быть и четной, и нечетной одновременно? Если да, то приведите пример такой функции.

2.105*. Известно, что функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел, является четной и $f(a) \neq 0$. Верно ли, что:

а) $f(a) + f(-a) = 0$; б) $\dfrac{f(a)}{f(-a)} = 1$;

в) $f(a) \cdot f(-a) < 0$; г) $f(a) - f(-a) = 0$?

Ответьте на эти же вопросы, если функция $y = f(x)$ является нечетной.

2.106*. Известно, что функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и является нечетной. Может ли выполняться равенство $f(0) = 7$?

2.107*. Найдите, при каких значениях числа a функция $f(x) = -8x^2 + ax + 5$ является четной.

2.108. Определите, может ли областью определения четной или нечетной функции являться множество чисел:

а) $[-3;\ 3]$; б) $\left[-\sqrt{2};\, 0\right) \cup \left(0;\, \sqrt{2}\right]$;

в) $(-4;\ 4]$; г) $[-7;\, -1) \cup (-1;\, 1) \cup (1;\, 7]$.

2.109. На одном из рисунков 39, *а—г* изображен график четной функции. Выберите этот рисунок.

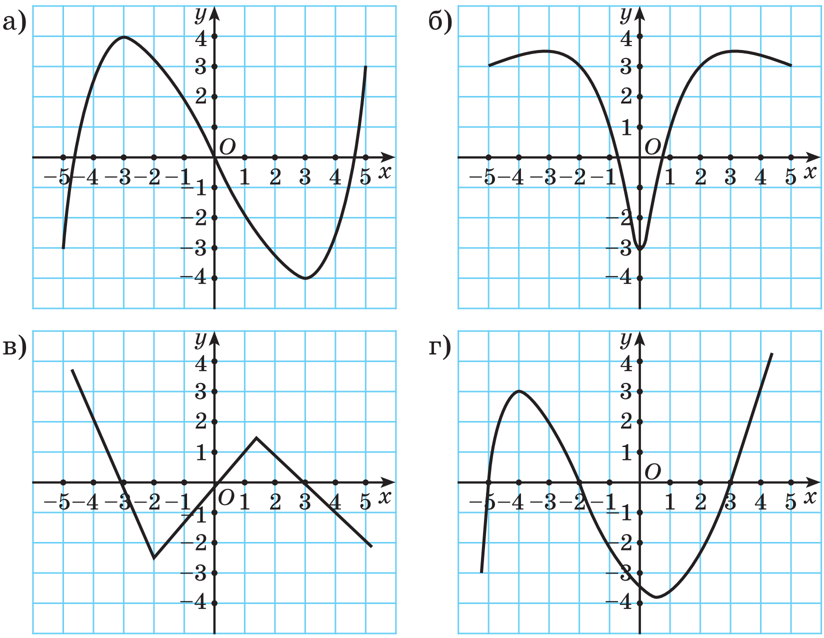


Рис. 39

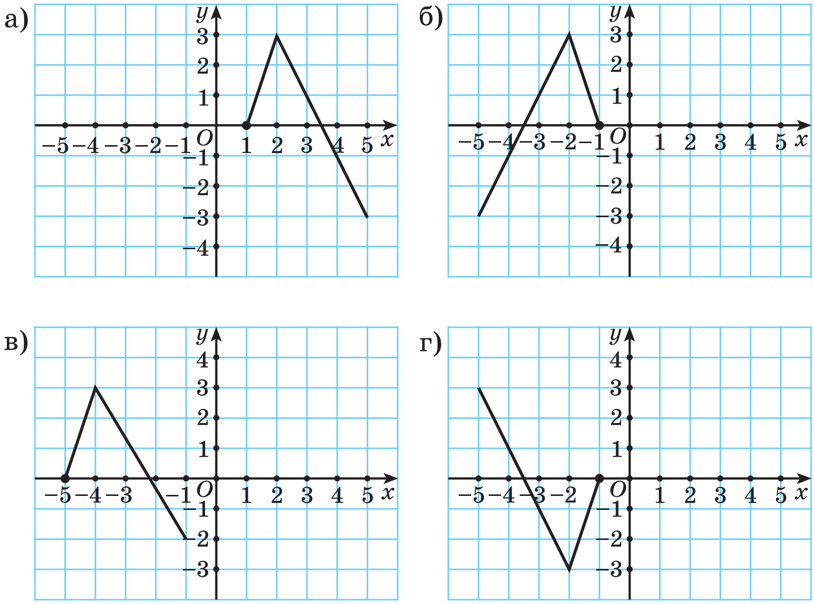


Рис. 40

2.110. Функция $y = f(x)$ является нечетной и определена при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. На рисунке 40, *а* изображена часть графика этой функции при $x \geqslant 1$. Среди рисунков 40, *б—г* выберите изображение части графика этой же функции для $x \leqslant -1$.

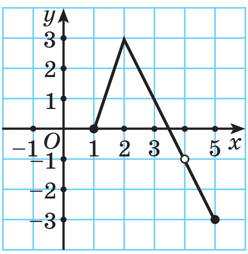


Рис. 41

2.111. На рисунке 41 изображена часть графика функции $y = f(x)$ при $x \geqslant 1$. Изобразите в тетради часть графика этой же функции для $x \leqslant -1$, если известно, что функция $y = f(x)$ является:

а) четной; б) нечетной.

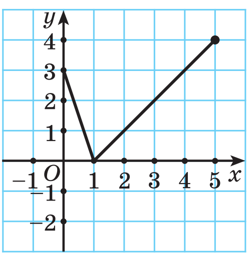


Рис. 42

2.112. На рисунке 42 изображена часть графика четной функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-5; 5]$. Найдите значение выражения $f(-3) + f(-4)$.

2.113. На рисунке 43 изображена часть графика функции $y = f(x)$ для всех x, удовлетворяющих условию $x \leqslant 0$. Изобразите в тетради график функции $y = f(x)$, зная, что она: а) четная; б) нечетная. Для каждого случая найдите $f(2)$; $f(5)$.

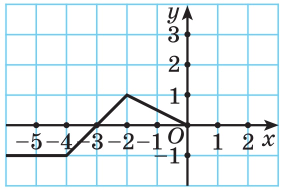


Рис. 43

2.114. Для функции $y = f(x)$ известно, что $f(-2) = -4$; $f(7) = 3$. Найдите значение выражения $f(2) + f(-7)$, если функция $y = f(x)$ является:

а) четной; б) нечетной.

2.115. Известно, что функция $y = f(x)$ четная. На рисунке 44 изображена часть графика этой функции для $x \geqslant 0$. Найдите количество корней уравнения $f(x) = 0$. Решите неравенство $f(x) > 0$.

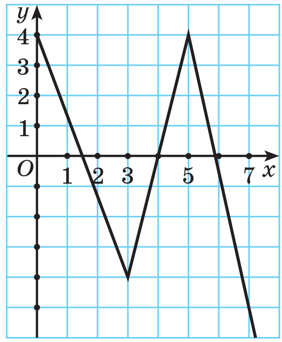


Рис. 44

2.116. Используя алгоритм, докажите, что функция является четной:

а) $f(x) = 6x^4 + 3x^2$;

б) $f(x) = |3x| + x^2$;

в) $f(x) = \dfrac{6}{x^4}$.

2.117. Используя алгоритм, докажите, что функция является нечетной:

а) $f(x) = \dfrac{5}{x}$; б) $f(x) = 2x^3 - x$; в) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

2.118. Докажите, что функция не является ни четной, ни нечетной:

а) $f(x) = 7 - 2x$; б) $f(x) = x^2 - 3x$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

2.119. Функция $y = f(x)$ является четной и определена на отрезке $[-7; 7]$. Часть ее графика для $x \leqslant 0$ изображена на рисунке 45. Найдите:

а) множество значений функции; б) нули функции; в) промежутки знакопостоянства функции; г) промежутки монотонности функции.

2.120*. Известно, что функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и на промежутке $(0; +\infty)$ принимает только отрицательные значения. Какие значения принимает данная функция на промежутке $(-\infty; 0)$, если она является: а) четной; б) нечетной?

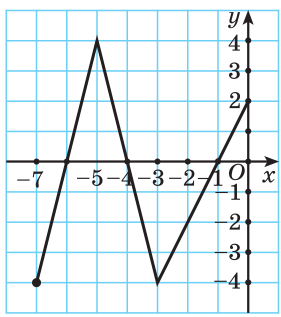


Рис. 45

2.121. Выберите все верные утверждения:

а) 3 — делитель числа 26 373; б) 769 538 кратно 2;
в) 0 — делитель числа 17; г) 55 556 кратно 5;
д) 12 345 678 делится на 9.

2.122. Вычислите $10^3 : 0{,}0001 \cdot 100^{-3}$.

2.123. Решите двойное неравенство $-2 < 1 - 3x \leqslant 7$.

2.124. Зная, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 4x - 7 = 0$, найдите значение выражения:

а) $x_1 + x_2$; б) $x_1 x_2$; в) $x_1^2 + x_2^2$.

2.125. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} - \frac{4}{\sqrt{6}-2}\right) \cdot \left(\sqrt{6} + 7\right).$$

2.126. Из деревни в город вышел турист. Первую половину пути он шел пешком со скоростью 5 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Оставшуюся часть пути он проехал на автобусе. Найдите среднюю скорость движения туриста на всем маршруте, если скорость автобуса равна 45 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

2.127. Найдите множество значений функции

$$y = (x - 3)^2 + (x + 1)^2.$$

2.128. Упростите выражение

$$\left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{1}{a^2-b^2} : \frac{a+b}{b^2-2ab+a^2}\right) \cdot \frac{a^2+ab}{a-b}.$$

§ 9. Построение графиков функций $y = f(x) \pm b$, $y = f(x \pm a)$

2.129. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью ординат:

а) $f(x) = -3x + 5$; б) $f(x) = x^2 + 3x - 5$.

2.130. Сравните значения функций $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 3$ и $h(x) = x^2 + 5$ при значении аргумента, равном 2.

2.131. Постройте в одной системе координат графики функций $f(x) = x^2$; $f(x) = (x - 1)^2$; $f(x) = x^2 - 3$.

Ранее вы рассматривали такие преобразования геометрических фигур, как симметрию относительно точки, симметрию относительно прямой и др.

Вам известно, что графики четных функций симметричны относительно оси ординат (например, $y = x^2$), а нечетных — относительно начала координат (например, $y = x^3$).

Геометрические представления можно применять для построения графиков одних функций, используя графики других, уже известных функций.

Рассмотрим функции $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x} + 4$. Составим таблицу некоторых значений этих функций и построим их графики (рис. 46).

x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} + 4$	4	5	6	7	8

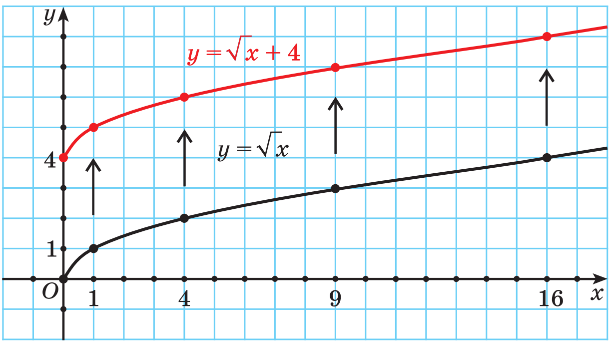


Рис. 46

Сравним расположение точек графиков этих функций, имеющих одинаковые абсциссы. Например, рассмотрим точку (1; 1) на первом графике и точку (1; 5) на втором. Эти точки лежат на прямой, параллельной оси ординат, причем точка (1; 5) находится на 4 единицы выше точки (1; 1). Точка (4; 6) лежит на 4 единицы выше точки (4; 2). Таким же образом расположены все другие точки этих графиков, имеющие одинаковые абсциссы. Можно сделать вывод, что график функции $y = \sqrt{x} + 4$ получен сдвигом (параллельным переносом) графика $y = \sqrt{x}$ на 4 единицы вверх вдоль оси ординат.

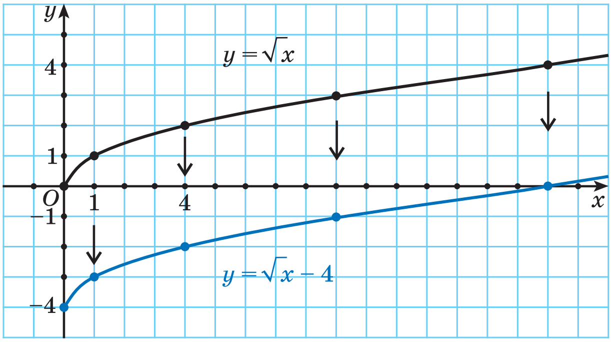


Рис. 47

Рассматривая точки графиков функций $y=\sqrt{x}-4$ и $y=\sqrt{x}$ с одинаковыми абсциссами (рис. 47), заметим, что график функции $y=\sqrt{x}-4$ получен сдвигом (параллельным переносом) графика $y=\sqrt{x}$ на 4 единицы вниз вдоль оси ординат.

График функции

$$\boldsymbol{y = f(x) + b}$$

можно получить сдвигом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на b единиц вверх, если $b > 0$ (рис. 48, *а*).

График функции

$$\boldsymbol{y = f(x) - b}$$

можно получить сдвигом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на b единиц вниз, если $b > 0$ (рис. 48, *б*).

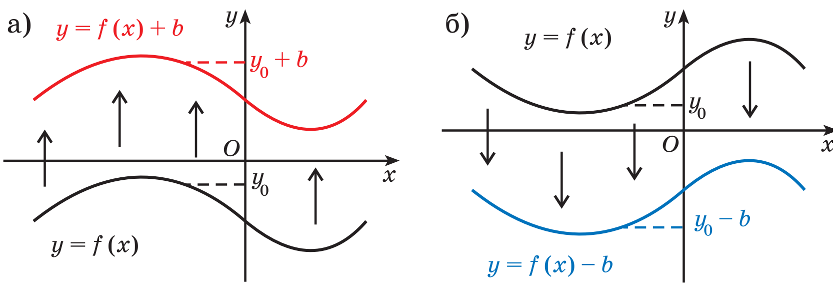
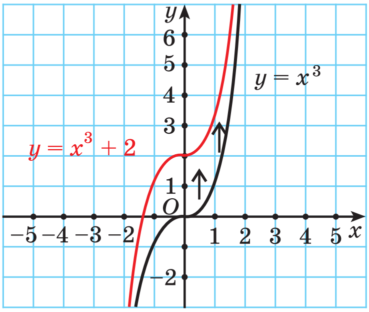


Рис. 48

Например, на рисунке 49 показано построение графиков функций $y=x^3+2$ и $y=\dfrac{1}{x}-2$.



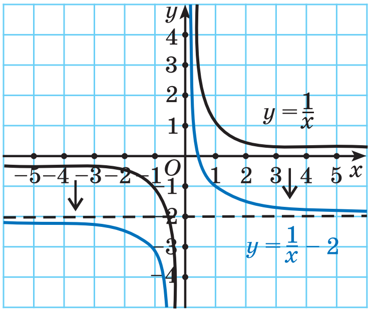


Рис. 49

Рассмотрим функции $y = x^3$ и $y = (x - 4)^3$. Составим таблицу некоторых значений этих функций и построим их графики (рис. 50).

x	−2	0	1	2	4	5
$y = x^3$	−8	0	1	8	64	125
$y = (x - 4)^3$	−216	−64	−27	−8	0	1

Определим значения аргумента, при которых обе функции принимают одинаковые значения. Например, значение $y = 0$ первая функция принимает при $x = 0$, а вторая — при $x = 4$. Значение $y = 1$ первая функция принимает при $x = 1$, а вторая — при $x = 5$.

Можно заметить, что функция $y = (x - 4)^3$ принимает те же значения, что и функция $y = x^3$, на 4 единицы «позже».

Графически это означает, что график функции $y = (x - 4)^3$ получен сдвигом (параллельным переносом) графика функции $y = x^3$ на 4 единицы вправо вдоль оси абсцисс (см. рис. 50).

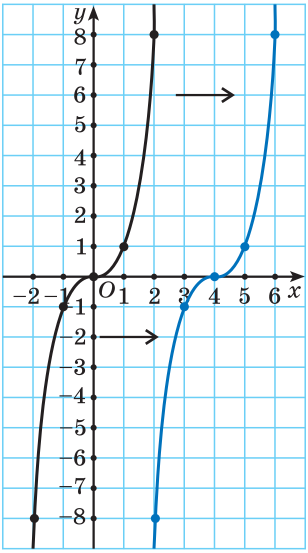


Рис. 50

Рассматривая графики функций $y = x^3$ и $y = (x + 4)^3$, заметим, что вторая функция принимает те же значения, что и первая, на 4 единицы «раньше».

Графически это означает, что для получения графика функции $y = (x + 4)^3$ точки графика функции $y = x^3$ сдвигают на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс (рис. 51).

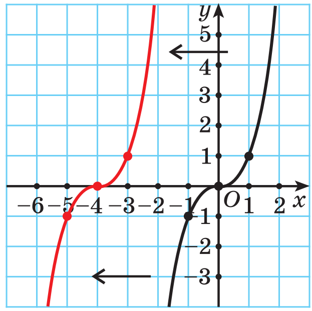


Рис. 51

График функции

$\boldsymbol{y = f(x - a)}$

можно получить сдвигом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если $a > 0$ (рис. 52, *а*).

График функции

$\boldsymbol{y = f(x + a)}$

можно получить сдвигом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц влево, если $a > 0$ (рис. 52, *б*).

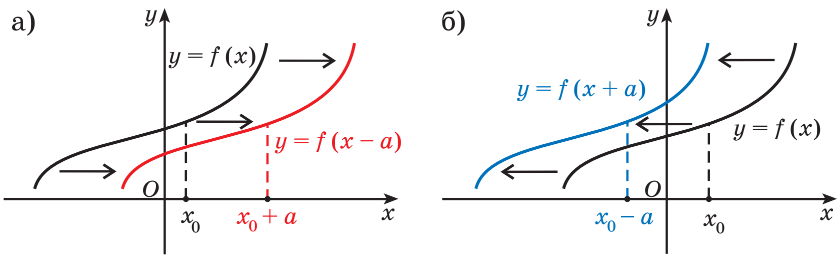


Рис. 52

Например, на рисунке 53 показано построение графиков функций $y = 2(x - 6)^2$ и $y = \dfrac{1}{x+2}$.

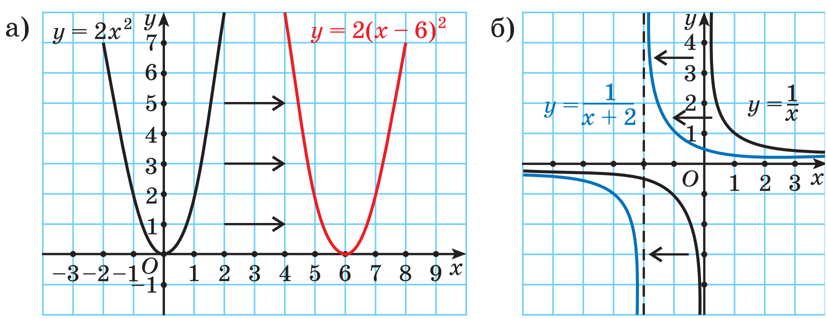
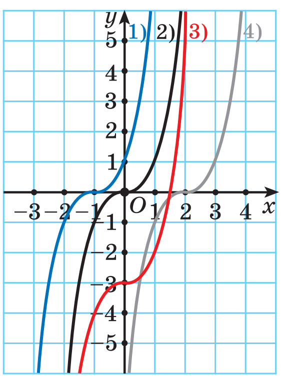


Рис. 53

Построение графиков функций $y = f(x) \pm b$, $y = f(x \pm a)$	
1. График функции $y = f(x) - 3$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси: а) ординат на 3 единицы вверх; б) абсцисс на 3 единицы вправо; в) абсцисс на 3 единицы влево; г) ординат на 3 единицы вниз. Выберите правильный ответ.	Так как рассматриваются функции $y = f(x)$ и $y = f(x) - b$ при $b = 3$, то график функции $y = f(x) - 3$ получен сдвигом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на 3 единицы вниз. Правильный ответ г).
2. График какой из функций получен из графика функции $y = 2x^2$ его сдвигом вдоль оси абсцисс на 3 единицы вправо: а) $y = 2x^2 + 3$; б) $y = (2x + 3)^2$; в) $y = (2x - 3)^2$; г) $y = 2(x - 3)^2$?	Рассматриваются функции $y = f(x)$ и $y = f(x - a)$ при $a = 3 > 0$. Сдвигом графика функции $y = 2x^2$ вдоль оси абсцисс на 3 единицы вправо получен график функции $y = 2(x - 3)^2$. *Ответ*: г).
3. Установите зависимость между графиками функций (рис. 54) и их аналитическим представлением: а) $y = x^3$; б) $y = (x + 1)^3$; в) $y = (x - 2)^3$; г) $y = x^3 - 3$.  Рис. 54	а) Графиком функции $y = x^3$ является кубическая парабола 2). б) Так как график функции $y = (x + 1)^3$ получается из графика функции $y = x^3$ сдвигом его на 1 единицу влево вдоль оси абсцисс, то графиком функции $y = (x + 1)^3$ является кубическая парабола 1). в) Функции $y = (x - 2)^3$ соответствует график 4), поскольку график функции $y = (x - 2)^3$ получается сдвигом графика функции $y = x^3$ на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс. г) Функции $y = x^3 - 3$ соответствует график 3), поскольку график функции $y = x^3 - 3$ получается сдвигом графика функции $y = x^3$ на 3 единицы вниз вдоль оси ординат.

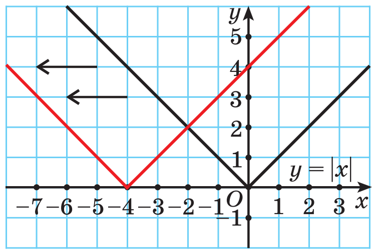
4. С помощью преобразований графика функции $y = |x|$ постройте график функции:

а) $y = |x + 4|$;

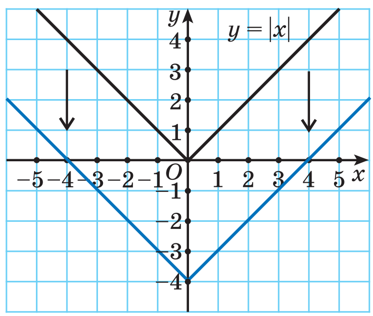
б) $y = |x| - 4$;

в) $y = |x - 3| + 2$.

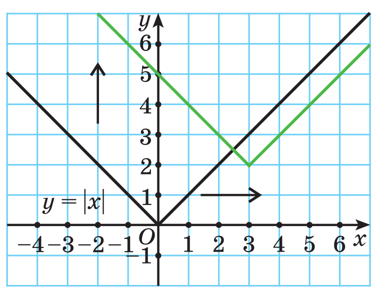
а) Выполним сдвиг графика функции $y = |x|$ на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс и получим график функции $y = |x + 4|$.



б) Выполним сдвиг графика функции $y = |x|$ на 4 единицы вниз вдоль оси ординат и получим график функции $y = |x| - 4$.



в) Выполним сдвиг графика функции $y = |x|$ на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вверх вдоль оси ординат и получим график функции $y = |x - 3| + 2$.



Запишите формулы, соответствующие графикам функций, полученным сдвигами графика функции $y = f(x)$ (рис. 55).

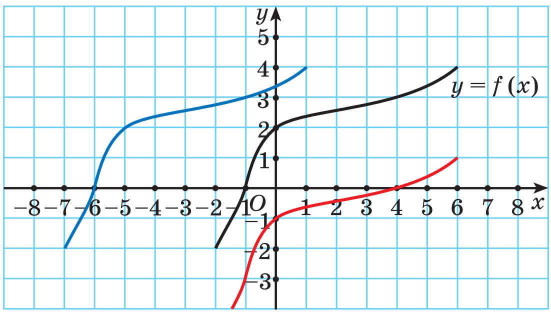


Рис. 55

2.132. График функции $y = (x + 2)^3$ получен из графика функции $y = x^3$ сдвигом вдоль оси:

а) ординат на 2 единицы вверх;

б) абсцисс на 2 единицы вправо;

в) абсцисс на 2 единицы влево;

г) ординат на 2 единицы вниз.

Выберите правильный ответ.

2.133. График какой из данных функций получен из графика функции $y = \sqrt{x}$ его сдвигом вдоль оси ординат на 5 единиц вверх:

а) $y = \sqrt{x - 5}$; б) $y = \sqrt{x} + 5$;

в) $y = \sqrt{x + 5}$; г) $y = \sqrt{x} - 5$?

2.134. Воспользуйтесь правилами преобразования графиков и запишите уравнение параболы, которую можно получить сдвигом параболы $y = x^2$ вдоль оси:

а) абсцисс на 7 единиц влево;

б) ординат на 4 единицы вниз;

в) ординат на 9 единиц вверх;

г) абсцисс на 1 единицу вправо;

д) абсцисс на 2 единицы влево и вдоль оси ординат на 3 единицы вверх;

е) абсцисс на 5 единиц вправо и вдоль оси ординат на 6 единиц вниз.

2.135. График какой из функций: $y = 3(x - 1)^2$ или $y = (3x - 1)^2$ — получен из графика функции $y = 3x^2$ сдвигом его на 1 единицу вправо вдоль оси абсцисс?

2.136. Выберите функцию, график которой получен из графика функции $y = -5x^2$ сдвигом его на 3 единицы вниз вдоль оси ординат:

а) $y = -5x^2 + 3$; б) $y = -5(x + 3)^2$;

в) $y = -5x^2 - 3$; г) $y = -(5x + 3)^2$.

2.137. Графики функций, изображенных на рисунке 56, получены из графика функции $y = |x|$ сдвигами его вдоль координатных осей. Запишите формулы этих функций.

2.138. Как нужно преобразовать график функции $y = \frac{4}{x}$, чтобы получить график функции:

а) $y = \frac{4}{x} + 2$; б) $y = \frac{4}{x} - 5$;

в) $y = \frac{4}{x + 3}$; г) $y = \frac{4}{x - 7}$;

д) $y = \frac{4}{x + 1} - 6$; е) $y = \frac{4}{x - 5} + 8$?

2.139. Используя правила преобразования графиков, определите, графика какой из данных функций нет на рисунке 57:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x + 2} - 3$;

в) $y = \sqrt{x - 3} - 2$; г) $y = \sqrt{x - 3} + 2$?

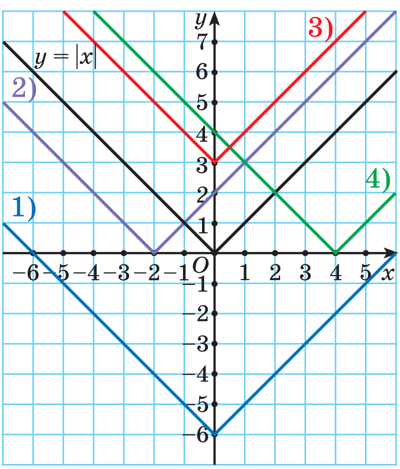


Рис. 56

2.140. С помощью каких преобразований графика функции $y = x^2$ можно построить график функции:

а) $y = (x - 2)^2$;

б) $y = (x + 4)^2$;

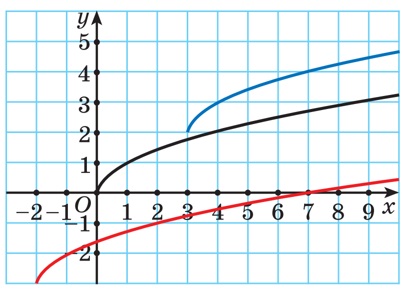


Рис. 57

в) $y = x^2 - 3$; г) $y = x^2 + 1$;
д) $y = (x - 4)^2 - 5$; е) $y = (x + 3)^2 + 1$?
Постройте эти графики.

2.141. Представьте функцию $y = x^2 + 8x + 10$ в виде $y = (x - m)^2 + n$ и постройте ее график.

2.142. С помощью преобразований графика функции $y = x^3$ постройте график функции:
а) $y = (x - 2)^3$; б) $y = x^3 - 3$;
в) $y = (x + 1)^3 - 2$; г) $y = (x - 3)^3 + 1$.

2.143. В одной системе координат постройте графики функций:
а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x - 2|$; в) $f(x) = |x + 3|$;
г) $f(x) = |x| - 4$; д) $f(x) = |x| + 1$; е) $f(x) = |x - 4| + 3$.

2.144. На рисунке 58 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:
а) $y = f(x - 2)$; б) $y = f(x + 3)$;
в) $y = f(x) - 1$; г) $y = f(x) + 4$.

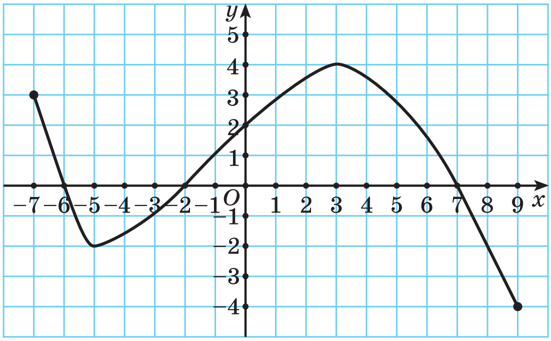


Рис. 58

2.145. С помощью преобразований графика функции $y = f(x)$, изображенного на рисунке 59, постройте график функции:
а) $y = f(x + 4) - 3$;
б) $y = f(x - 2) + 5$.

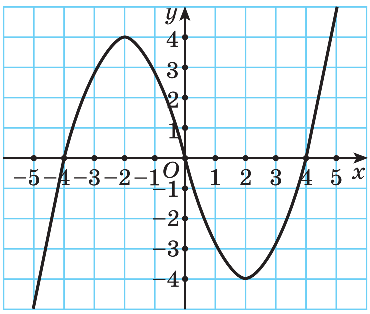


Рис. 59

2.146. Выберите функцию, график которой получен из графика функции $y = \frac{8}{x}$ сдвигом его на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единицы вверх вдоль оси ординат:

а) $y = \frac{8}{x+2} + 3$; б) $y = \frac{8}{x-2} + 3$; в) $y = \frac{8}{x+3} - 2$;

г) $y = \frac{8}{x+2} - 3$; д) $y = \frac{8}{x-3} + 2$.

Постройте график этой функции.

2.147. С помощью преобразований графика функции $y = -x^2$ постройте графики функций, предварительно представив их в виде $y = -(x-m)^2 + n$:

а) $y = -x^2 + 6x - 9$; б) $y = -x^2 - 10x - 23$;
в) $y = -x^2 + 2x + 6$; г) $y = -x^2 - 4x + 1$.

2.148*. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g(x) = 2x^2$ сдвигом его на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс. Найдите ординату точки пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $x = 15$.

2.149*. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g_1(x) = -3x^2$ сдвигом его на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вверх вдоль оси ординат. А график функции $y = h(x)$ получен из графика функции $g_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ сдвигом его на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вниз вдоль оси ординат. Имеют ли общие точки графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$?

2.150*. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и $E(f) = [-1;\ 7]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x-2)$; б) $y = f(x) + 4$;
в) $y = f(x-1) - 3$; г) $y = f(x-3) + 5$.

2.151*. Функция $y = f(x)$ на промежутке $(-\infty;\ 4]$ возрастает, а на промежутке $[4;\ +\infty)$ убывает. Найдите промежуток возрастания функции:

а) $y = f(x+1)$; б) $y = f(x) - 7$;
в) $y = f(x-3)$; г) $y = f(x+2) - 4$.

2.152*. Можно ли определить, является ли функция:

а) $y = f(x) + 8$; б) $y = f(x) - 3$;
в) $y = f(x+7)$; г) $y = f(x-2)$ — четной, если известно, что функция $y = f(x)$ является четной?

2.153*. График функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = 3$. Определите, какая из данных функций является четной:

а) $y = f(x - 3)$; б) $y = f(x) - 3$;

в) $y = f(x) + 3$; г) $y = f(x + 3)$.

2.154. График функции $y = x^2 - 4$ получен из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль оси:

а) ординат на 4 единицы вверх; б) абсцисс на 4 единицы вправо; в) абсцисс на 4 единицы влево; г) ординат на 4 единицы вниз. Выберите правильный ответ.

2.155. Определите, график какой из данных функций получен из графика функции $y = |x|$ сдвигом его вдоль оси абсцисс на 3 единицы влево:

а) $y = |x - 3|$; б) $y = |x| + 3$;

в) $y = |x + 3|$; г) $y = |x| - 3$.

2.156. Запишите формулу функции, график которой можно получить сдвигом кубической параболы $y = x^3$ вдоль оси:

а) абсцисс на 2 единицы вправо; б) ординат на 3 единицы вниз; в) ординат на 5 единиц вверх; г) абсцисс на 9 единиц влево; д) абсцисс на 3 единицы влево и вдоль оси ординат на 5 единиц вверх; е) абсцисс на 6 единиц вправо и вдоль оси ординат на 7 единиц вниз.

2.157. Выберите функцию, график которой получен из графика функции $y = 4x^2$ сдвигом его на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс:

а) $y = 4(x + 2)^2$; б) $y = 4x^2 - 2$;

в) $y = 4(x - 2)^2$; г) $y = (4x - 2)^2$.

2.158. Используя правила преобразования графиков, запишите формулы функций, графики которых изображены на рисунке 60, если они получены из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом его вдоль координатных осей.

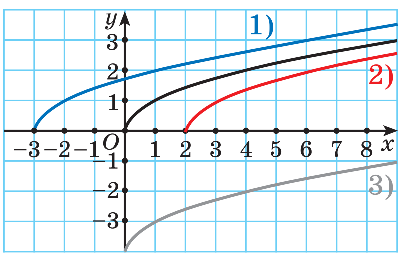


Рис. 60

2.159. С помощью каких преобразований графика функции $y = -\frac{2}{x}$ можно получить график функции:

а) $y = -\frac{2}{x} - 1$; б) $y = -\frac{2}{x+5}$;

в) $y = -\frac{2}{x} + 7$; г) $y = -\frac{2}{x-8}$?

Запишите формулу функции, график которой можно получить из графика функции $y = -\frac{2}{x}$ сдвигом его на 3 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 5 единиц вниз вдоль оси ординат.

2.160. На рисунке 61, *а* изображен график функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Среди рисунков 61, *б*—*г* выберите изображение графика функции $y = a(x-2)^2 - 1$.

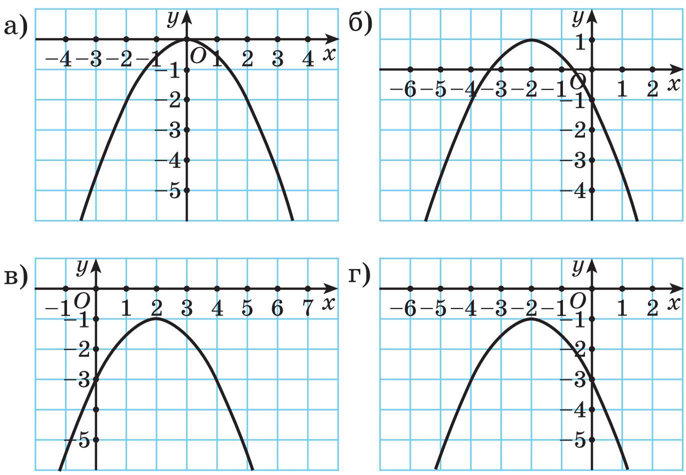


Рис. 61

2.161. Примените правила преобразования к графику функции $y = x^2$ и постройте график функции:

а) $y = (x-3)^2$; б) $y = x^2 + 4$; в) $y = (x+2)^2 - 1$.

2.162. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x+2}$; в) $y = \sqrt{x} - 3$;

г) $y = \sqrt{x+1} - 4$; д) $y = \sqrt{x-5} + 1$.

2.163. На рисунке 62 изображен график функции $y = f(x)$. Перенесите рисунок в тетрадь и постройте график функции:

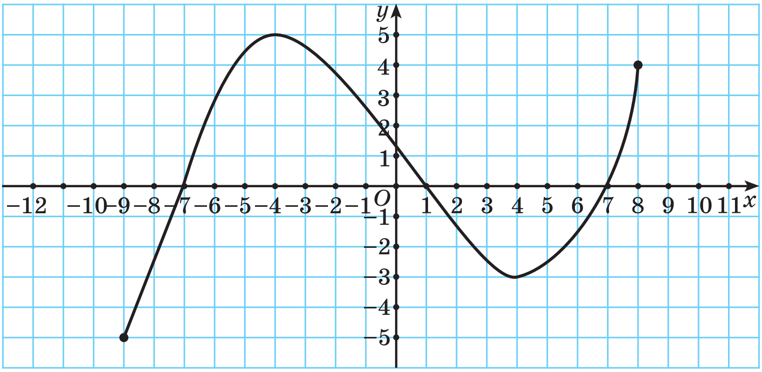


Рис. 62

а) $y = f(x + 4)$; б) $y = f(x - 2)$;
в) $y = f(x) + 3$; г) $y = f(x) - 5$.

2.164. С помощью преобразований графика функции $y = f(x)$, изображенного на рисунке 63, постройте график функции:

а) $y = f(x - 3) + 2$;
б) $y = f(x + 4) - 1$.

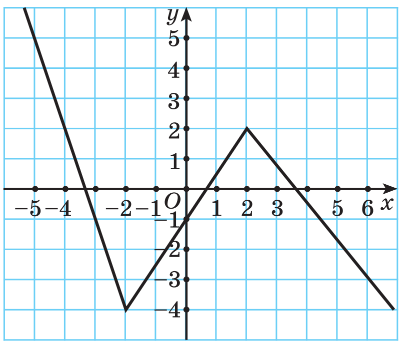


Рис. 63

2.165. Постройте график функции $y = \frac{6}{x+3} - 2$, преобразовав график функции $y = \frac{6}{x}$.

2.166. С помощью преобразований графика функции $y = x^2$ постройте графики функций, предварительно представив их в виде $y = (x - m)^2 + n$:

а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = x^2 - 10x + 20$;
в) $y = x^2 + 6x + 10$; г) $y = x^2 - 8x + 1$.

2.167*. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g(x) = x^3$ сдвигом его на 5 единиц вниз вдоль оси ординат. Найдите ординату точки пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $x = -4$.

2.168*. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g(x) = -2x^2$ сдвигом его на 6 единиц вправо вдоль оси абсцисс и на 8 единиц вверх вдоль оси ординат. Найдите нули функции $y = f(x)$.

2.169*. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и $E(f) = [0;\ 8]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x + 3)$; б) $y = f(x) - 5$;
в) $y = f(x + 6) + 9$; г) $y = f(x - 7) - 1$.

2.170*. Известно, что функция $y = f(x)$ является четной. Верно ли, что четной является функция $y = f(x) + b$, где $b \neq 0$?

2.171. Найдите число, обратное числу 3,5.

2.172. Двухтомник стоит 25,6 р. Первый том дешевле второго на 40 %. Сколько рублей стоит первый том?

2.173. Оцените периметр прямоугольника (P) со сторонами a и b, если известно, что $7 \leqslant a < 8$; $14 < b \leqslant 15$.

2.174. Упростите выражение $\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} + \sqrt{4a^2}$ при $a < 0$, $b > 0$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение функции, ее области определения и множества значений, способы задания функций;
- уметь находить значения функции по значению аргумента; значения аргумента по значению функции; область определения и множество значений функций, заданных различными способами;
- знать определение нулей функции, промежутков знакопостоянства функции;
- уметь находить нули функции, промежутки знакопостоянства функции, заданной различными способами;
- знать определения возрастающей и убывающей функции на промежутке, определение монотонной функции на промежутке;
- уметь находить промежутки монотонности функции, заданной различными способами;
- знать определение четной и нечетной функции;
- уметь применять алгоритм исследования функции на четность (нечетность);
- уметь выполнять построение графика функции $y = f(x) \pm b$, зная график функции $y = f(x)$;
- уметь выполнять построение графика функции $y = f(x \pm a)$, зная график функции $y = f(x)$.

Я проверяю свои знания

1. Найдите $f(-2)$, если:

а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = -x^2 - 1$;

в) $f(x) = \frac{1}{2-x}$; г) $f(x) = \sqrt{7-x}$.

2. Выберите функции, графикам которых принадлежит точка $N(-12;\ 1)$:

а) $y = -12x$; б) $y = -x + 12$; в) $y = -\frac{12}{x}$;
г) $y = x + 13$; д) $y = x^2 + 145$.

3. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке 64:

а) $y = |x+2| + 1$;

б) $y = -|x-2| - 1$;

в) $y = |x-2| - 1$;

г) $y = |x+2| - 1$;

д) $y = |x-1| - 2$.

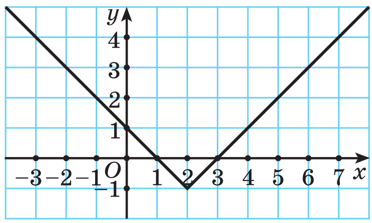


Рис. 64

4. Каким свойством обладает график четной функции? Нечетной функции? Известно, что функция $y = f(x)$ является четной, а функция $y = q(x)$ — нечетной, и $f(5) = 7$, $q(-1) = 6$. Найдите значение выражения $2f(-5) + q(1)$.

5. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $f(x) = 5x - 9$; б) $g(x) = x^2 - 11x + 30$; в) $h(x) = \frac{9}{x}$.

6. По графику функции, изображенному на рисунке 65, найдите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) нули функции; г) промежутки знакопостоянства функции; д) промежутки монотонности функции.

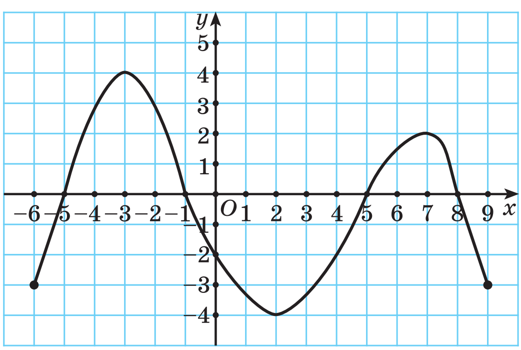


Рис. 65

7. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{8x}{x-4}$; б) $y = \dfrac{2}{x^2+6x+5}$;

в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{9-0{,}01x}}$; г) $y = \sqrt{8x - x^2}$;

д) $y = \dfrac{x+2}{x-4} - \sqrt{16 - x^2}$; е) $y = \sqrt{x-7} + \dfrac{8}{\sqrt{x^2-9x+14}}$.

8. Проанализируйте условие и найдите множество значений функции:

а) $f(x) = x^2 - 6$; б) $f(x) = |x| + 9$;

в) $f(x) = \sqrt{x+2} - 8$; г) $f(x) = -x^2 - 6x + 19$.

9. Докажите, что функция $y = (x-4)^2$ возрастает на промежутке $[4; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 4]$.

10. Найдите, при каких значениях числа a функция $f(x) = 5x^2 + 6ax - a$ не имеет нулей.

Практическая математика

1. На рисунке 66 изображен график, отражающий зависимость количества бензина n в баке автомобиля курьера от времени t.

а) Что произошло около 12.00?

б) Какое приблизительно время автомобиль курьера стоял в период с 9.00 до 19.00?

Рис. 66

в) Какая возможная часть рабочего дня курьера отражена на графике с 13.00 до 14.00?

г) Назовите правдоподобную причину, по которой график становится «круче» после 17.00.

2. Цена входного билета на стадион составляла 10 р. Руководство стадиона решило снизить цену билета так, чтобы выручка возросла на 12,5 % за счет предполагаемого увеличения числа зрителей. На какой процент увеличения числа зрителей рассчитывает руководство стадиона, если входной билет после снижения цены стал стоить 6 р.?

3. Тарифный оклад работника предприятия составляет x р. Надбавка за стаж составляет n % за каждые отработанные на предприятии n лет. По итогам работы за месяц работник может быть поощрен премией в размере y р. Из полученной суммы высчитывается взнос в пенсионный фонд в размере 1 % и профсоюзный взнос в размере 1 %, если работник является членом профсоюза. Заработная плата облагается также 13 %-м подоходным налогом. Составьте формулу для вычисления суммы, которую получит работник. По формуле найдите, сколько получит работник, отработавший на предприятии 10 лет, если $x = 400$ р., а y составляет 15 % от x.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание. Всегда ли по графикам уравнений системы можно определить решения системы уравнений? Определите число решений системы уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2. \end{cases}$ Попробуйте привести пример, когда число решений системы уравнений нельзя определить по графикам уравнений.

Готовимся к олимпиадам

1. Для функций $f(x) = \dfrac{x-2}{3x+4}$, $g(x) = \dfrac{2x+3}{5x-1}$ найдите $f(g(x))$; $g(f(x))$.

2. Найдите все функции f, удовлетворяющие уравнению $f(x) + (x-2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2$, $x \in \boldsymbol{R}$.

3. Функция $f(x)$ определена для всех $x \neq 0$ и удовлетворяет уравнению $f(2x) + 3f\left(\dfrac{1}{2x}\right) = x^2$. Найдите $f(x)$.

Глава 3

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 10. Дробно-рациональные уравнения

3.1. Решите уравнение $(3x - 2)(x + 4) = 0$.

3.2. Найдите область определения рациональной дроби $\frac{2x}{x - 6}$.

3.3. При каком значении переменной:

а) числитель дроби $\frac{2x - 1}{x^2 - 36}$ равен нулю;

б) знаменатель дроби $\frac{2x - 1}{x^2 - 36}$ равен нулю?

Рассмотрим задачу. В дроби числитель на 2 больше знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 3, то новая дробь будет равна $\frac{1}{2}$. Найдите знаменатель первоначальной дроби.

Решение. Обозначим знаменатель первоначальной дроби через x, тогда ее числитель равен $(x + 2)$.

Если числитель дроби уменьшить на 3, то получится числитель новой дроби: $(x + 2) - 3 = x - 1$. Знаменатель новой дроби после увеличения на 3 будет равен $(x + 3)$, а новая дробь будет иметь вид $\frac{x - 1}{x + 3}$. Так как по условию задачи она равна $\frac{1}{2}$, то получим уравнение $\frac{x - 1}{x + 3} = \frac{1}{2}$. В левой части этого уравнения записано дробное рациональное выражение.

Решение многих задач приводит к уравнениям, у которых в левой или правой (или в той и другой) частях записаны дробные рациональные выражения. Такие уравнения называют **дробно-рациональными уравнениями.**

Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{x}{x - 6} = 2$$

$$x - 4 = \frac{5}{x^2 + 2}$$

$$\frac{x + 6}{x - 8} = 7 - \frac{x + 1}{x + 5}$$

Например, уравнения $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$; $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{x + 1}{x - 1} = 3$; $x^2 + 3x + \frac{6}{2 - 3x - x^2} = 1$ являются дробно-рациональными.

Рассмотрим дробно-рациональное уравнение $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$. Это уравнение можно решить, используя **условие равенства рациональной дроби нулю.**

Рациональная дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, получим:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Вернемся к уравнению $\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{2}$. Выполним тождественные преобразования уравнения.

1) Перенесем все слагаемые из правой части уравнения в левую: $\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3} - \frac{1}{2} = 0.$

2) Преобразуем левую часть уравнения к рациональной дроби: $\frac{x-1}{x+3} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2 - x - 3}{2(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{2(x+3)} = 0.$

3) Применим условие равенства дроби нулю:

$$\frac{x-5}{2(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0, \\ 2(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

Чтобы решить дробно-рациональное уравнение, нужно:

① Перенести все слагаемые из правой части уравнения в левую. ② Преобразовать левую часть уравнения к рациональной дроби. ③ Применить условие равенства дроби нулю. ④ Записать ответ.	Решите уравнение $\frac{9x^2 - 4}{x - 1} = \frac{5 - 10x}{1 - x}$. ① $\frac{9x^2 - 4}{x - 1} - \frac{5 - 10x}{1 - x} = 0.$ ② $\frac{9x^2 - 4}{x - 1} + \frac{5 - 10x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{9x^2 - 4 + 5 - 10x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{9x^2 - 10x + 1}{x - 1} = 0.$ ③ $\begin{cases} 9x^2 - 10x + 1 = 0, \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{9}, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$ ④ *Ответ*: $\frac{1}{9}$.

Пример 1. Решите уравнение

$$\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=3.$$

Решение. ① $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}-3=0.$

② $\frac{(x+2)(x-1)-(x+1)(x-2)-3(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-11x+6}{(x-2)(x-1)}=0.$

③ $\begin{cases} 3x^2-11x+6=0, \\ (x-2)(x-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=\frac{2}{3}, \end{array}\right. \\ x\neq 1,\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

④ *Ответ*: $\frac{2}{3}$; 3.

Пример 2. Решите уравнение

$$\frac{2}{a-3}=\frac{15}{a^2-6a+9}-1.$$

Решение. ① $\frac{2}{a-3}-\frac{15}{a^2-6a+9}+1=0.$

② $\frac{2}{a-3}-\frac{15}{(a-3)^2}+1=0 \Leftrightarrow \frac{2(a-3)-15+(a-3)^2}{(a-3)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2a-6-15+a^2-6a+9}{(a-3)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{a^2-4a-12}{(a-3)^2}=0.$

③ $\begin{cases} a^2-4a-12=0, \\ (a-3)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=6, \\ a=-2, \end{array}\right. \\ a\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6, \\ a=-2. \end{array}\right.$

④ *Ответ*: –2; 6.

Пример 3. Решите уравнение $x^2+3x+\frac{6}{2-3x-x^2}=1.$

Решение. Выполним замену переменной $x^2+3x=t$ и получим уравнение $t+\frac{6}{2-t}=1$, которое является дробно-рациональным. Решим его, применив алгоритм:

$t+\frac{6}{2-t}-1=0 \Leftrightarrow \frac{t(2-t)+6-(2-t)}{2-t}=0 \Leftrightarrow \frac{-t^2+3t+4}{2-t}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t - 4 = 0, \\ t \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = -1, \end{array}\right. \\ t \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = -1. \end{array}\right.$$

Подставим найденные значения t в равенство $x^2 + 3x = t$ и получим:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x = 4, \\ x^2 + 3x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1, \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: -4; 1; $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Дробно-рациональные уравнения используются как математические модели для решения задач, описывающих реальные ситуации.

Например, рассмотрим задачу. На тушение лесных пожаров площадью 200 га отправлено несколько вертолетов с водосливными устройствами. По информации метеорологов предполагается усиление ветра, поэтому было выделено еще 5 вертолетов, в связи с чем площадь для сброса воды каждым вертолетом уменьшилась на 20 га. Сколько вертолетов участвовало в тушении пожаров первоначально?

Решение.

① *Выясним, о каких величинах и зависимостях между ними в задаче идет речь.* В задаче речь идет о площади лесных пожаров и количестве вертолетов для тушения пожаров.

② *Выясним, какие значения величин и зависимости между ними известны.* Известна зависимость между количеством вертолетов и площадью для сброса воды.

③ *Выясним, какие значения величин и зависимости между ними не известны.* Неизвестно, сколько потребовалось вертолетов.

④ *Обозначим неизвестное значение одной величины через x, а остальные выразим через x и зависимости между величинами.* Обозначим через x первоначальное количество вертолетов и получим, что $(x + 5)$ вертолетов направлено на тушение пожаров после сообщения метеорологов. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Величины	Количество вертолетов, шт.	Общая площадь лесных пожаров, га	Площадь сброса воды вертолетом, га
Первоначальное значение	x	200	$\frac{200}{x}$
Значение после сообщения метеорологов	$x+5$	200	$\frac{200}{x+5}$

⑤ *Используя зависимости между известными и неизвестными значениями величин, составим уравнение (математическую модель задачи) и решим его.*

По условию задачи $\frac{200}{x+5}$ га на 20 га меньше, чем $\frac{200}{x}$ га. Значит, разность между бо́льшим и меньшим числом равна 20, т. е.

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+5} = 20 \Leftrightarrow \frac{200}{x} - \frac{200}{x+5} - 20 = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{x} - \frac{10}{x+5} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{50 - x^2 - 5x}{(x+5)x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 50 = 0, \\ x(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -10, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x \neq 0,\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

⑥ *Запишем ответ в соответствии со смыслом задачи.* Поскольку x — число вертолетов, то выбираем число 5.

Ответ: 5 вертолетов.

Многие задачи, описывающие реальные процессы, имеют одну и ту же математическую модель. К таким относятся, например, задачи на движение, работу и т. п.

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Два велосипедиста выехали одновременно из поселка A в поселок B. Скорость первого велосипедиста на 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости второго, поэтому он прибыл в поселок B на 0,5 ч раньше. С какими скоростями двигались велосипедисты, если расстояние между поселками равно 30 км?

Задача 2. Для заполнения водой резервуара объемом 30 м^3 используют два крана: первый кран заполняет резервуар на 0,5 ч быстрее второго, так как в час через него наливается на 2 м^3 больше, чем через второй. Найдите скорость заполнения резервуара водой через каждый кран.

В обеих задачах речь идет о процессах: в первой — о процессе движения, во второй — о процессе заполнения резервуара водой.

Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость	Результат (пройденный путь, объем воды в резервуаре)	Время
Движение первого велосипедиста	x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$	30 км	$\frac{30}{x}$ ч
Движение второго велосипедиста	$(x-2)$ $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$	30 км	$\frac{30}{x-2}$ ч
Заполнение резервуара водой через первый кран	x $\frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$	30 м^3	$\frac{30}{x}$ ч
Заполнение резервуара водой через второй кран	$(x-2)$ $\frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$	30 м^3	$\frac{30}{x-2}$ ч

Поскольку первый велосипедист прибыл в поселок на 0,5 ч раньше второго, а один кран заполняет резервуар на 0,5 ч быстрее другого, то уравнение $\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x} = 0{,}5$ является **математической моделью каждой из предложенных задач.** Решим полученное уравнение:

$$\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{60 - 0{,}5x^2 + x}{(x-2)x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5x^2 - x - 60 = 0, \\ (x-2)x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 12, \\ x = -10, \end{array}\right. \\ x \neq 2,\ x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12, \\ x = -10. \end{array}\right.$$

По условию каждой задачи подходит число 12.

Ответ: скорость первого велосипедиста 12 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, скорость второго велосипедиста 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: скорость заполнения резервуара водой через первый кран 12 $\frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$, через второй кран — 10 $\frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$.

Дробно-рациональные уравнения. Условие равенства дроби нулю

1. Является ли дробно-рациональным уравнение: а) $\frac{x}{3}+1=x$; б) $\frac{x-5}{x+5}=1$; в) $\frac{x^2-25}{x-5}=2x$; г) $\frac{x+5}{x-5}=\frac{1}{2}$?	Уравнение а) не является дробно-рациональным, так как его левая и правая части — целые рациональные выражения. Уравнения б)—г) являются дробно-рациональными, так как левые части этих уравнений — дробно-рациональные выражения.
2. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю: а) $\frac{x-6}{x+6}=0$; б) $\frac{x^2-36}{x-6}=0$; в) $\frac{x^2-6x}{x+6}=0$; г) $\frac{x+6}{x^2-36}=0$.	а) $\frac{x-6}{x+6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=0, \\ x+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ x\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$ *Ответ*: 6. б) $\frac{x^2-36}{x-6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-36=0, \\ x-6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6, \end{array}\right. \\ x\neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-6.$ *Ответ*: -6. в) $\frac{x^2-6x}{x+6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x=0, \\ x+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6, \end{array}\right. \\ x\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6. \end{array}\right.$ *Ответ*: 0; 6. г) $\frac{x+6}{x^2-36}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=0, \\ x^2-36\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6, \\ x\neq 6, \\ x\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\varnothing.$ *Ответ*: нет корней.
3. Какие из уравнений: а) $x+5=0$; б) $\frac{x-5}{x+5}=0$; в) $\frac{x^2-25}{x-5}=0$; г) $\frac{x+5}{x-5}=0$ — равносильны?	а) $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$; б) $\frac{x-5}{x+5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$; в) $\frac{x^2-25}{x-5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5$; г) $\frac{x+5}{x-5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5, \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5.$ *Ответ*: уравнения а), в), г) имеют один и тот же корень (уравнения равносильны).

Решение дробно-рациональных уравнений и уравнений, сводящихся к ним	
4. Решите уравнение: а) $\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x(x-3)}=\frac{3}{2x+6}$; б) $\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}$.	а) ① $\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x(x-3)}-\frac{3}{2x+6}=0$. ② $\frac{1}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{x(x-3)}-\frac{3}{2(x+3)}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2x-2x-6-3x^2+9x}{2x(x-3)(x+3)}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{3x^2-9x+6}{2x(x-3)(x+3)}=0$. ③ $\begin{cases} 3x^2-9x+6=0, \\ 2x(x-3)(x+3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ 2x(x-3)(x+3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$ ④ *Ответ*: 1; 2. б) $\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}=0$. Разложим на множители квадратный трехчлен в знаменателе первой дроби и получим: $\frac{x}{(x-2)(x-3)}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x+3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=0, \\ (x-2)(x-3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2{,}5, \\ (x-2)(x-3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2{,}5$. *Ответ*: 2,5.
5. Найдите нули функции $f(x)=\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}$.	Так как нули функции — это значения аргумента, при которых значение функции равно нулю, то для решения задачи нужно решить уравнение $\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}=0$.

	Используем условие равенства дроби нулю: $\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-7x^2+12x=0, \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-7x+12)=0, \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$ *Ответ*: 0; 3.
6*. Найдите корни уравнения $\frac{2x-1}{x}+\frac{x}{2x-1}=4{,}25.$	Выполним замену переменной в данном уравнении: $\frac{2x-1}{x}=t$. Получим уравнение $t+\frac{1}{t}=4\frac{1}{4}$, которое является дробно-рациональным. Решим его: $t+\frac{1}{t}-4\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}-\frac{17}{4}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{4t^2-17t+4}{4t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2-17t+4=0, \\ 4t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=\frac{1}{4}, \end{array}\right. \\ t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=\frac{1}{4}. \end{array}\right.$ Выполним подстановку найденных значений переменной t и получим: $\left[\begin{array}{l} \frac{2x-1}{x}=4, \\ \frac{2x-1}{x}=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}, \\ x=\frac{4}{7}. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-\frac{1}{2}$; $\frac{4}{7}$.
Моделирование реальных процессов с помощью дробно-рациональных уравнений	

Задача. Катер прошел 15 км по течению реки и 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Чему равна скорость катера при движении по озеру, если скорость течения реки 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение. В задаче идет речь о процессах движения катера по реке и по озеру. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость, $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$	Расстояние, км	Время, ч
Движение по озеру	x	4	$\frac{4}{x}$
Движение по реке	$x+4$	15	$\frac{15}{x+4}$

Так как по условию задачи на весь путь затрачен 1 ч, то составим уравнение: $\frac{4}{x}+\frac{15}{x+4}=1$. Решим его: $\frac{4}{x}+\frac{15}{x+4}=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-15x-16=0, \\ x(x+4)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=16, \\ x=-1. \end{array}\right.$ По условию подходит число 16.

Ответ: 16 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

1. Верно ли, что $x=1$ — корень уравнения:

а) $\frac{x-1}{x+1}=0$; б) $\frac{x^2-1}{x-1}=0$?

2. Выберите верные утверждения:

а) если числитель дроби равен нулю, то дробь равна нулю;
б) если дробь равна нулю, то ее числитель равен нулю;
в) если дробь не равна нулю, то ее числитель не равен нулю;
г) если числитель дроби не равен нулю, то дробь не равна нулю.

3.4. Из данных уравнений выберите все дробно-рациональные уравнения:

а) $\frac{x-2}{x+5}=0$; б) $\frac{x+4}{7}=12x$;

в) $9-x=\frac{x+8}{x^2-7}$; г) $\frac{3x}{x-1}=\frac{x+2}{x}$.

3.5. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю:

а) $\frac{x+2}{x-2}=0$; б) $\frac{3x-1}{x}=0$;

в) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$; г) $\frac{x-7}{x^2-49}=0$;

д) $\frac{x^2-6x}{2x-12}=0$; е) $\frac{x^2+7x}{x^2}=0$;

ж) $\frac{x^2-6x+5}{x-1}=0$; з) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$.

3.6. Какие из данных уравнений равносильны уравнению $\frac{9-x^2}{x-3}=0$:

а) $5x+15=0$; б) $\frac{x^2+4x+3}{x+1}=0$;

в) $x^2+3x=0$; г) $\frac{x^2-6x+9}{x+3}=0$?

3.7. Придумайте два дробно-рациональных уравнения, равносильных уравнению $8x-16=0$.

3.8. Используйте условие равенства дроби нулю и найдите все значения переменной, при которых дробь $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}$ равна нулю.

3.9. Решите уравнение, используя алгоритм:

а) $\frac{x-6}{x}=4$; б) $\frac{3x}{x+7}=1$; в) $\frac{9-x}{x}=-3$;

г) $\frac{3x-1}{x-6}=\frac{1}{5}$; д) $\frac{x^2+3}{x}=4$; е) $\frac{6x^2-4}{x}=5x$;

ж) $2x=\frac{x^2+x}{x-3}$; з) $\frac{25-7x^2}{6x}=-x$; и) $\frac{3x-20}{x-2}=x$;

к) $x+2=\frac{15}{x}$; л) $x-3=\frac{4}{x}$; м) $x=1+\frac{2}{x}$.

3.10. В обыкновенной дроби числитель на 5 меньше знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 7, то получится дробь $\frac{4}{19}$. Найдите исходную дробь.

3.11. Найдите все значения переменной, при которых равны значения выражений:

а) $\frac{4}{x+4}$ и $4-x$; б) $x+3$ и $\frac{1}{x+3}$.

3.12. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x-4}=\frac{16}{x-4}$; б) $\frac{x^2-x}{x-6}=\frac{5x}{x-6}$;

в) $\frac{x^2-7x}{x+10}=\frac{30}{x+10}$; г) $\frac{x^2-2x}{x-4}=\frac{4-3x}{4-x}$;

д) $\frac{x^2-2x}{2x-1}=\frac{5x-4}{1-2x}$; е) $\frac{x^2+2x}{x^2-3x}=\frac{x-18}{3x-x^2}$.

3.13. Составьте план решения и найдите нули функции:

а) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-5x}-\frac{7x+50}{x(x-5)}$; б) $f(x)=\frac{x^2-8x}{x^2-9}-\frac{18-x}{9-x^2}$.

3.14. Решите дробно-рациональное уравнение, используя алгоритм:

а) $\frac{x}{x+3} = \frac{1}{x-1}$; б) $\frac{x+10}{2-x} = \frac{x-2}{x}$;

в) $\frac{3x+4}{x-3} = \frac{2x-9}{x+1}$; г) $\frac{2x-1}{3-2x} = \frac{x-1}{2x+3}$.

3.15. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции:

а) $y = \frac{2x^2+x-1}{2x-1}$ равно 2;

б) $y = 3x - \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ равно 4.

3.16. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{2}{x-2} - \frac{5}{x+2} = 1$; б) $\frac{x+5}{2x} + \frac{2x}{x+5} = 2$;

в) $\frac{3x-9}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 3$; г) $\frac{3x-1}{2x-3} - 4 = \frac{7}{2x+3}$;

д) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{6}{x+3}$; е) $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{8x+3}{x+1}$.

3.17. Найдите все значения переменной, при которых:

а) сумма дробей $\frac{1}{x}$ и $\frac{2}{x+2}$ равна 1;

б) разность дробей $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+4}$ равна $\frac{1}{3}$;

в) значение дроби $\frac{x-4}{5-x}$ на 2 меньше значения дроби $\frac{x-6}{x+5}$.

3.18. Готовясь к вступительным экзаменам, абитуриент должен был решить 180 задач. Ежедневно он решал на 2 задачи больше, чем планировал, и поэтому закончил подготовку на 1 день раньше запланированного срока. За сколько дней абитуриент решил все задачи?

3.19. Решите задачу:

а) При патрулировании катер МЧС прошел 56 км против течения реки и 32 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера составляет 30 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Студент первого и студент второго курса летом работали в строительном отряде. Работая вместе, они покрасили стену за 12 ч. Известно, что второкурсник может покрасить такую же стену на 7 ч быстрее, чем первокурсник. Успеет ли первокурсник покрасить такую стену за три дня, если будет работать один и не более 9 ч в день?

3.20. Решите уравнение:

а) $\frac{x+4}{x-2}-\frac{x-3}{x^2-2x}=\frac{x-2}{x}$;

б) $\frac{1}{x}-\frac{x-7}{x-6}+\frac{6}{6x-x^2}=0$;

в) $\frac{x+1}{x-5}+\frac{12}{x^2-25}=1$;

г) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{7x}{x^2-1}$;

д) $\frac{x}{3x+7}-\frac{3}{3x-7}=\frac{9x+21}{49-9x^2}$;

е) $\frac{6}{x^2-36}+\frac{x-12}{x^2+6x}=\frac{3}{x^2-6x}$.

3.21. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox:

а) $f(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$;

б) $f(x)=\frac{1}{9x^2-1}-\frac{4}{3x+1}-\frac{5}{x-3x^2}$.

3.22. Решите задачу:

а) Протяженность шоссе между двумя городами составляет 300 км. Из одного города в другой одновременно выехали маршрутное такси и рейсовый автобус. Автобус двигался со скоростью на 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше, чем маршрутное такси, и прибыл в пункт назначения на 1 ч позже такси. Найдите скорость автобуса.

б) В оздоровительном центре два бассейна: объемом 360 $м^3$ и 480 $м^3$. После плановой чистки их необходимо наполнить водой. Из трубы, наполняющей меньший бассейн, вытекает в час на 10 $м^3$ воды меньше, чем из трубы, наполняющей больший бассейн. Для наполнения меньшего бассейна потребовалось на 2 ч больше, чем для наполнения большего бассейна. Найдите, сколько кубических метров воды вытекает в час из каждой трубы.

3.23. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{2}{x-3}+1=\frac{15}{x^2-6x+9}$;

б) $\frac{5}{x^2+2x+1}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{x-1}$;

в) $\frac{x+3}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{5}{x}$;

г) $\frac{3}{x^2+4x+4}+\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$;

д) $\frac{4}{x^2-10x+25}+\frac{10}{25-x^2}=\frac{1}{x+5}$;

е) $\frac{4}{9x^2-1}=\frac{1}{9x^2+6x+1}-\frac{1}{3x^2+x}$.

Какие преобразования вы выполняли во всех уравнениях?

3.24. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции $y=\frac{14}{x-4}-\frac{45}{x^2-8x+16}$ равно 1.

3.25. Решите задачу:

а) Биатлонисту на тренировке необходимо было пробежать расстояние в 30 км. Начав бег на 3 мин позже намеченного срока, биатлонист бежал со скоростью больше предполагавшейся на 1 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и прибежал к месту назначения вовремя. Найдите скорость, с которой бежал биатлонист.

б) Из одного города в другой к определенному времени грузовой автомобиль должен был доставить груз. Первые 200 км пути автомобиль двигался с запланированной скоростью. Затем погодные условия ухудшились, и последние 150 км грузовику пришлось двигаться со скоростью на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше запланированной. На весь путь между городами потребовалось 5 ч. Найдите время, на которое опоздал водитель с доставкой груза.

в) Прогулка по реке на туристическом катере длится 3 ч. За это время катер проплывает 40 км по течению реки и возвращается обратно к пристани. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.26. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x+1}+\frac{4x-6}{(x+1)(x+3)}=3$;

б) $\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{13-7x}{x-1}=\frac{3}{x-3}$;

в) $\frac{x+4}{x+5}+\frac{9+2x}{x-2}=\frac{7}{x^2+3x-10}$;

г) $\frac{2x^2}{x^2+x-6}-\frac{x+1}{x-2}=1$;

д) $5-\frac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\frac{3x}{x-4}$;

е) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

3.27. Поезд отправился со станции по расписанию и до следующей остановки должен был пройти 64 км. Когда он проехал 24 км, то по указанию диспетчера был задержан возле семафора на 12 мин. После этого поезд увеличил скорость на 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и прибыл в пункт назначения с опозданием на 4 мин. Найдите первоначальную скорость поезда.

3.28. Найдите, при каких значениях переменной:

а) сумма дробей $\frac{2x^2}{x^2+4x}$ и $\frac{27}{2x^2+7x-4}$ равна дроби $\frac{7-2x}{2x-1}$;

б) разность дробей $\frac{5x-1}{2x-1}$ и $\frac{1}{x+2}$ равна дроби $\frac{3}{2-3x-2x^2}$.

3.29*. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2+2}=\frac{3}{x^3-x^2+2x-2}$;

б) $\frac{4}{x^2-16}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x^3-16x-4x^2+64}$.

3.30*. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $3x^2-2+\frac{1}{3x^2-2}=2$; б $\frac{x^2+2}{x}+\frac{x}{x^2+2}=3\frac{1}{3}$;

в) $x^2-4x-\frac{15}{x^2-4x}=2$; г) $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$;

д) $\frac{x^2+x-10}{2}-\frac{3}{2x^2+2x-20}=1$; е) $\frac{1}{x^2+6x}-\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{9}{10}$.

3.31*. Найдите количество целых корней уравнения $\frac{2}{x^2-6x+8}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}$ на промежутке [–1; 7].

3.32*. Найдите сумму корней уравнения $\frac{x^{19}-1}{1-x^{17}}=\frac{1-x^{17}}{x^{15}-1}$.

3.33*. Найдите произведение корней уравнения

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$$

3.34*. Найдите меньший корень уравнения

$$\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{x}\right)-12=0.$$

3.35. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю:

а) $\frac{2x-5}{x+3}=0$; б) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$; в) $\frac{3x+18}{x^2-36}=0$;

г) $\frac{4x^2 - x}{x} = 0;$ д) $\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 8} = 0;$ е) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10} = 0.$

3.36. Верно ли, что уравнения $\frac{x^2 - 81}{x - 9} = 0$ и $\frac{x^2 + 11x + 18}{x + 2} = 0$ равносильны? Придумайте пример линейного уравнения, равносильного данным.

3.37. Решите уравнение, используя алгоритм:

а) $\frac{x + 10}{x} = 7;$ б) $\frac{x}{2x - 1} = -\frac{3}{7};$

в) $\frac{7x^2 + 4}{4x} = 2x;$ г) $\frac{3x^2 + 5}{1 - x^2} = -4.$

3.38. Числитель обыкновенной дроби на 3 меньше знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 5, а знаменатель увеличить на 3, то получится дробь $\frac{8}{19}$. Найдите исходную дробь.

3.39. Найдите все значения переменной, при которых значение дроби $\frac{4}{x + 4}$ равно значению выражения $x + 4$.

3.40. Найдите все корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x - 7} = \frac{49}{x - 7};$ б) $\frac{x^2 - 2x}{x - 4} = \frac{2x}{x - 4};$

в) $\frac{x^2}{x - 6} = \frac{7x - 6}{x - 6};$ г) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = \frac{16 - 7x}{2x - x^2}.$

3.41. Найдите нули функции $f(x) = \frac{x^2 - 14}{x^2 - 4} + \frac{5x}{4 - x^2}.$

3.42. Являются ли следующие уравнения дробно-рациональными? Решите уравнение, используя соответствующий алгоритм:

а) $\frac{x}{x + 4} = \frac{1}{x - 2};$ б) $\frac{x + 7}{2 - x} = \frac{x - 1}{x};$

в) $\frac{5x + 2}{x - 1} = \frac{4x + 13}{x + 7};$ г) $\frac{x - 5}{x + 3} = \frac{2x + 3}{2x - 1}.$

3.43. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции $y = 2x - \frac{3x^2 - 4x - 20}{x + 2}$ равно 5.

3.44. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{12}{x - 1} - \frac{8}{x + 1} = 1;$ б) $\frac{x + 12}{x + 2} + \frac{9}{x} = 2;$

в) $\frac{5x + 12}{x + 2} - 5 = \frac{x - 7}{2 - x};$ г) $\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{7}{x + 2} = \frac{x + 10}{x}.$

3.45. Найдите все значения переменной, при которых:

а) сумма дробей $\frac{x-3}{4x}$ и $\frac{5x-3}{x-3}$ равна 3;

б) разность дробей $\frac{x}{2x-5}$ и $\frac{4}{x}$ равна $\frac{1}{3}$.

3.46. Решите задачу, выполнив анализ зависимостей между значениями величин:

а) Девятиклассник должен был за определенное время выучить 160 новых иностранных слов. Ежедневно он учил на 4 слова больше, чем планировал, поэтому он справился с заданием на 2 дня раньше запланированного срока. Сколько слов в день учил девятиклассник?

б) На оптовый склад торговой сети ежемесячно поступает 180 т фруктов. В прошлом месяце поступившие фрукты были поровну распределены между несколькими магазинами сети. В текущем месяце было решено задействовать на 3 магазина меньше. В каждый магазин было поставлено на 3 т фруктов больше. Сколько магазинов сети было задействовано в предыдущем месяце?

в) Программа экскурсии по живописным местам предусматривает двухчасовую прогулку на теплоходе. За это время теплоход проходит 21 км против течения реки и 8 км по течению. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость теплохода составляет 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

г) Два тестировщика программного обеспечения, работая вместе, выполнили задание за 8 ч. За сколько часов может выполнить это задание каждый тестировщик самостоятельно, если одному из них на это нужно на 12 ч больше, чем другому?

3.47. Решите уравнение:

а) $\frac{x+1}{x}+\frac{2}{x-5}=\frac{10}{x^2-5x}$;

б) $\frac{4}{x^2-9}+\frac{x+1}{x-3}=1$;

в) $\frac{2x+3}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}$;

г) $\frac{x}{3x+2}+\frac{5}{2-3x}=\frac{15x+10}{4-9x^2}$.

3.48. Составьте модель условия и решите задачу:

а) Протяженность шоссе между двумя городами составляет 240 км. Для доставки груза из одного города в другой одновременно выехали два автомобиля. Один из них двигался со скоростью на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше, чем другой, и прибыл в пункт назначения на 1 ч раньше другого. Найдите скорости автомобилей.

б) Первая труба заполняет водой аквариум объемом 10 м^3 на 5 минут быстрее, чем вторая труба. Найдите, сколько кубических метров воды вытекает в час из каждой трубы, если из первой трубы в час вытекает на 10 м^3 больше воды, чем из второй.

3.49. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{3}{x+2}+1=\dfrac{4}{x^2+4x+4}$;

б) $\dfrac{3}{x^2-6x+9}+\dfrac{6}{9-x^2}=\dfrac{1}{x+3}$;

в) $\dfrac{4}{2x^2+x}=\dfrac{3}{4x^2+4x+1}-\dfrac{3}{1-4x^2}$.

3.50. Туристы шли вдоль реки к остановке автобуса. Не дойдя до остановки 3 км, они решили искупаться и потратили на это 15 мин. Чтобы успеть к автобусу вовремя, им пришлось увеличить скорость на 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите, с какой скоростью шли туристы после купания.

3.51. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{13}{(x-1)(x-2)}$;

б) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{15}{(x-2)(x+3)}$;

в) $\dfrac{1-9x}{x^2+2x-3}+\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{2x}{x+3}$;

г) $\dfrac{7-2x}{x^2-5x-6}+\dfrac{3}{x^2-9x+18}=\dfrac{1}{3-x}$.

3.52*. Найдите корни уравнения

$$\frac{x}{x^2+6x+5}+\frac{3x+1}{2x^2+8x-10}=\frac{2x+68}{x^3+5x^2-x-5}.$$

3.53*. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $x^2-15+\dfrac{1}{x^2-15}=2$;

б) $\dfrac{x^2-3}{x}+\dfrac{x}{x^2-3}=2\dfrac{1}{2}$;

в) $x^2+x+\dfrac{8}{x^2+x}=6$;

г) $\dfrac{3}{x^2+x+1}=3-x^2-x$;

д) $\dfrac{x^2+x-4}{2}-\dfrac{3}{2x^2+2x-8}=1$;

е) $\dfrac{1}{x^2+4x}-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{4}{5}$.

3.54*. Найдите произведение корней уравнения

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-7\left(x-\frac{2}{x}\right)=4.$$

3.55. Найдите количество простых чисел на промежутке [1; 27].

3.56. Выберите все верные равенства:

а) $3\ \% = 0{,}3$; б) $75\ \% = \frac{3}{4}$; в) $12{,}5\ \% = 1{,}25$;

г) $280 = 2{,}8\ \%$; д) $43\ \% = 0{,}43$.

3.57. Вычислите:

а) $\left(125 \cdot 5^{-4}\right)^2$; б) $\frac{3^{-4} \cdot 3^{-9}}{3^{-12}}$; в) $1000^{-6} \cdot \left(10^2\right)^9$.

3.58. Из равенства $2m - 5n = 10$ выразите:

а) m через n; б) n через m.

3.59. Докажите, что $\sqrt{26} + \sqrt{82} > 14$.

3.60. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

3.61. Сократите дробь $\frac{a^2 - a - 12}{16 - a^2}$.

3.62. Найдите значение выражения $|-3{,}21| - |-2{,}2| + |-7|$.

3.63. Докажите, что функция $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ является четной.

3.64. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения прямой $3x + 7y + 21 = 0$ с осью абсцисс.

§ 11. Системы нелинейных уравнений

3.65. Решите способом подстановки систему уравнений

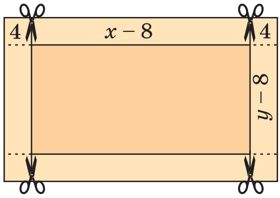
$$\begin{cases} x - 5y = -1, \\ 2x - 7y = 6. \end{cases}$$

3.66. Решите способом сложения систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = -12, \\ -2x - 7y = 36. \end{cases}$$

3.67. Постройте графики уравнений системы $\begin{cases} 2x + y = -1, \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ и определите число решений системы.

Рассмотрим задачу. Из листа картона прямоугольной формы нужно изготовить коробку без крышки, сделав надрезы в углах длиной 4 см (рис. 67). Найдите длину и ширину листа, зная, что его периметр равен 60 см, а объем коробки должен быть равен 160 см^3.



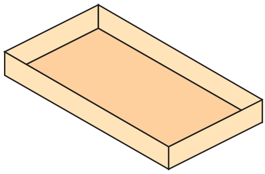


Рис. 67

Решение. Обозначим длину и ширину листа соответственно x см и y см. Так как в углах листа сделаны надрезы длиной 4 см, то высота коробки равна 4 см, а длина и ширина коробки равны $(x - 8)$ см и $(y - 8)$ см соответственно.

По условию задачи периметр листа прямоугольной формы равен 60 см, а объем коробки равен 160 см^3, значит, $(x + y) \cdot 2 = 60$ и $(x - 8) \cdot (y - 8) \cdot 4 = 160$. Оба полученных условия должны быть выполнены, поэтому объединим их в систему уравнений $\begin{cases} (x+y) \cdot 2 = 60, \\ (x-8) \cdot (y-8) \cdot 4 = 160. \end{cases}$

Полученная система уравнений содержит **нелинейное рациональное уравнение** $(x - 8) \cdot (y - 8) \cdot 4 = 160$. Такие системы называют **системами нелинейных уравнений**. Рассмотрим способы решения систем нелинейных уравнений.

Способ подстановки

Решим полученную в задаче систему уравнений способом подстановки: $\begin{cases} (x+y) \cdot 2 = 60, \\ (x-8) \cdot (y-8) \cdot 4 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30, \\ (x-8)(y-8) = 40. \end{cases}$

Из первого уравнения системы выразим переменную x и получим $x = 30 - y$.

Заменим во втором уравнении переменную x на $30 - y$ и получим уравнение $(30 - y - 8)(y - 8) = 40$. Решим это уравнение:

$$(22 - y)(y - 8) = 40 \Leftrightarrow 22y - 176 - y^2 + 8y = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 30y + 216 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 12, \\ y = 18. \end{array}\right.$$

Найденные значения y подставим в выражение $x = 30 - y$. Тогда если $y = 12$, то $x = 30 - 12 = 18$, а если $y = 18$, то $x = 30 - 18 = 12$.

Решениями системы уравнений являются пары чисел $(12; 18)$ и $(18; 12)$. Таким образом, размер прямоугольного листа картона 12×18 см.

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, нужно:

① Из одного уравнения системы выразить одну из переменных. ② Заменить в другом уравнении эту переменную на ее выражение. ③ Решить полученное уравнение. ④ Найденные значения одной переменной подставить в выражение для другой переменной и найти значение другой переменной. ⑤ В виде упорядоченных пар чисел записать ответ.	Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x - 4y = 0. \end{cases}$ ① Из второго уравнения системы выразим переменную x: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x = 4y. \end{cases}$ ② Заменим в первом уравнении переменную x на $4y$: $\begin{cases} (4y)^2 + y^2 = 17, \\ x = 4y. \end{cases}$ ③ Решим уравнение $(4y)^2 + y^2 = 17$ и получим: $16y^2 + y^2 = 17$; $17y^2 = 17$; $y^2 = 1$; $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. ④ Найденные значения y подставим в выражение $x = 4y$. Если $y_1 = 1$, то $x_1 = 4 \cdot 1 = 4$. Если $y_2 = -1$, то $x_2 = 4 \cdot (-1) = -4$. ⑤ *Ответ*: $(4; 1)$, $(-4; -1)$.

Способ сложения

Чтобы решить систему уравнений способом сложения, нужно:

① Одно из уравнений системы оставить без изменения, а другое заменить суммой уравнений системы. ② Из полученного уравнения (суммы) найти значения одной из переменных. ③ Подставить эти значения переменной в оставленное без изменения уравнение системы и найти значения другой переменной. ④ Записать ответ.	Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$ ① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2x^2 = 8. \end{cases}$ ② $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$ ③ При $x = 2$ получим: $4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -1. \end{array}\right.$ При $x = -2$ получим: $4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -1. \end{array}\right.$ ④ *Ответ*: $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; 1)$, $(-2; -1)$.

Графический метод решения систем нелинейных уравнений

Решим систему уравнений $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ графическим методом. Для этого построим в одной системе координат графики каждого из уравнений системы.

Первое уравнение системы равносильно уравнению $y = \frac{1}{x}$, графиком которого является гипербола, проходящая через точки (1; 1), (0,5; 2) (рис. 68).

Графиком второго уравнения системы $y = x^2 - 2x + 2$ является парабола с вершиной в точке (1; 1), пересекающая ось ординат в точке (0; 2).

Единственная точка пересечения гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и параболы $y = x^2 - 2x + 2$ имеет координаты (1; 1).

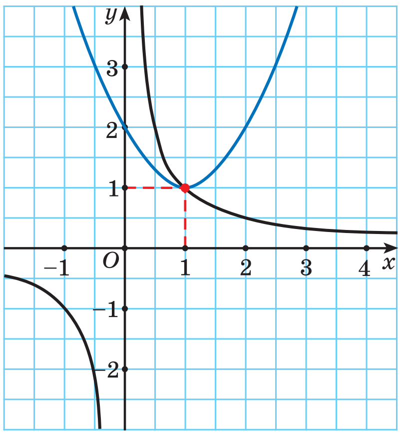


Рис. 68

Поскольку графический метод решения систем уравнений не является точным, то полученный результат необходимо проверить.

Подставим пару чисел (1; 1) в каждое из уравнений системы $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ и получим верные равенства. Таким образом, данная система имеет единственное решение (1; 1).

В рассмотренной системе решением оказалась пара целых чисел, которую легко было найти с помощью построенных графиков. В других случаях найти точные значения переменных по графику может оказаться затруднительно. Но, как правило, с помощью графического метода можно определить число решений системы уравнений.

Например, определим число решений системы уравнений $\begin{cases} xy = 5, \\ y = -x^2 + 6. \end{cases}$ Построим в одной системе координат графики

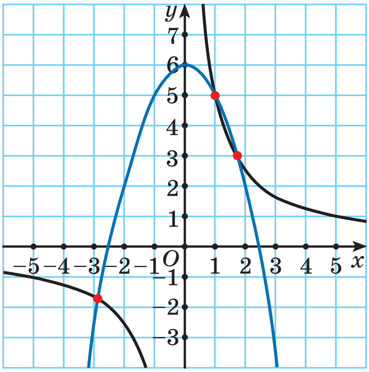


Рис. 69

каждого из уравнений системы (рис. 69). Графиком первого уравнения системы является гипербола, проходящая через точки (1; 5), (5; 1). График второго уравнения — парабола, ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке (0; 6). Графики пересекаются в трех точках, значит, система уравнений имеет три решения.

Моделирование реальных процессов с помощью систем нелинейных уравнений

Системы нелинейных уравнений также являются математическими моделями при решении задач.

Например, решим задачу. Лечебными травами было решено засеять прямоугольный участок площадью 180 м^2. При вспашке участка одну его сторону уменьшили на 3 м, а другую — на 2 м. Его площадь стала равна 120 м^2. Какими были первоначальные размеры участка?

Решение. В задаче речь идет о длине и ширине прямоугольного участка и его площади.

Если одну сторону участка обозначить через x, а другую — через y, то планируемая площадь участка равна xy м^2. По условию она равна 180 м^2, значит, получится уравнение $xy = 180$.

После уменьшения размеров участка площадь станет равной $(x - 3)(y - 2)$ м^2. По условию задачи составим уравнение $(x - 3)(y - 2) = 120$.

Объединим оба уравнения в систему $\begin{cases} xy = 180, \\ (x - 3)(y - 2) = 120. \end{cases}$

Получили математическую модель задачи в виде системы нелинейных уравнений. Решим ее, используя способ подстановки.

$$\begin{cases} xy = 180, \\ (x - 3)(y - 2) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ xy - 2x - 3y + 6 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ 3y + 2x = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ x = 33 - 1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5y^2 - 33y + 180 = 0, \\ x = 33 - 1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 12, \\ y = 10, \end{array}\right. \\ x = 33 - 1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 15, \\ y = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 18, \\ y = 10. \end{cases} \end{array}\right.$$

Условию задачи удовлетворяют найденные решения системы: стороны участка равны либо 15 м и 12 м, либо 18 м и 10 м.

Ответ: 15 м, 12 м или 18 м, 10 м.

<table>
<tr><th colspan="2">Решение систем нелинейных уравнений</th></tr>
<tr><td>

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 + xy = -10, \\ 5y - 2xy = 17. \end{cases}$

</td><td>

а) Решим систему способом подстановки:

$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ (3 - y)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ -6y + 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 3. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (3; 0), (0; 3).

б) Применим способ сложения. Умножим первое уравнение на 2, сложим со вторым и получим:

$\begin{cases} 2y^2 + 2xy = -20, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 5y = -3, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 5y + 3 = 0, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -1, \\ y = -1{,}5, \end{array}\right. \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ 5y - 2xy = 17, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1{,}5, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = 11, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1{,}5, \\ x = 8\frac{1}{6}. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(11; -1)$, $\left(8\frac{1}{6}; -1{,}5\right)$.

</td></tr>
<tr><td>

2. Решите графически систему уравнений

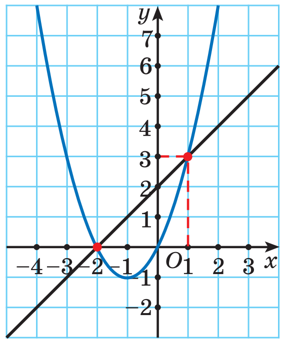
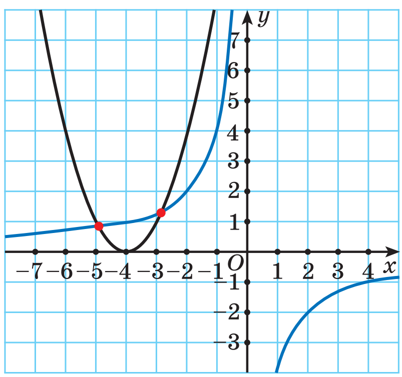
$\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ y - (x + 1)^2 = -1. \end{cases}$

</td><td>

Построим графики уравнений системы

$\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ y - (x + 1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ y = (x + 1)^2 - 1. \end{cases}$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>График первого уравнения — прямая, проходящая через точки (–2; 0), (1; 3). График второго уравнения — парабола с вершиной в точке (–1; –1), пересекающая ось абсцисс в точках (–2; 0) и (0; 0), проходящая через точку (1; 3).

Прямая пересекается с параболой в точках с координатами (–2; 0), (1; 3).
С помощью проверки убеждаемся, что пары чисел (–2; 0) и (1; 3) являются решениями данной системы.
Ответ: (–2; 0), (1; 3).</td></tr>
<tr><td>3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} xy = -4, \\ y = (x+4)^2 \end{cases}$?</td><td>Построим в одной системе координат графики уравнений системы. Графиком первого уравнения системы является гипербола, проходящая через точки (–1; 4), (–4; 1). График второго уравнения — парабола с вершиной в точке (–4; 0), пересекающая ось ординат в точке (0; 16).
</td></tr>
</table>

	На рисунке видны только две точки пересечения графиков. Но, учитывая то, что парабола пересекает ось ординат, а гипербола не пересекает, делаем вывод, что графики пересекаются еще в одной точке. Таким образом, графики пересекаются в трех точках, а, значит, система имеет три решения.
4*. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y)xy = 20;\\ x+y-xy = 1.\end{cases}$	Решим систему методом замены переменных. Введем новые переменные: $x+y=t$, $xy=k$. Тогда система примет вид $\begin{cases}tk = 20,\\ t-k = 1.\end{cases}$ Решим ее способом подстановки: $\begin{cases}tk = 20,\\ t-k = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(k+1)k = 20,\\ t = k+1\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}k^2+k-20 = 0,\\ t = k+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}k = -5,\\ k = 4,\end{array}\right.\\ t = k+1\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}k = -5,\\ t = -4,\end{cases}\\ \begin{cases}k = 4,\\ t = 5.\end{cases}\end{array}\right.$ Подставим $x+y=t$, $xy=k$ и получим: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy = -5,\\ x+y = -4,\end{cases}\\ \begin{cases}xy = 4,\\ x+y = 5.\end{cases}\end{array}\right.$ Решив каждую из двух систем совокупности способом подстановки, получим следующие решения исходной системы уравнений: (–5; 1); (1; –5); (4; 1); (1; 4). *Ответ*: (–5; 1); (1; –5); (4; 1); (1; 4).
Моделирование реальных процессов с помощью систем нелинейных уравнений	

Задача 1. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите данное число.

Решение. Обозначим цифру десятков данного числа через x, а цифру единиц через y, тогда данное число будет иметь вид $10x + y$. Числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, будет $10y + x$. По условию задачи: $x^2 + y^2 = 13$ и $10x + y - 9 = 10y + x$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 10x + y - 9 = 10y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -3, \\ y = 2, \end{array} \right. \\ x = y + 1. \end{cases}$$

По условию задачи подходит только $y = 2$, $x = 3$.

Ответ: 32.

*Задача 2**. Из поселка A в поселок B вышел пешеход. Одновременно с ним из поселка B в поселок A выехал велосипедист. Через 50 мин они встретились. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода?

Решение. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость движения	Пройденный путь	Время движения
Движение пешехода из поселка A в поселок B	v_1	1	$t_1 = \frac{1}{v_1}$
Движение велосипедиста из поселка B в поселок A	v_2	1	$t_2 = \frac{1}{v_2}$
Движение пешехода и велосипедиста навстречу друг другу	$v_1 + v_2$	1	$\frac{1}{v_1 + v_2}$

По условию задачи велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода, поэтому получим уравнение $\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = 4.$

При движении навстречу друг другу пешеход и велосипедист встретились через $50 \text{ мин} = \frac{5}{6}$ ч, т. е. $\frac{1}{v_1 + v_2} = \frac{5}{6}$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = 4,\\ \frac{1}{v_1 + v_2} = \frac{5}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2} = 4,\\ v_1 + v_2 = \frac{6}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v_1 = \frac{1}{5},\\ v_2 = 1,\end{cases} \text{ откуда } \begin{cases}t_1 = 5,\\ t_2 = 1.\end{cases}$$

Ответ: 5 ч.

*Задача 3**. Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада, если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая?

Решение. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость работы	Время	Результат
Работа первой бригады	v_1	6	$6v_1$
Работа второй бригады	v_2	16	$16v_2$
Работа первой бригады по ремонту всей дороги	v_1	$t_1 = \frac{1}{v_1}$	1
Работа второй бригады по ремонту всей дороги	v_2	$t_2 = \frac{1}{v_2}$	1

Обозначим объем всей работы через 1, тогда получим уравнение $6v_1 + 16v_2 = 1$.

Зная, что одна первая бригада может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая, составим уравнение $\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 6$.

Составим и решим систему уравнений: $\begin{cases}\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 6,\\ 6v_1 + 16v_2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} = 6,\\ 6v_1 + 16v_2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v_1 = \frac{1}{18},\\ v_2 = \frac{1}{24},\end{cases} \text{ откуда } \begin{cases}t_1 = 18,\\ t_2 = 24.\end{cases}$$

Ответ: 18 ч.

1. Какие из следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 1, \\ -3xy = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x = -5y + 20, \\ y^2 = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 5 \end{cases}$ — являются системами нелинейных уравнений?

2. Какая пара чисел является решением системы уравнений

$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x^2 - y^2 = 5: \end{cases}$ а) $(-3; -2)$; б) $(3; 2)$; в) $(3; -2)$; г) $(-3; 2)$?

3.68. Используйте алгоритм и решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = y - 4, \\ y^2 + 3x = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 21, \\ x + y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$

3.69. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ 2x + y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 18, \\ x^2 + y = -16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y = 7, \\ x^2 - y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 6, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$

3.70. Произведение двух натуральных чисел равно 143, а их разность равна 2. Найдите эти числа.

3.71. На рисунке 70 изображены графики функций $y = \frac{8}{x}$, $y = x + 2$ и $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$.

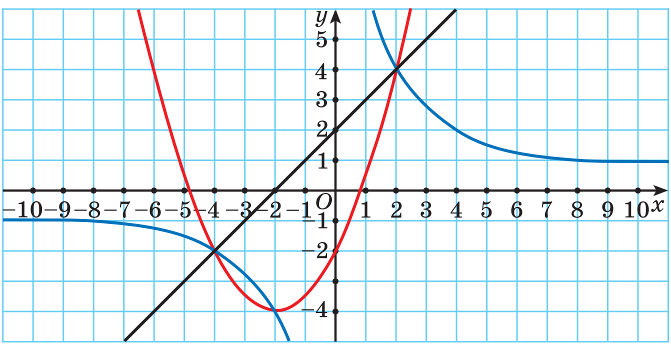


Рис. 70

С помощью рисунка решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 8, \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4, \\ y - x = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4, \\ xy = 8. \end{cases}$

3.72. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ xy = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + x^2 = 6x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^3, \\ y - 4x = 0. \end{cases}$

3.73. Среднее арифметическое двух чисел равно 7, а разность квадратов этих чисел равна 14. Найдите эти числа.

3.74. Используйте систему уравнений для решения задачи. Дачный участок имеет форму прямоугольника и огорожен забором длиной 120 м. Найдите размеры участка, если его площадь равна 8 а.

3.75. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

3.76. Выберите способ и решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1{,}5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4. \end{cases}$

3.77. Решите задачу, используя зависимости между значениями величин для составления системы уравнений.

а) Первый велосипедист преодолевает расстояние 60 км на 1 ч быстрее, чем второй. Если бы первый велосипедист уменьшил скорость на 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второй увеличил свою скорость на 20 %, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорости велосипедистов.

б) Протяженность шоссе между городами A и B составляет 120 км. Из города A выехал грузовой автомобиль, а через 1 ч 40 мин после этого в том же направлении выехал рейсовый автобус, который прибыл в город B одновременно с грузовым автомобилем. Найдите скорости грузового автомобиля и автобуса, если известно, что грузовой автомобиль за 2 ч проезжает на 10 км меньше, чем автобус за 1 ч.

в) Две линии по производству соков должны были выполнить заказ за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая линия была остановлена по техническим причинам, поэтому вторая линия закончила оставшуюся часть заказа за 7 дней. Найдите, за сколько дней был бы выполнен заказ, если бы работала только вторая линия.

г) На изготовление партии продукции первой бригаде требуется на 6 ч больше, чем второй. Если сначала первая бригада отработает 3 ч, а затем, сменив ее, вторая бригада отработает 4 ч, то будет изготовлена только половина партии продукции. Будет ли за 8-часовую смену изготовлена вся партия продукции, если обе бригады будут работать одновременно?

3.78. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2y - x = 2, \\ 2xy = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 + 2x - 4y = 0, \\ 2y = x + 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 40, \\ 3x - y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 3x - y = 15. \end{cases}$

3.79. После деления двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найдите это двузначное число.

3.80. С помощью изображенных на рисунке 71 графиков функций $y = 4 - x^2$, $y = 2x + 4$ и $y = \sqrt{x + 1}$ составьте систему уравнений:

а) имеющую два решения;

б) имеющую одно решение;

в) не имеющую решений.

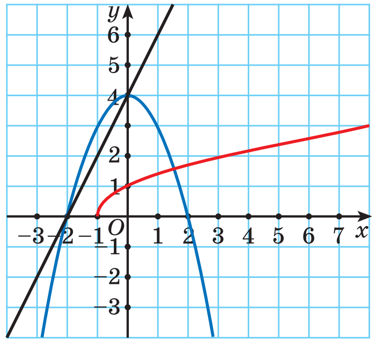


Рис. 71

3.81. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ графически и аналитически.

3.82. Первый упаковщик собрал 60 праздничных наборов на 3 ч быстрее второго. Известно, что, работая вместе, они собирают за 1 ч 30 наборов. Выясните, успеет ли второй упаковщик собрать 150 наборов за три рабочих дня, если он работает по 4 ч в день.

3.83. Выполните анализ условия и решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy - x^2 = 1, \\ y + 4x = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x = 5, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + y^2 - xy = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y = -8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 + x = 2xy - 9, \\ 2y - 3x = 1. \end{cases}$

3.84. Найдите два числа, сумма, разность и произведение которых находятся в отношении $5 : 1 : 18$.

3.85. Школьный бассейн можно наполнять водой через два крана. Если их открыть одновременно, то бассейн наполнится за 4 ч 30 мин. Если же половину бассейна наполнить через один кран, а затем открыть только другой, то для наполнения бассейна потребуется 12 ч. За какое время бассейн наполняется через первый кран, если известно, что производительность первого крана больше?

3.86. С помощью графического метода определите, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} xy = -4, \\ y = x^2 - 2x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^3, \\ y - (x+2)^2 = -7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ xy = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y - |x - 1| = 0, \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$

3.87. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x^2 - 4xy + y^2 = 2x + 2y \end{cases}$ двумя способами.

3.88. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

а) параболы $y = x^2 + 1$ и прямой $x + 2y = 5$;

б) параболы $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y - 2x = 2$;

в) гиперболы $xy = -20$ и прямой $x + y = 8$;

г) гиперболы $xy = 12$ и прямой $3x + 2y = 12$.

3.89. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2xy = 6, \\ y - 2xy = -15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 = 2, \\ x^2 + 3x - y^2 = -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 2x - y = 5, \\ 2x^2 - 3xy - 2x + 3y = 1. \end{cases}$

3.90*. Воспользуйтесь методом замены переменных и решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15, \\ x + xy + y = 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 + y^2 + xy = 19. \end{cases}$

3.91*. Используйте зависимость между величинами в условии для решения задачи с помощью системы уравнений. Два велосипедиста движутся по замкнутой дорожке велотрека в одном направлении. Один догоняет другого каждые 12 мин. Известно, что первый велосипедист проходит круг велотрека на 10 с быстрее, чем второй. Найдите, сколько секунд требуется второму велосипедисту, чтобы пройти круг велотрека.

3.92*. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ 6x^2 - 3xy - y^2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$

3.93*. Решите уравнение $x^2 + 4y^2 + |3x - y + 10| = 4xy$.

3.94. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 15, \\ y = x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = y - 1, \\ y^2 + 2x = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = 18, \\ x + y = 9. \end{cases}$

3.95. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ 2x - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y = 30, \\ x^2 - y = -22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 + y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 + 4x = 18, \\ y - 2x = -9. \end{cases}$

3.96. На рисунке 72 изображены графики функций $y = -\frac{6}{x}$, $y = -2x - 3$ и $y = (x-1)^2 - 7$. С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} xy = -6, \\ y = -2x - 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = (x-1)^2 - 7, \\ y + 2x = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = (x-1)^2 - 7, \\ xy = -6. \end{cases}$

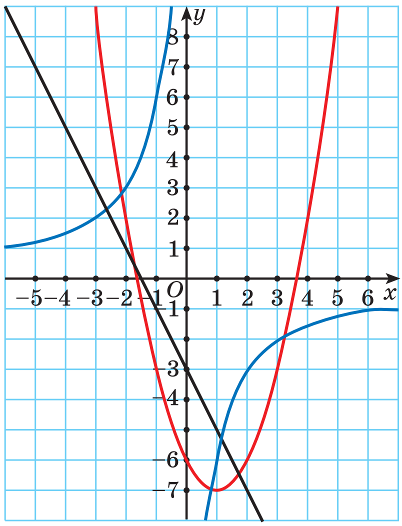


Рис. 72

3.97. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ xy = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 6. \end{cases}$

Выполните проверку.

3.98. Произведение двух натуральных чисел равно 180, а их разность равна 3. Найдите эти числа.

3.99. Строительная площадка прямоугольной формы огорожена забором длиной 1 км. Найдите размеры площадки, если ее площадь равна 60 000 м^2.

3.100. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 25. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

3.101. Способом подстановки решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = -1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12. \end{cases}$

3.102. Решите задачу, используя зависимости между величинами для составления системы уравнений:

а) Протяженность шоссе между пунктами A и B составляет 20 км. Из пункта A выехал велосипедист, а через 45 мин после этого в том же направлении из пункта A выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста, не доехав 5 км до пункта B. Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста, если за 1 ч велосипедист проезжает на 48 км меньше, чем мотоциклист за 2 ч.

б) Две студенческие бригады выполнили задание за 2 дня. В первый день они выполнили $\frac{1}{3}$ задания, причем первая бригада работала 2 ч, а вторая — на 1 ч больше. Во второй день первая бригада работала 5 ч, а вторая — на 30 мин меньше. Найдите, за сколько часов могла бы выполнить задание вторая бригада, если бы работала одна.

3.103. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 24, \\ x + 2y = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2; \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

3.104. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5y = 0, \\ 3x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 - xy = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ 2x = y - 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-2)(y+2) = -1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

3.105. С помощью графического метода определите, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} xy = 12, \\ y - (x+5)^2 = -3. \end{cases}$

3.106. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

а) параболы $y = 2x^2 + 2$ и прямой $2x + y = 14$;

б) гиперболы $xy = -2$ и прямой $x - y = 3$.

3.107. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4. \end{cases}$

3.108*. Воспользуйтесь методом замены переменных и решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{3x}{y} - \dfrac{y}{x} = -2, \\ y^2 - x^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + xy = 10, \\ x^2y - xy^2 = 24. \end{cases}$

3.109. Из данных дробей выберите дробь, которую нельзя представить в виде конечной десятичной дроби:

а) $\dfrac{3}{40}$;   б) $\dfrac{1}{625}$;   в) $\dfrac{5}{32}$;

г) $\dfrac{7}{100}$;   д) $\dfrac{1}{24}$;   е) $\dfrac{7}{20}$.

3.110. Найдите решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 5, \\ x - 2 > -1. \end{cases}$$

3.111. Найдите решение совокупности неравенств

$$\left[\begin{aligned} &2x - 1 \geqslant 5, \\ &x - 2 > -1. \end{aligned}\right.$$

3.112. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения $m^2 - 2m\sqrt{5} + 2$ при $m = \sqrt{5} - 3$.

3.113. Найдите НОД и НОК чисел 175 и 280.

3.114. Упростите выражение

$$\left(\frac{4}{b^2 + b} - \frac{2}{b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - b}\right) \cdot \left(1 + 2b + b^2\right).$$

3.115. Найдите значение выражения:

а) $2^{12} \cdot 0{,}5^{13}$;   б) $3^7 : 0{,}3^6$.

3.116. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g(x) = -5x^2$ сдвигом его на 4 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вниз вдоль оси ординат. А график функции $y = h(x)$ получен из графика функции $p(x) = 0{,}1x^2$ сдвигом его на 3 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат. Имеют ли общие точки графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$?

§ 12. Формула длины отрезка с заданными координатами его концов. Уравнение окружности

3.117. Какое из следующих уравнений не является уравнением прямой:

а) $3x - 7y - 5 = 0$; б) $4x - 5 = 0$;

в) $6x^2 + 5y + 2 = 0$; г) $2y = 0$?

3.118. Определите, графикам каких из данных функций принадлежит точка (1; 1):

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $h(x) = x^2$;

в) $g(x) = x^3$; г) $g(x) = 2x - 1$.

3.119. Найдите с помощью графиков функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $h(x) = x^2$ корни уравнения $\sqrt{x} = x^2$.

Для применения графического метода решения систем необходимо знать графики различных уравнений. Многие из них вам уже знакомы. Это, например, прямая, гипербола, парабола.

Расширим возможности использования графического метода решения систем нелинейных уравнений и выведем уравнение окружности с центром в заданной точке с заданным радиусом. Для этого сначала выведем формулу для вычисления длины отрезка с заданными координатами его концов, т. е. для вычисления расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.

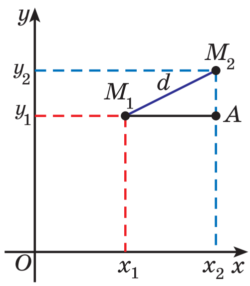


Рис. 73

Рассмотрим точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 73). Найдем расстояние d между этими точками (длину отрезка M_1M_2). Рассмотрим прямоугольный треугольник AM_1M_2, в котором $M_1A = |x_2 - x_1|$, $M_2A = |y_2 - y_1|$. По теореме Пифагора найдем гипотенузу треугольника M_1M_2A:

$$M_1M_2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Получили формулу длины отрезка с заданными координатами его концов, или формулу расстояния между двумя точками с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример 1. Найдите расстояние между точками $A(-1;\ 3)$ и $B(2;\ 5)$.

Решение. Подставим координаты точек $A(-1;\ 3)$ и $B(2;\ 5)$ в формулу расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ и получим, что

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Рассмотрим окружность на координатной плоскости. Окружность — это множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до одной данной точки (центра окружности) является величиной постоянной, равной радиусу окружности R.

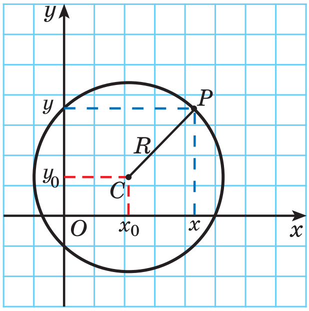


Рис. 74

По формуле расстояния между двумя точками найдем расстояние от данной точки $C(x_0;\ y_0)$ (центра окружности) до произвольной точки окружности $P(x,\ y)$ (рис. 74):

$$R = CP = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \text{ или}$$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Таким образом, если точка принадлежит окружности с центром $C(x_0;\ y_0)$ и радиусом R, то ее координаты удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ является уравнением окружности с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

Если координаты точки удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, то эта точка принадлежит окружности с центром $C(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

Покажем, что если точка $(x;\ y)$ не принадлежит окружности с центром $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R, то ее координаты не удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Действительно, если точка лежит вне окружности, то расстояние от нее до центра окружности больше радиуса, т. е. $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} > R$, а если точка лежит внутри окружности, то меньше, т. е. $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R$.

Чтобы составить уравнение окружности, нужно:

① Определить координаты центра окружности $(x_0; y_0)$. ② Определить радиус окружности R. ③ Подставить найденные значения x_0, y_0 и R в уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.	Составьте уравнение окружности с центром в точке (–8; 2) и радиусом 5. ① $x_0=-8$, $y_0=2$. ② $R=5$. ③ $(x-(-8))^2+(y-2)^2=5^2$; $(x+8)^2+(y-2)^2=25$.

Пример 2. Составьте уравнение окружности:

а) с центром в точке (4; –1) и радиусом $\sqrt{3}$;

б) с центром в точке (0; 0) и радиусом 4.

Решение. а) Подставим координаты центра окружности $x_0=4$, $y_0=-1$ и значение радиуса $R=\sqrt{3}$ в уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ и получим $(x-4)^2+(y+1)^2=3$.

б) Координаты центра окружности: $x_0=0$, $y_0=0$, радиус окружности $R=4$. Тогда уравнение данной окружности $x^2+y^2=16$.

Если центром окружности радиуса R является начало координат, то ее уравнение имеет вид $\boldsymbol{x^2+y^2=R^2}$.

Пример 3. Определите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=-x^2+2x+4. \end{cases}$

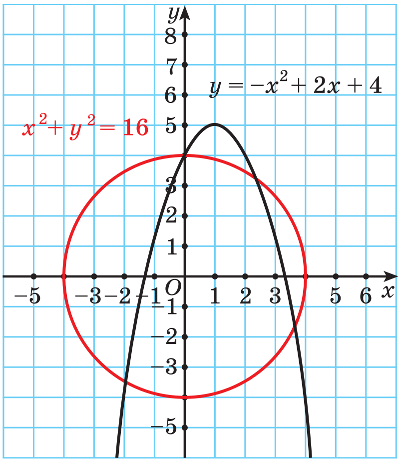


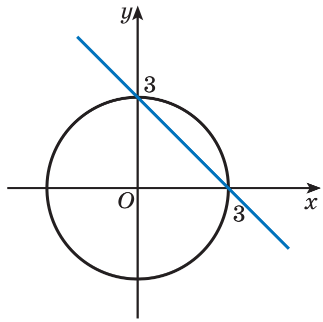
Рис. 75

Решение. Построим графики уравнений системы. Первое уравнение — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Графиком второго уравнения является парабола с вершиной в точке (1; 5), пересекающая ось ординат в точке (0; 4).

Построенные графики пересекаются в четырех точках (рис. 75). Значит, данная система уравнений имеет 4 решения.

Ответ: 4 решения.

Формула длины отрезка с заданными координатами его концов	
1. Найдите длину отрезка MN, если $M(3;\ -6)$, $N(-1;\ 4)$.	По формуле длины отрезка $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ получим: $MN = \sqrt{(-1-3)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{116}$.
2. Найдите длину диагонали прямоугольника, если заданы его вершина $A(-7;\ 1)$ и точка пересечения его диагоналей $O(-3;\ -2)$.	Найдем длину отрезка AO: $AO = \sqrt{(-7+3)^2 + (1+2)^2} = 5$. Длина отрезка AO равна половине диагонали прямоугольника, следовательно, длина диагонали равна 10.
Уравнение окружности	
3. Определите координаты центра и радиус окружности: а) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$; б) $x^2 + (y+7)^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 8$.	а) $C(-1;\ 1)$, $R = 1$; б) $C(0;\ -7)$, $R = 2$; в) $C(0;\ 0)$, $R = 2\sqrt{2}$.
4. Какие из данных точек лежат на окружности $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$: а) $A(4;\ 3)$; б) $B(4;\ -3)$; в) $C(-3;\ 4)$; г) $D(-3;\ -4)$?	Подставим координаты точек в уравнение окружности: а) $(4-1)^2 + (3+1)^2 = 25$, равенство верное, значит, точка A лежит на окружности; б) $(4-1)^2 + (-3+1)^2 = 13 \neq 25$, значит, точка B не лежит на окружности; в) $(-3-1)^2 + (4+1)^2 = 41 \neq 25$, значит, точка C не лежит на окружности; г) $(-3-1)^2 + (-4+1)^2 = 25$, равенство верное, значит, точка D лежит на окружности.
5. Запишите уравнение окружности с центром в точке $(-1;\ 1)$ и радиусом $\sqrt{2}$.	$x_0 = -1$, $y_0 = 1$, $R = \sqrt{2}$, $R^2 = 2$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ — уравнение окружности.
6. Запишите уравнение окружности с центром в точке A, для которой отрезок AB является радиусом, если $A(2;\ 4)$, $B(5;\ 7)$.	$x_0 = 2$, $y_0 = 4$, радиус найдем по формуле расстояния между двумя точками: $AB = \sqrt{(2-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$. Уравнение окружности $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9, \end{cases}$ используя графический метод.	График первого уравнения — прямая, проходящая через точки (3; 0), (0; 3). График второго уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3.  Координаты точек пересечения (3; 0), (0; 3) — решения системы.

1. Если в системе двух уравнений одно уравнение — уравнение окружности, а другое — уравнение прямой, то сколько решений может иметь эта система?

2. Используя рисунок 76, запишите две различные системы, одно из уравнений которых — уравнение окружности. Запишите решения этих систем.

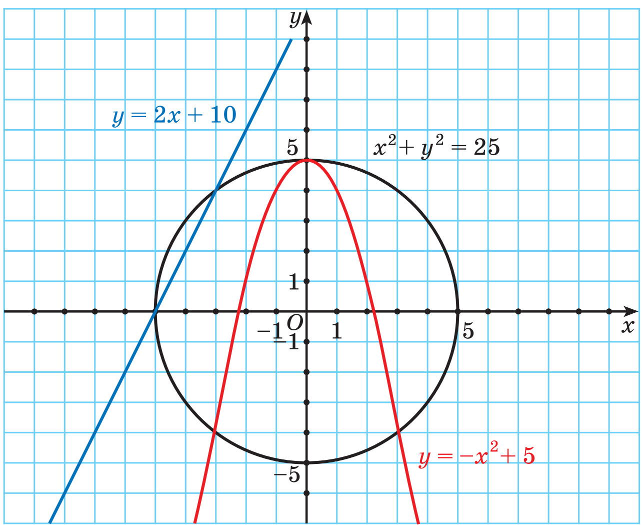


Рис. 76

3.120. Вычислите длину отрезка AB, если:

а) $A(2;\ 7)$, $B(8;\ -1)$; б) $A(-9;\ 5)$, $B(3;\ 0)$;

в) $A(0;\ -5)$, $B(2;\ 3)$; г) $A\left(\sqrt{3};\ 4\right)$, $B(0;\ 2)$.

Какую формулу вы использовали?

3.121. На координатной плоскости отмечены точки A, B, C, D и E (рис. 77). Найдите расстояние между точками:

а) A и E; б) B и D;

в) D и E; г) B и C.

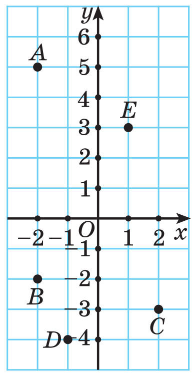


Рис. 77

3.122. Найдите расстояние от начала координат до точки с координатами:

а) $(3;\ 4)$; б) $(-2;\ 0)$; в) $(-6;\ 2)$; г) $\left(\sqrt{2};\ 5\right)$.

3.123. Найдите периметр треугольника, если его вершинами являются точки $A(-1;\ 0)$, $B(5;\ 0)$ и $C(2;\ 4)$.

3.124. Составьте план решения и найдите расстояние от точки $K(-2;\ 7)$ до:

а) оси абсцисс; б) оси ординат;

в) начала координат; г) точки $P(-1;\ 3)$.

3.125. Найдите расстояние от точки $T(6;\ 8)$ до точки, симметричной данной точке относительно:

а) оси абсцисс;

б) оси ординат;

в) начала координат.

Обобщите полученный результат.

3.126. Точки $A(-3;\ y)$ и $B(x;\ 5)$ симметричны относительно оси ординат. Найдите длину отрезка AB.

3.127. Используйте уравнение окружности и определите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x-3)^2+(y+4)^2=36$; б) $x^2+(y+7)^2=25$;

в) $(x-5)^2+y^2=32$; г) $x^2+y^2=17$.

3.128. Определите, верно ли, что:

а) центром окружности, заданной уравнением $(x-5)^2+(y+9)^2=16$, является точка $(5;\ -9)$;

б) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + (y + 10)^2 = 36$, является точка $(0;\ 10)$;

в) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 3$, является точка $(0;\ 0)$;

г) радиус окружности, заданной уравнением $(x - 8)^2 + y^2 = 25$, равен 5.

3.129. Определите, какие из данных точек лежат на окружности $x^2 + (y + 2)^2 = 9$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B\left(-2\sqrt{2};\ -1\right)$;

в) $C(2;\ -1)$; г) $D\left(\sqrt{3};\ 0\right)$.

3.130. Используйте алгоритм и запишите уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R, если:

а) $A(2;\ 7)$, $R = 3$; б) $A(-1;\ 3)$, $R = 1$;

в) $A(0;\ -2)$, $R = \sqrt{3}$; г) $A(0;\ 0)$, $R = 2\sqrt{3}$.

3.131. Запишите уравнение окружности, график которой изображен на рисунке 78. Какое уравнение имеет окружность, симметричная данной окружности относительно прямой $y = 2$? $x = -1$?

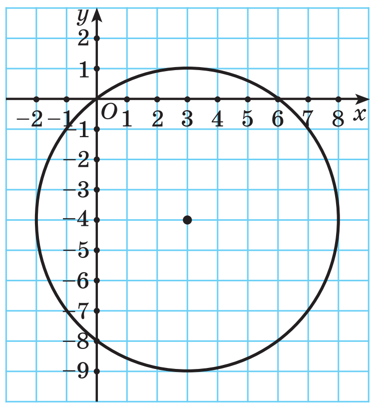


Рис. 78

3.132. Дана окружность $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$. Запишите уравнение окружности, центр которой симметричен центру данной окружности относительно:

а) начала координат, а радиус которой равен радиусу данной окружности;

б) оси ординат, а радиус которой в три раза меньше радиуса данной окружности;

в) оси абсцисс, а радиус которой в два раза больше радиуса данной окружности.

3.133. Даны точки $A(-4;\ 0)$ и $B(0;\ 6)$. Запишите уравнение окружности, для которой отрезок AB является радиусом, а центром является точка: а) A; б) B.

3.134. Даны точки $F(5; -8)$ и $P(-2; 6)$. Запишите уравнение окружности: а) с центром в точке F, проходящей через начало координат; б) с центром в точке P, проходящей через точку $N(0; 7)$.

3.135. В одной системе координат постройте окружности, заданные уравнениями $(x-3)^2+(y+2)^2=4$; $x^2+y^2=9$; $(x+4)^2+y^2=25$. Сколько точек пересечения имеют каждые две из них?

3.136. Определите радиус и запишите уравнение окружности с центром в точке $M(2; 7)$, которая:

а) касается оси абсцисс;

б) касается оси ординат;

в) касается прямой $y=5$;

г) проходит через начало координат.

3.137. Найдите расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями $x^2+y^2=4$ и $(x-6)^2+(y+8)^2=64$.

3.138. Решите систему уравнений, используя графический метод:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=x^2+3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2+y^2=36. \end{cases}$

Выполните проверку.

3.139. Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ xy=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+(y+3)^2=25, \\ y=x^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=-x^2+3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ (x-5)^2+(y-4)^2=1. \end{cases}$

3.140*. Найдите, при каких значениях числа a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=|x|+a: \end{cases}$

а) имеет одно решение; б) имеет два решения;

в) имеет три решения; г) имеет четыре решения;

д) не имеет решений.

3.141. Найдите длину отрезка AB, если:

а) $A(4; -8)$, $B(-1; 4)$; б) $A(7; 0)$, $B(1; -5)$.

3.142. Найдите расстояние между точками:

а) $M(-1; -2)$ и $N(3; 4)$;

б) $F(-5; 0)$ и $K(-6; 1)$;

в) $B\left(3; \sqrt{7}\right)$ и $D(0; 0)$.

3.143. Составьте план решения и найдите расстояние от точки $A(3; -4)$ до:

а) оси абсцисс; б) оси ординат;

в) начала координат; г) точки $B(4; -3)$.

3.144. Определите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$; б) $x^2+(y-5)^2=49$;

в) $(x+4)^2+y^2=18$; г) $x^2+y^2=19$.

3.145. Определите, верно ли, что:

а) центром окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y+7)^2=16$, является точка $(-3; 7)$;

б) центром окружности, заданной уравнением $x^2+(y-5)^2=36$, является точка $(5; 0)$;

в) центром окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=1$, является точка $(0; 0)$;

г) радиус окружности, заданной уравнением $(x+2)^2+y^2=4$, равен 4?

3.146. Выберите точки, лежащие на окружности

$$(x-1)^2+y^2=16:$$

а) $A(5; 0)$; б) $B(-1; -2)$;

в) $C\left(-2; \sqrt{7}\right)$; г) $D(3; 3)$.

3.147. Запишите уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R, если:

а) $A(6; 3)$, $R=7$; б) $A(2; -4)$, $R=5$;

в) $A(-3; 0)$, $R=\sqrt{2}$; г) $A(0; 0)$, $R=3\sqrt{5}$.

3.148. Дана окружность $(x+5)^2+(y-3)^2=16$. Запишите уравнение окружности, центр которой симметричен центру данной окружности относительно:

а) начала координат, а радиус которой равен радиусу данной окружности;

б) оси ординат, а радиус которой в два раза меньше радиуса данной окружности;

в) оси абсцисс, а радиус которой в три раза больше радиуса данной окружности.

3.149. Даны точки $A(5;\ 0)$ и $B(0;\ -2)$. Запишите уравнение окружности, для которой точка B является центром, а отрезок AB является радиусом.

3.150. Верно ли, что окружности, заданные уравнениями $(x-1)^2+(y+5)^2=36$ и $(x-4)^2+y^2=9$, не имеют общих точек?

3.151. Выберите все верные утверждения:

а) окружность, заданная уравнением $x^2+(y-2)^2=4$, проходит через точку $A(-1;\ 1)$;

б) прямая $y=10$ является касательной к окружности $(x-9)^2+y^2=100$;

в) центры окружностей, заданных уравнениями $(x+3)^2+(y-7)^2=15$ и $(x-3)^2+(y+7)^2=13$, симметричны относительно оси ординат.

3.152. Решите систему уравнений, используя графический метод:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x-4)^2+y^2=25. \end{cases}$

Выполните проверку.

3.153. Используйте графики уравнений и определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ xy=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+(y+2)^2=16, \\ y=x^2-5. \end{cases}$

3.154. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2\leqslant 1, \\ x^2+5x+4\leqslant 0. \end{cases}$

3.155. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2\leqslant 1, \\ x^2+5x+4\leqslant 0. \end{array}\right.$

3.156. Длину участка увеличили на 10 %, а ширину уменьшили на несколько процентов. В результате площадь участка уменьшилась на 1 %. Найдите, на сколько процентов уменьшили ширину участка.

3.157. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{17}+2\right)^2-\left(5-\sqrt{17}\right)^2-14\sqrt{17}.$$

3.158. Сократите дробь $\dfrac{(1-2a)^2}{2a^2+9a-5}$.

3.159. Функция задана формулой $y=-7x+2$. Запишите уравнение нечетной функции, график которой параллелен графику данной функции.

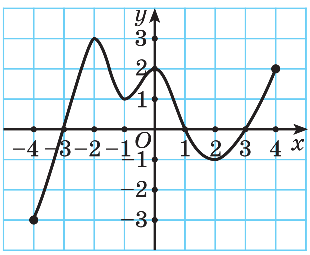
§ 13. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов для решения рациональных неравенств

3.160. Решите неравенство $x^2-1<0$.

3.161. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x^2-5x+6}.$$

3.162. Определите промежутки знакопостоянства функции $y=f(x)$, заданной графически (рис. 79).

а) 

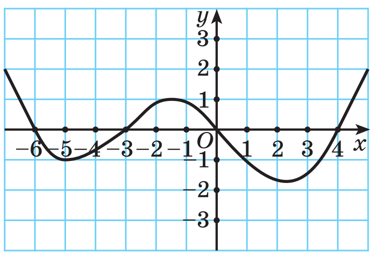
б) 

Рис. 79

Рассмотрим задачу. Лодка прошла по течению реки 5 км и вернулась обратно, затратив на весь путь не больше 1 ч. Какова наименьшая возможная скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение. Обозначим через x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ собственную скорость лодки. Составим таблицу зависимостей между величинами.

Процесс	Скорость, $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$	Расстояние, км	Время, ч
Движение лодки по течению реки	$x+3$	5	$t_1 = \frac{5}{x+3}$
Движение лодки против течения реки	$x-3$	5	$t_2 = \frac{5}{x-3}$

По условию задачи на весь путь лодка затратила не больше 1 ч. Составим математическую модель: $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leqslant 1$.

Полученное в ходе решения задачи неравенство $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leqslant 1$ является рациональным.

Рациональным называется неравенство, в левой и правой частях которого — рациональные выражения.

Рассмотрим один из методов решения рациональных неравенств — метод интервалов. Этот метод основан на использовании графика функции.

Предположим, что нужно решить неравенство $f(x) \geqslant 0$, где $y = f(x)$ — функция, график которой изображен на рисунке 80. Тогда для решения неравенства $f(x) \geqslant 0$ достаточно указать значения аргумента, при которых значения функции $f(x)$ неотрицательны, т. е. при которых график функции лежит не ниже оси абсцисс. Это промежутки $[-6; -2]$ и $[2; 8]$. Следовательно, все решения неравенства $f(x) \geqslant 0$ — это все

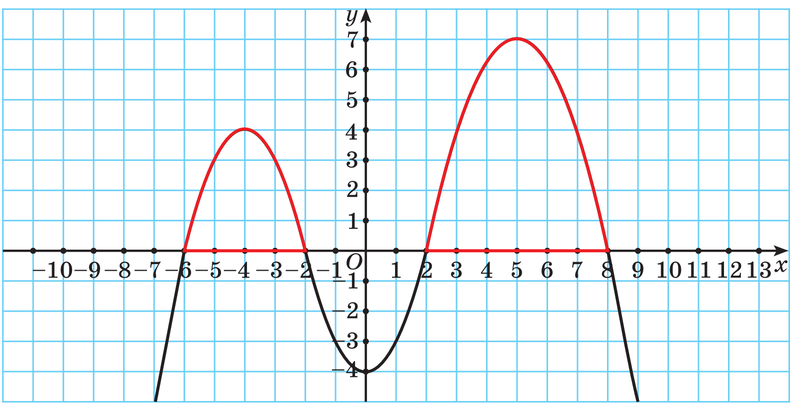


Рис. 80

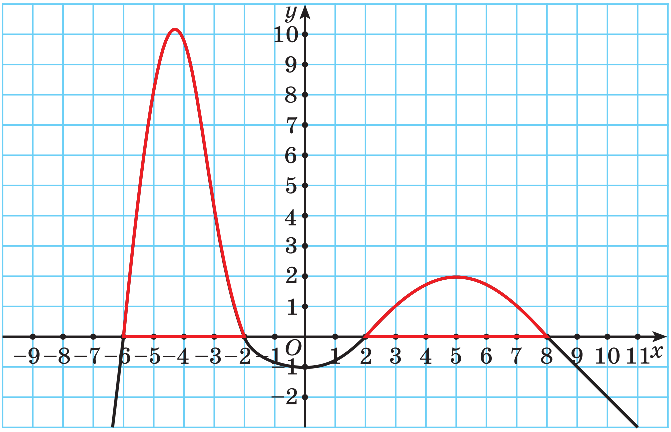


Рис. 81

значения переменной x, принадлежащие объединению множеств $x \in [-6; -2] \cup [2; 8]$.

Заметим, что такие же решения имеет неравенство $g(x) \geqslant 0$, где $y = g(x)$ — функция, график которой изображен на рисунке 81, так как значения функции $y = g(x)$ неотрицательны при тех же значениях переменной, что у функции $y = f(x)$.

Таким образом, для применения метода интервалов к решению неравенства достаточно построить схему графика функции, на которой отражены только некоторые (необходимые для решения неравенства) свойства функции, а именно ее область определения, нули и промежутки знакопостоянства.

Пример 1. Решите неравенство

$$(x-1)(x+2{,}5)(x-4) < 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = (x-1)(x+2{,}5)(x-4)$. Построим схему графика этой функции, по которой определим ее промежутки знакопостоянства. Для этого найдем точки пересечения графика с осью абсцисс, т. е. нули этой функции: $(x-1)(x+2{,}5)(x-4) = 0$ при $x = 1$; $x = -2{,}5$; $x = 4$.

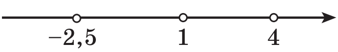


Рис. 82

Отметим нули функции на оси абсцисс (рис. 82). Так как данное неравенство строгое, то нули функции отметим на оси пустыми точками.

Нули функции разбили ось на четыре промежутка. Определим, выше или ниже оси абсцисс расположен график функции в каждом из полученных промежутков.

Поскольку правее точки 4 каждый из трех множителей произведения $(x-1)(x+2{,}5)(x-4)$ принимает положительные значения, то при $x \in (4;\ +\infty)$ график функции $f(x) = (x-1)(x+2{,}5)(x-4)$ расположен выше оси абсцисс.

При переходе через каждую из отмеченных точек знак функции $f(x)$, а значит, и положение графика относительно оси абсцисс меняется, так как меняется знак одного из множителей.

Построим схему графика функции $f(x) = (x - 1)(x + 2{,}5)(x - 4)$ (рис. 83).

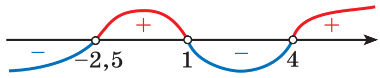


Рис. 83

При $x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4)$ построенная кривая лежит ниже оси абсцисс. Это объединение интервалов является множеством решений данного неравенства.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$(x+9)^2(x-2)(x-3) \leqslant 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $h(x) = (x+9)^2(x-2)(x-3)$. Найдем ее нули: $(x+9)^2(x-2)(x-3) = 0$ при $x = -9;\ x = 2;\ x = 3$. Так как неравенство нестрогое, то нули функции являются решениями данного неравенства, поэтому включим их во множество решений неравенства и отметим на оси абсцисс закрашенными точками (рис. 84).

Затем определим положение графика функции в каждом из четырех полученных промежутков. Правее точки 3 каждый из трех множителей произведения $(x+9)^2(x-2)(x-3)$ принимает положительные значения, значит, график функции расположен выше оси абсцисс. При переходе через точки 3 и 2 положение графика меняется, так как меняется знак одного из множителей $(x-3)$ или $(x-2)$. При переходе через точку -9 положение графика не меняется, так как множитель $(x+9)^2$ принимает неотрицательные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

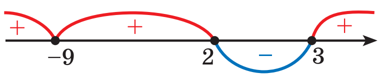


Рис. 84

Построим схему графика функции (см. рис. 84) и запишем решение неравенства в соответствии с его знаком: $x \in \{-9\} \cup [2;\ 3]$.

Ответ: $\{-9\} \cup [2;\ 3]$.

Если во множителе $(x - a)^n$ число n — четное, то при переходе через точку a положение графика относительно оси абсцисс не меняется, а если число n — нечетное, то меняется.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)} \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}$.

Отметим на оси абсцисс нули этой функции (числа -3 и 1) и те значения переменной, которые не входят в область определения функции $g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}$ (это числа -2 и 4 — значения переменной, при которых знаменатель дроби обращается в нуль (нули знаменателя) (рис. 85).

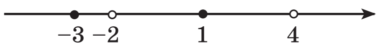


Рис. 85

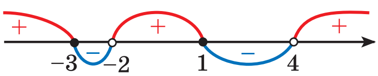


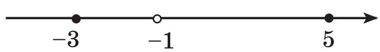
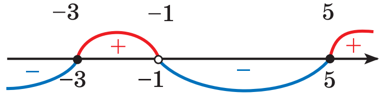
Рис. 86

Так как неравенство нестрогое, то нули функции являются решениями неравенства (на оси абсцисс — закрашенные точки -3 и 1). Нули знаменателя не являются решениями неравенства (на оси абсцисс — пустые точки -2 и 4).

Построим схему графика (рис. 86). Положение графика относительно оси абсцисс меняется при переходе через каждую точку. По схеме графика в соответствии со знаком неравенства запишем его решение: $x \in (-\infty; -3] \cup (-2; 1] \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (-2; 1] \cup (4; +\infty)$.

Для того чтобы решить рациональное неравенство методом интервалов, нужно:

① Привести неравенство к виду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geqslant 0$ или $f(x) \leqslant 0$. ② Найти и отметить на оси абсцисс нули функции и те значения переменной, при которых значения функции не существуют (нули знаменателя). ③ Построить схему графика функции. ④ Записать ответ в соответствии со знаком неравенства.	Решите неравенство $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \geqslant 0$. ① Неравенство имеет вид $f(x) \geqslant 0$, где $f(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{x+1}$. ②  ③  ④ *Ответ:* $x \in [-3; -1) \cup [5; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\frac{x(x-2)}{(x+1)^4} > 0$.

Решение.

① Неравенство имеет вид $f(x) > 0$, где $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^4}$.

② Найдем нули функции (числа 0; 2) и, поскольку знак неравенства строгий, отметим их на оси абсцисс пустыми точками. Найдем значение переменной, при котором значения функции не существуют, — нуль знаменателя (число –1) и отметим его на оси абсцисс пустой точкой (рис. 87).

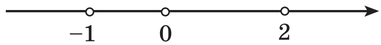


Рис. 87

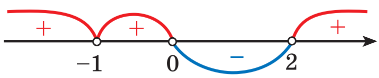


Рис. 88

③ Построим схему графика функции, при этом учтем, что при переходе через точку –1 положение графика относительно оси не меняется, а при переходе через точки 0 и 2 меняется (рис. 88).

④ *Ответ*: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Для того чтобы положение графика в первом правом промежутке было выше оси абсцисс, нужно умножением обеих частей неравенства на –1 добиться положительных коэффициентов перед переменной в линейных множителях.

Пример 5. Решите неравенство $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geqslant 0$.

Решение. Для того чтобы все коэффициенты перед переменными в линейных множителях были положительными, умножим обе части неравенства $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geqslant 0$ на –1 и получим неравенство $\frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1} \leqslant 0$.

① Неравенство имеет вид $f(x) \leqslant 0$, где $f(x) = \frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1}$.

② Найдем нули функции (числа 3 и 4) и, поскольку знак неравенства нестрогий, отметим их на оси абсцисс закрашенными точками. Найдем значение переменной, при котором значение функции не существует (число –1), и отметим его на оси абсцисс пустой точкой (рис. 89).

Рис. 89

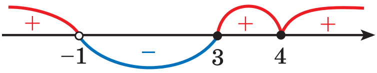
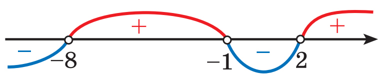
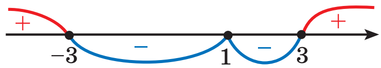
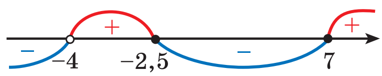
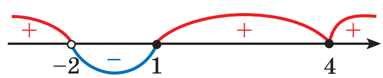


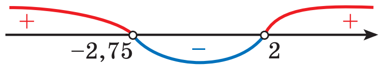
Рис. 90

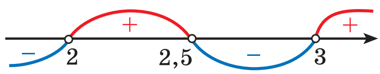
③ Построим схему графика функции, при этом учтем, что при переходе через точку 4 положение графика относительно оси не меняется, а при переходе через точки –1 и 3 меняется (рис. 90).

④ *Ответ*: $x \in (-1;\ 3] \cup \{4\}$.

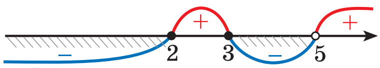
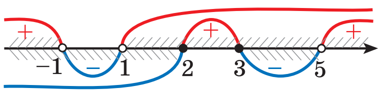
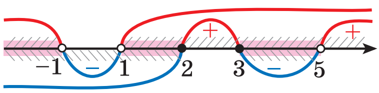
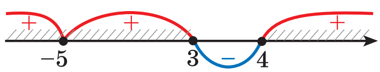
Рациональные неравенства	
1. Какие из следующих неравенств являются рациональными: а) $(x-2)(x+3) < 0$; б) $3x+2 \geqslant x-1$; в) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} > 0$; г) $\frac{(x-2)(x-3)}{x-5} > 3$?	Неравенства а), б), г) — рациональные, так как в левой и правой частях этих неравенств — рациональные выражения. Неравенство в) не является рациональным, так как содержит иррациональные выражения с переменной.
Метод интервалов для решения рациональных неравенств	
2. Решите неравенство: а)$(x-2)(x+1)(x+8) < 0$; б) $(x-1)^2(9-x^2) \leqslant 0$.	а) ① Неравенство имеет вид $f(x) < 0$, где $f(x) = (x-2)(x+1)(x+8)$. ② Нулями функции являются числа –8; –1 и 2. Поскольку знак неравенства строгий, отметим их на оси абсцисс пустыми точками.  ③ Построим схему графика функции. При переходе через каждую из точек –8; –1 и 2 положение графика относительно оси меняется.  ④ *Ответ*: $x \in (-\infty;\ -8) \cup (-1;\ 2)$. б) Умножим обе части данного неравенства на –1 и получим неравенство $(x-1)^2(x^2-9) \geqslant 0$, которое запишем в виде $(x-1)^2(x-3)(x+3) \geqslant 0$. Нулями функции $f(x) = (x-1)^2(x-3)(x+3)$ являются числа –3; 1 и 3. Так как знак

	неравенства нестрогий, то на оси абсцисс числа -3; 1 и 3 отметим закрашенными точками. Построим схему графика функции.  При переходе через точку 1 положение графика относительно оси не меняется, а при переходе через точки -3 и 3 — меняется. *Ответ*: $x \in (-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$.
3. Решите неравенство: а) $\dfrac{(2x+5)(x-7)}{x+4} \leqslant 0$; б) $\dfrac{(1-x)^3(x-4)^2}{3x+6} \leqslant 0$.	а) Нулями функции $f(x) = \dfrac{(2x+5)(x-7)}{x+4}$ являются числа $-2,5$ и 7. Так как знак неравенства нестрогий, то отметим их на оси абсцисс закрашенными точками. Нулем знаменателя является число -4. Отметим его пустой точкой. Построим схему графика функции.  *Ответ*: $x \in (-\infty; -4) \cup [-2,5; 7]$. б) Умножим обе части неравенства на -1 и получим неравенство $\dfrac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6} \geqslant 0$. Нулями функции $f(x) = \dfrac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6}$ являются числа 1 и 4. Так как знак неравенства нестрогий, то отметим их на оси абсцисс закрашенными точками. Нулем знаменателя является число -2. Отметим его пустой точкой. Построим схему графика функции. При переходе через точку 4 положение графика относительно оси не меняется.  *Ответ*: $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.
4. Решите неравенство $\dfrac{4x}{x-2} < \dfrac{11}{2-x}$.	Запишем неравенство в виде: $\dfrac{4x}{x-2} - \dfrac{11}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x-2} + \dfrac{11}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{4x+11}{x-2} < 0$.

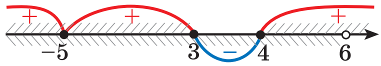
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Нулем функции $f(x)=\dfrac{4x+11}{x-2}$ является число −2,75. Так как знак неравенства строгий, то отметим его на оси абсцисс пустой точкой. Нулем знаменателя является число 2. Отметим его на оси абсцисс пустой точкой. Построим схему графика функции.


Ответ: $x \in (-2{,}75;\ 2)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Решите неравенство
$\dfrac{x}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{x-2}>\dfrac{2}{x-3}$.</td>
<td>Приведем неравенство к виду:
$\dfrac{x}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)}>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}>0.$
Отметим на оси абсцисс нуль функции $f(x)=\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$, т. е. $x=2{,}5$, и те значения переменной, при которых значения функции не существуют: $x=2$ и $x=3$. Построим схему графика функции.


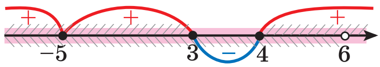
Ответ: $x \in (2;\ 2{,}5) \cup (3;\ +\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Найдите область определения функции
$y=\sqrt{\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-4}}$.</td>
<td>Так как функция $y=\sqrt{t}$ определена для $t \geqslant 0$, то решим неравенство $\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-4} \geqslant 0$. Данное неравенство равносильно неравенству
$\dfrac{x\left(x^2-7x+12\right)}{x-4} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-4)(x-3)}{x-4} \geqslant 0.$
Для нахождения нулей функции $f(x)=\dfrac{x(x-4)(x-3)}{x-4}$ используем условие равенства дроби нулю:</td>
</tr>
</table>

	$\dfrac{x(x-4)(x-3)}{x-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=3,\\ x=4,\end{array}\right.\\ x-4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=3.\end{array}\right.$ При $x=4$ значение функции не существует. Построим схему графика функции. При переходе через точку 4 положение графика относительно оси не меняется, так как множитель $(x-4)$ входит и в числитель, и в знаменатель, а при переходе через точки 0 и 3 положение графика меняется.  $D(y)=(-\infty;\ 0]\cup[3;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$.
7. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-5}\leqslant 0,\\ (x-1)(x+1)>0.\end{cases}$	Отметим на оси абсцисс множество решений первого неравенства системы.  Отметим на этой же оси множество решений второго неравенства системы.  Найдем пересечение множеств решений.  *Ответ*: $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 2]\cup[3;\ 5)$.
8. Найдите решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l}(x-3)(x-4)(x+5)^2\geqslant 0,\\ 2x-12<0.\end{array}\right.$	Отметим на оси абсцисс множество решений первого неравенства совокупности. 

Отметим на этой же оси множество решений второго неравенства совокупности.



Найдем объединение множеств решений.



Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Установите соответствие между неравенством и схемой графика функции, соответствующей решению неравенства (рис. 91):

а) $(x-1)(x+4)(x-2) \leqslant 0$; б) $(x-1)^2(x+4)(x-2) \geqslant 0$;

в) $(x-1)(x+4)^3(x-2)^4 \leqslant 0$.

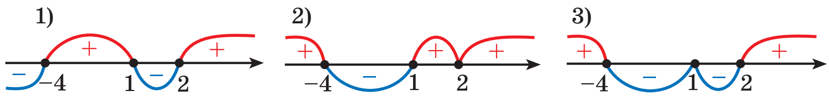


Рис. 91

3.163. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x+2)(x-7)(x-10) > 0$;

б) $(3x+7)(x+6)(x-5) < 0$;

в) $x(2x-15)(x-8) \geqslant 0$;

г) $3x(4x+7)(3x-2) \leqslant 0$.

3.164. Решите неравенство методом интервалов, используя алгоритм:

а) $\frac{x-4}{x-1} > 0$; б) $\frac{x+6}{x-2} < 0$; в) $\frac{x+10}{x+12} \geqslant 0$;

г) $\frac{3x-9}{x+5} \leqslant 0$; д) $\frac{7x-2}{x-3} > 0$; е) $\frac{6x+12}{x} \leqslant 0$.

3.165. Найдите все значения переменной, при которых:

а) $(3-x)(x-1)(x+6) \leqslant 0$;

б) $(x-10)(2x+9)(7-2x) \geqslant 0$;

в) $(7-x)(5-x)(3x-10) < 0$;

г) $-(5-2x)(4-x)(5x-1) > 0$.

3.166. Решите неравенство, используя алгоритм решения неравенства методом интервалов:

а) $\frac{(x+1)(x-6)}{x-2} < 0;$ б) $\frac{3x+8}{(x-3)(x+5)} > 0;$

в) $\frac{x(7x-3)}{x+6} \leqslant 0;$ г) $\frac{5x(x-4)}{(2x+3)(x-7)} \geqslant 0;$

д) $\frac{(5-x)(x+4)}{x-3} > 0;$ е) $\frac{(x-7)(5x+2)}{3-2x} < 0;$

ж) $\frac{x(3-x)}{(1-8x)(x+12)} \geqslant 0;$ з) $\frac{(8-3x)(5-x)}{(x-4)(9-2x)} \leqslant 0.$

3.167. Решите неравенство двумя способами:

а) $(x-3)(x-5) < 0;$ б) $(x+7)(x-1) > 0;$

в) $(x+9)(x+3) \leqslant 0;$ г) $(2x-8)(x+6) \geqslant 0;$

д) $(3x-1)(x-7) < 0;$ е) $x(5x+2) \geqslant 0.$

3.168. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x-1)(x+2)(x-3) > 0,\\ 2x-5 \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x-5}{x} \leqslant 0,\\ (x-2)(x-3) > 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{x+5}{x-3} < 0,\\ \frac{x+9}{x-8} > 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x(x+3)(x-5) > 0,\\ (x+2)(x-6) \leqslant 0.\end{cases}$

3.169. Используя метод интервалов, решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}x(x+4)(2x-1) \geqslant 0,\\ \frac{x+7}{x-2} \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.170. Решите неравенство:

а) $(x-3)^2(x+2) \leqslant 0;$ б) $x^2(x-7) < 0;$

в) $(x-10)(x-5)^2(x+3) \geqslant 0;$ г) $(2x+9)(2-x)(x-1)^2 \geqslant 0.$

3.171. Проанализируйте условие и найдите все значения аргумента, при которых график функции

$$f(x) = (x+9)^4(x-2)^2x^3(x+3)$$

расположен ниже оси абсцисс.

3.172. Решите неравенство, используя алгоритм решения неравенств методом интервалов:

а) $\frac{(x-5)^2}{x-3} \leqslant 0;$ б) $\frac{x-7}{(x-12)^2} \geqslant 0;$

в) $\dfrac{6-x}{(x-5)(x-2)^4}<0$; г) $\dfrac{(x+5)^6}{(1-4x)(x+4)}\geqslant 0$.

3.173. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x+1)(x-2)(x-4)^2\geqslant 0,\\ x^2-16>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{x-4}\geqslant 0,\\ x(x-2)(x+5)\geqslant 0.\end{cases}$

3.174. Найдите все значения переменной, при которых значение выражения:

а) $(x^2+4x+4)(x-3)$ положительно;

б) $(x^2-6x+9)(x^2-25)$ отрицательно;

в) $(25x^2-10x+1)(1-x^2)$ неположительно;

г) $(4x^2+12x+9)(x^2+5)$ неотрицательно.

3.175. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}(x^2-8x+16)(x-5)\geqslant 0,\\ 5x-20<0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}(9x^2-6x+1)(x^2-4)<0,\\ \dfrac{x-7}{x}\leqslant 0.\end{array}\right.$

3.176. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x^2-10x+25)x}{x^2-49}\geqslant 0$; б) $\dfrac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}>0$;

в) $\dfrac{(3-x)(9x^2+1)}{x^2-16}\leqslant 0$; г) $\dfrac{9x^2-6x+1}{1-4x^2}\leqslant 0$.

Проверьте, является ли число 5 решением какого-либо из этих неравенств.

3.177. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x+2)(x-7)}{4x+8}\leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\geqslant 0$;

в) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}\leqslant 0$; г) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-9}\geqslant 0$.

3.178. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{\left(x^2-4x+3\right)(x-2)}$;

б) $y=\sqrt{\left(x^2+6x+5\right)\left(1-x^2\right)}$;

в) $y = \sqrt{\dfrac{2 - x - x^2}{2x + 3}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 11x + 28}}$.

3.179. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x-3)^3(x+5)^4}{x^2} < 0$; б) $\dfrac{7(x-4)(x+3)^2}{(x^2+9)(x+1)^2(x-5)} \leqslant 0$;

в) $-\dfrac{(x^3-8)(x-4)^2(x-6)}{x^2(x^2-9)(x^4+25)} < 0$; г) $\dfrac{(x+2)(x+3)^5(x-2)^2}{(4-x)(2x+7)} \leqslant 0$.

Какое из этих неравенств содержит среди решений числа -6; 2; 5?

3.180. Составьте план решения и найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $\dfrac{1}{x+5} > \dfrac{x}{x+5}$; б) $\dfrac{x}{x^2-1} \geqslant \dfrac{5}{1-x^2}$.

3.181. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x}{x-1} \geqslant 3$; б) $\dfrac{3-x}{2x+5} < 1$; в) $\dfrac{4x-3}{x} \leqslant 2$;

г) $\dfrac{1}{x-3} < \dfrac{2}{x+2}$; д) $\dfrac{5}{x-2} \geqslant \dfrac{1}{1-x}$; е) $\dfrac{8-x}{x-10} \leqslant \dfrac{2}{2-x}$;

ж) $\dfrac{3}{x-1} > x + 1$; з) $x + 4 \leqslant \dfrac{9}{x+4}$.

3.182. Найдите все значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2 - \dfrac{x^2+11}{x+5}}$; б) $\sqrt{\dfrac{4}{(x-1)^2} - 1}$.

3.183. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{6}{x+1} \geqslant 1, \\ x^2 \leqslant 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ \dfrac{x^2-5x}{x+3} \geqslant 2. \end{cases}$

3.184. Найдите все значения переменной, при которых:

а) сумма дробей $\dfrac{4}{x+1}$ и $\dfrac{2}{1-x}$ меньше 1;

б) разность дробей $\dfrac{x-2}{x-1}$ и $\dfrac{x-1}{x}$ больше 2;

в) разность дробей $\dfrac{9}{3-x}$ и $\dfrac{7}{x^2-5x+6}$ не меньше 1.

3.185. Туристы на моторной лодке планируют проплыть 15 км по течению реки и такое же расстояние против течения, затратив на весь путь не более 4 ч. Какой может быть собственная скорость лодки, если скорость течения реки составляет 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

3.186. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 5} + \frac{5}{\sqrt{(x-2)(x+3)x}}$;

б) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x+4}} - \sqrt{2x^2 - x + 3}$.

3.187*. Найдите все значения аргумента, при которых:

а) график функции $y = \frac{2x+3}{x^2 + x - 12}$ расположен ниже прямой $y = \frac{1}{2}$;

б) график функции $y = \frac{2x-5}{x^2 - 6x - 7}$ расположен выше графика функции $y = \frac{1}{x-3}$;

в) прямая $y = x - 1$ расположена не ниже графика функции $y = \frac{x^2 - 5x - 1}{x - 1}$.

3.188*. Найдите сумму целых отрицательных чисел, которые не являются решением неравенства $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

3.189*. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 6x + 9)}{x - 3} \geqslant 0$.

3.190*. Найдите число целых отрицательных решений неравенства $\frac{3x^2 - 11x + 22}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 3$.

3.191*. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} \leqslant 0$.

3.192*. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{(x^2 - 3x + 7)(x^2 + 4x) - 4(3x - x^2 - 7)}{x^2 - 7x + 6} \leqslant 0.$$

3.193. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x + 5)(x + 1)(x - 4) < 0$;

б) $x(2x - 11)(3x + 6)(x - 5) \geqslant 0$;

в) $(1-x)(x+8)(4x-3)\leqslant 0$;

г) $-(3-2x)(8-x)(9-4x)>0$.

3.194. Решите неравенство методом интервалов, используя алгоритм:

а) $\frac{x-7}{x-3}<0$; б) $\frac{x-9}{x+5}>0$;

в) $\frac{2x+17}{x+3}\leqslant 0$; г) $\frac{x}{5x+2}\geqslant 0$.

3.195. Найдите все значения переменной, при которых:

а) $\frac{(x+2)(x-5)}{x-3}>0$; б) $\frac{2x+15}{(x-1)(x+9)}<0$;

в) $\frac{x(9x-1)}{x-5}\geqslant 0$; г) $\frac{(8-x)(x+6)}{x-11}\leqslant 0$;

д) $\frac{x(2-x)}{(1-3x)(x+5)}>0$; е) $\frac{(1-6x)(3-x)}{(7-2x)(x+7)}\leqslant 0$.

3.196. Решите неравенство двумя способами:

а) $(x-2)(x-8)>0$; б) $(x+3)(x-9)\leqslant 0$;

в) $(3x-6)(x+5)<0$; г) $x(2x-7)\geqslant 0$.

3.197. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{x-8}{3-x}\leqslant 0,\\ (x-1)(x-2)(x+7)<0.\end{cases}$

3.198. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}(x-3)(x+4)>0,\\ \frac{x+4}{x}\leqslant 0.\end{array}\right.$

3.199. Решите неравенство:

а) $(x-5)^2(x+3)\leqslant 0$; б) $x^2(x-9)<0$;

в) $(x-9)(x-7)^2(x+6)\geqslant 0$; г) $(3x+7)(8-x)(x-2)^2\geqslant 0$.

3.200. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-6)^2}{x-4}\leqslant 0$; б) $\frac{x-8}{(x-10)^2}\geqslant 0$;

в) $\frac{(x-8)(9-x)}{(x-5)^2}<0$; г) $\frac{(x+6)^2}{(7-3x)(x+2)}\geqslant 0$.

Верно ли, что число 10 является решением каждого неравенства; не является решением ни одного из неравенств?

3.201. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-8)^2}\geqslant 0,\\ x^2-3x\geqslant 0.\end{cases}$

3.202. Найдите все значения переменной, при которых значение выражения:

а) $(x^2-10x+25)(x+7)$ отрицательно;

б) $(4x^2+4x+1)(36-x^2)$ неположительно.

Выберите наибольшее целое отрицательное решение каждого из этих неравенств.

3.203. Решите совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}(x^2+12x+36)(x-1)\geqslant 0,\\ \dfrac{x+6}{x}<0.\end{array}\right.$$

3.204. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x^2+4x+4)x}{x^2-25}\geqslant 0$; б) $\dfrac{(9-x^2)(x^2+4)}{x^2-10x+25}>0$.

3.205. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(x^2-7x+10)(x+3)}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-49}{6-x-x^2}}$.

3.206. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x-7)^3}{x^2(x+3)^4}<0$; б) $\dfrac{-8(x-2)(x^2+1)(x+4)^2}{(x+2)^2(x-9)}\geqslant 0$.

Являются ли числа –3; –4 решением какого-либо из этих неравенств?

3.207. Решите неравенство:

а) $\dfrac{1-x}{x}<3$; б) $\dfrac{1}{x-7}>\dfrac{x+4}{7-x}$;

в) $\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{1}{2-x}$; г) $\dfrac{5}{x+2}\geqslant x-2$.

3.208. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{8-x}{x-10}\leqslant\dfrac{2}{2-x},\\ x^2-25\geqslant 0.\end{cases}$

3.209. Найдите все значения переменной, при которых разность дробей $\dfrac{6}{x}$ и $\dfrac{6}{x+1}$ не превосходит 1.

3.210. Туристы на катере планируют проплыть 40 км по течению реки и такое же расстояние против течения, затратив на весь путь не более 3 ч. Какой может быть собственная скорость катера, если скорость течения реки составляет 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

3.211. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-8}}-\sqrt{x^2+6x+5}.$$

3.212*. Найдите значения аргумента, при которых график функции $y=\frac{x^2-4x-1}{x-2}$ расположен не выше прямой $y=x+2$.

3.213*. Найдите сумму целых решений неравенства

$$1+\frac{2}{x+4}\leqslant\frac{7}{6-x}.$$

3.214*. Найдите сумму натуральных решений неравенства

$$\frac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)}\leqslant 0.$$

3.215. Верно ли, что:

а) $-73\notin \boldsymbol{Z}$; б) $\sqrt{5}\notin \boldsymbol{Q}$; в) $-\sqrt{2}\notin \boldsymbol{N}$;
г) $0\notin \boldsymbol{Z}$; д) $0,(3)\notin \boldsymbol{I}$; е) $2,6\notin \boldsymbol{R}$?

3.216. Вычислите: $\sqrt{13-\sqrt{69}}\cdot\sqrt{\sqrt{69}+13}$.

3.217. Решите уравнение $(2x-3)(2x+3)-(x-2)^2-1=5x$.

3.218. Представьте в виде дроби выражение

$$\frac{1}{2x-y}-\frac{1}{2x+y}+\frac{4x}{4x^2-y^2}.$$

3.219. Решите уравнение $\frac{x^2+3x}{x-2}=\frac{x-12}{2-x}$.

3.220. Постройте график функции $y=-x^2+4x-5$. Найдите множество значений этой функции.

3.221. Используя графический метод, найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ y=4x.\end{cases}$

3.222. Функция $y=f(x)$ четная. Известно, что $f(x)=x^3$ при $x\leqslant 0$. Найдите $f(2)$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение дробно-рациональных уравнений;
- знать и уметь применять условие равенства рациональной дроби нулю;

- знать алгоритм решения дробно-рациональных уравнений;
- уметь применять алгоритм решения дробно-рациональных уравнений;
- уметь решать задачи с помощью рациональных уравнений;
- уметь применять для решения систем рациональных уравнений способы подстановки, сложения;
- уметь использовать графики уравнений для решения систем уравнений;
- уметь решать задачи с помощью систем рациональных уравнений;
- знать и уметь применять формулу длины отрезка, заданного координатами его концов;
- знать уравнение окружности и уметь применять его для решения задач;
- знать и уметь применять метод интервалов для решения рациональных неравенств;
- уметь применять правила и алгоритмы для решения систем и совокупностей рациональных неравенств.

Я проверяю свои знания

1. Выберите уравнение, корнем которого является число -4:

а) $\frac{x^2+4x+4}{x-6}=0$; б) $\frac{2x+8}{x-9}=0$; в) $\frac{(x+12)(x+4)}{x+4}=0$;

г) $\frac{7x+1}{x+4}=0$; д) $\frac{4x^2+1}{x-10}=0$.

2. Выберите систему уравнений, графическая иллюстрация которой представлена на рисунке 92:

а) $\begin{cases} y=-x+3, \\ xy=16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=-x+3, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=x+3, \\ x^2-y^2=16; \end{cases}$

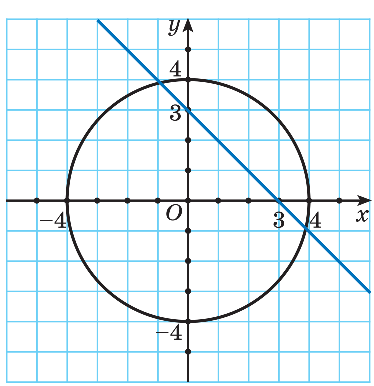


Рис. 92

г) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 16; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$

3. Решите уравнение, используя условие равенства дроби нулю:

а) $\frac{x+5}{x-1} = 0;$ б) $\frac{x^2-36}{x-6} = 0;$

в) $\frac{x^2-6x+8}{x-4} = 0;$ г) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0.$

4. Сумма двух чисел равна 6, а разность квадратов этих чисел равна 12. Найдите эти числа.

5. Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-3)(2x+5)(x-8) > 0;$ б) $\frac{(x-3)(5-x)}{6x+1} \leqslant 0;$

в) $(x^2-4)(x-3)(x^2+10x+25) < 0;$ г) $\frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-3} \leqslant 0;$

д) $\frac{(x^2-9)(x^2+2x+1)}{25-x^2} \geqslant 0.$

6. Решите уравнение:

а) $\frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{9}{(x+1)(x+2)};$

б) $\frac{1}{x+3} - \frac{x}{3-x} = \frac{18}{x^2-9};$

в) $\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3};$

г) $\frac{8}{x^2-6x+8} + \frac{1-3x}{2-x} = \frac{4}{x-4}.$

7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 4x - y = -3, \\ 5x + y = 5. \end{cases}$

8. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 12x + 11} + \frac{6}{\sqrt{(x-1)(x+5)x}};$

б) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-5x^2}{x+6}} - \sqrt{7x^2 - x + 1}.$

9. Составьте модель условия и решите задачу:

а) Две производственные линии, работая одновременно, выполнили весь заказ за 5 ч. Если бы производительность первой линии была в два раза больше, а второй — в два раза меньше, то весь заказ они выполнили бы за 4 ч. Найдите, за сколько часов выполнила бы весь заказ одна первая линия.

б) Первый турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 ч быстрее, чем второй. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второй увеличил свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорость второго туриста.

10. Найдите, при каком значении числа a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x - y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Практическая математика

1. Пешеход идет со скоростью 5 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, велосипедист едет со скоростью 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, автомобиль по кольцевой дороге движется со скоростью 100 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, пассажирский самолет летит со скоростью 500 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, скорость международной космической станции на орбите — 27 700 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите, за какое время каждый из этих объектов преодолеет расстояние в 1 км.

2. На оплату разгрузки поступившего производственного оборудования выделена некоторая сумма денег. Работу согласилась выполнить бригада грузчиков. Поскольку разгрузкой занималась не вся бригада (3 человека заболели), то каждый грузчик получил на 1,5 тыс. р. больше. Найдите выделенную бригаде сумму денег (тысяч рублей), зная, что 5 %-й сбор за банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тыс. р.

3. Рабочая смена сотрудников «Зеленстроя» начинается в 8 часов утра. Два сотрудника с начала смены выполняли работу по озеленению проспекта. После 45 мин совместной работы первый сотрудник был переведен на другую работу, и второй сотрудник закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. Если бы каждый сотрудник работал в отдельности, то второму для выполнения всей работы понадобилось бы на 1 ч больше, чем первому. Выясните, смог ли бы первый сотрудник выполнить всю работу до полудня, если бы с начала смены работал один.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание. Можно ли найти множество значений функции, если: а) построить ее график; б) решить уравнение, задающее функцию относительно аргумента? Попробуйте применить указанные приемы для нахождения множества значений функции $y = \frac{1}{|x|} - 3.$ Обобщите результат.

Готовимся к олимпиадам

1. Легендарная школа Пифагора среди прочих задач занималась нахождением целочисленных прямоугольных треугольников. В частности, пифагорейцы нашли бесконечные серии (не все) троек натуральных чисел (a; b; c), для которых $a^2 + b^2 = c^2$. Существует ли целочисленный прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 2019?

2. К бассейну подведены четыре трубы, причем пропускная способность четвертой трубы в два раза выше пропускной способности первой трубы, а пропускная способность третьей трубы в два раза выше пропускной способности второй трубы. В первый день бассейн заполнялся двумя трубами — первой и третьей — 40 мин, а во второй день — второй и четвертой — 50 мин. Определите максимальное и минимальное время заполнения бассейна двумя трубами.

3. На реке расположены населенные пункты A и B. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отправляются два одинаковых катера, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из пункта A, возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы этот катер отправился на 15 мин раньше катера, вышедшего из пункта B, то встреча произошла бы на равном расстоянии от обоих пунктов. Через какое время возвращается обратно катер, вышедший из пункта B?

Глава 4

ПРОГРЕССИИ

§ 14. Числовая последовательность

4.1. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$; б) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^4+1}$.

4.2. Для функции $f(x) = x^3 - 3x$ вычислите $f(2)$; $f(0{,}5)$; $f(0)$; $f(100)$.

4.3. Задайте аналитически функцию: каждому действительному числу ставится в соответствие сумма этого числа и его квадрата.

В жизни мы часто встречаемся с функциями, областью определения которых является множество натуральных чисел. Например, стоимость проезда в пригородном транспорте зависит от дальности поездки и задается функцией $s(n)$, где аргументом функции является натуральное число n. Так, если пригородная территория разделена на четыре зоны, то каждой зоне соответствует определенная стоимость. Обычно она указывается в таблице.

Номер зоны	1	2	3	4
Стоимость проезда, р.	0,8	1,2	2	2,5

Функция стоимости проезда задана таблично, областью определения функции является множество натуральных чисел $D = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. В таком случае говорят, что рассматривается **функция натурального аргумента**, или **числовая последовательность.**

Примером числовой последовательности является последовательность положительных четных чисел: 2; 4; 6; 8; ... . Число 2 — первый член последовательности, число 4 — второй и т. д. Ясно, что на 5-м месте будет число 10 (пятый член последовательности), а на 100-м — число 200 (сотый член последовательности).

Еще один пример — последовательность чисел, обратных натуральным числам: $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... . На n-м месте запишется число $\frac{1}{n}$, которое является n-м членом данной последовательности.

Последовательности могут быть **конечными** и **бесконечными**. Например, последовательность двузначных чисел 10; 11; ...; 99 является конечной, так как содержит конечное число членов. А последовательность нечетных натуральных чисел — бесконечная.

Определение. Числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве N натуральных чисел, т. е. зависимость, при которой каждому натуральному числу ставится в соответствие единственное действительное число.

Числа, образующие последовательность (значения функции), называются членами последовательности. Они записываются буквами с индексами, обозначающими номер члена последовательности: f_1 — первый член последовательности, f_2 — второй член последовательности, ..., f_n — n-й член последовательности. Последовательность с n-м членом f_n обозначается (f_n). Для обозначения последовательности можно использовать любую букву латинского алфавита. Например, последовательность (a_n) имеет вид a_1; a_2; ...; a_n; ... .

Если (c_n) — последовательность нечетных натуральных чисел 1; 3; 5; 7; ..., то $c_1 = 1$; $c_2 = 3$; $c_3 = 5$; ...; $c_6 = 11$; $c_{100} = 199$; ... .

Последовательности, так же как и функции, могут быть заданы различными способами.

Аналитический способ — это задание последовательности с помощью формулы ее n-го члена. Например, последовательность четных натуральных чисел можно задать с помощью формулы $a_n = 2n$, а последовательность чисел, обратных натуральным числам, задается формулой $b_n = \frac{1}{n}$.

С помощью формулы n-го члена можно найти любой член последовательности.

Например, пусть последовательность (a_n) задана формулой $a_n = (-1)^n \cdot 10$, тогда

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 10 = -10;\ \ a_2 = (-1)^2 \cdot 10 = 10;\ \ ...;$$

$$a_{100} = (-1)^{100} \cdot 10 = 10.$$

Чтобы найти некоторый член последовательности с помощью формулы n-го члена, нужно вместо n подставить в формулу натуральное число, равное номеру искомого члена (индексу в его обозначении).

Для задания последовательностей часто используется **рекуррентный способ** (от лат. *recurrentis — возвращающийся*). Он заключается в вычислении следующих членов последовательности по предыдущим.

Например, условия $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ определяют бесконечную последовательность: $a_2 = 2 \cdot a_1$, т. е. $a_2 = 2 \cdot 3 = 6$; $a_3 = 3 \cdot 6 = 18$; $a_4 = 4 \cdot 18 = 72$; ... .

Пример. Найдите несколько членов последовательности (b_n), где $b_1 = 1$; $b_2 = 1$ и $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$.

Решение. $b_3 = b_1 + b_2 = 1 + 1 = 2$; $b_4 = b_2 + b_3 = 1 + 2 = 3$; $b_5 = 2 + 3 = 5$; ... .

Запишем несколько членов этой последовательности в ряд: 1; 1; 2; 3; 5; ... .

Полученную последовательность чисел называют **последовательностью Фибоначчи** по имени итальянского математика Леонардо Фибоначчи (1180—1240).

Формула n-го члена последовательности	
1. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = 2n^2 - 1$. Найдите: x_1; x_2; x_6; x_k; x_{k+1}; x_{2k+1}.	$x_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$; $x_2 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$; $x_6 = 2 \cdot 6^2 - 1 = 71$; $x_k = 2k^2 - 1$; $x_{k+1} = 2(k+1)^2 - 1 = 2k^2 + 4k + 1$; $x_{2k+1} = 2(2k+1)^2 - 1 = 8k^2 + 8k + 1$.
2. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = 3 - 2n$. Является ли членом этой последовательности число: а) -2; б) -7?	Для того чтобы определить, является ли число членом последовательности, нужно определить, имеет ли натуральные корни уравнение: а) $-2 = 3 - 2n$, $n = 2{,}5 \notin N$, значит, число -2 не является членом последовательности; б) $-7 = 3 - 2n$, $n = 5 \in N$, значит, число -7 является членом последовательности с номером 5.

3*. Для каких членов последовательности (x_n), заданной формулой n-го члена $x_n = n^2 + 3n - 4$, выполняется неравенство $x_n \leqslant 0$?	Подставим в неравенство $x_n \leqslant 0$ выражение для n-го члена, получим $n^2 + 3n - 4 \leqslant 0$. Решение полученного квадратного неравенства есть отрезок $[-4; 1]$, выберем из этого отрезка только натуральные числа, получим $n = 1$. Значит, данное неравенство выполняется только для первого члена последовательности.
Рекуррентный способ задания последовательности	
4*. Запишите 5 первых членов последовательности (a_n), если $a_1 = -8$, $a_{n+1} = a_n + 5$.	$a_1 = -8$; $a_2 = a_1 + 5 = -8 + 5 = -3$; $a_3 = -3 + 5 = 2$; $a_4 = 2 + 5 = 7$; $a_5 = 7 + 5 = 12$.
5*. Запишите несколько первых членов последовательности (b_n), если $b_1 = 8$, $b_{n+1} = -b_n$. Задайте эту последовательность формулой n-го члена.	$b_2 = -b_1 = -8$; $b_3 = -b_2 = 8$; ... . Получим следующую последовательность: 8; –8; 8; –8; ... . На нечетных местах этой последовательности стоят члены, равные числу 8, а на четных — числу –8, значит, формула n-го члена имеет вид $b_n = (-1)^{n+1} \cdot 8$.

1. Какой член последовательности (a_n) следует за членом:
а) a_4; б) a_k; в) a_{k+3}; г) a_{2k}; д) a_{2k+1}?

2. Какой член последовательности (a_n) предшествует члену:
а) a_6; б) a_m; в) a_{m-2}; г) a_{2m}; д) a_{2m+1}?

4.4. Назовите 7 первых членов последовательности простых чисел.

4.5. Запишите 5 первых членов последовательности:

а) натуральных чисел, кратных числу 5;

б) двузначных чисел, кратных 10;

в) кубов натуральных чисел.

Конечными или бесконечными являются эти последовательности?

4.6. Запишите 5 первых членов последовательности квадратов натуральных чисел. Назовите первый, шестой, пятнадцатый, сотый и n-й члены этой последовательности.

4.7. Найдите 3 первых члена последовательности (c_n), заданной формулой n-го члена:

а) $c_n = n + 5$; б) $c_n = 2 - 3n$;

в) $c_n = n^2 - 1$; г) $c_n = -3^n$.

4.8. Сравните второй, пятый и двадцатый члены последовательности (y_n), заданной формулой n-го члена:

а) $y_n = 5n - 1$; б) $y_n = \frac{n}{100}$;

в) $y_n = n^2 + 7$; г) $y_n = (-1)^{n+1} \cdot n$.

4.9. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$. Запишите для этой последовательности a_1; a_4; a_{11}; a_k; a_{k+3}.

4.10. Найдите закономерность и продолжите последовательность чисел:

а) 2; 5; 8; 11; ...; б) 1; 8; 27; 64; ...;

в) –3; 3; –3; 3; ...; г) $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{14}$; ... .

Запишите формулу n-го члена последовательности, первыми членами которой являются данные числа. Для каждой из последовательностей найдите ее сотый член.

4.11. Стоимость поездки в такси включает оплату вызова (5 р.) и оплату каждого километра пути (80 к.). Запишите формулу, по которой можно вычислить стоимость поездки протяженностью n км. Сколько будет стоить поездка длиной 5 км; 7 км? Сколько километров сможет проехать на такси пассажир, рассчитывающий потратить на поездку не более 10 р.?

4.12. Последовательности (a_n), (b_n) и (c_n) заданы формулами n-го члена $a_n = 20n^3 - 4$; $b_n = -3^{n+1}$; $c_n = 2n^4 + 1$. Найдите значение выражения $a_2 + b_3 - c_4$.

4.13. Для последовательности (b_n), заданной формулой n-го члена $b_n = -3 \cdot (-2)^n$, из следующих неравенств выберите все верные неравенства:

а) $b_2 < 0$; б) $b_3 > b_4$; в) $b_5 > b_7$;

г) $b_4 > b_6$; д) $b_2 < b_3$.

4.14. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 9 - 6n$. Является ли членом этой последовательности число:

а) 0; б) –51; в) –18; г) 12?

4.15. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = \frac{1}{3}(n-6)^2$. Найдите n, если $a_n = 27$.

4.16. Можно ли определить, является ли число –44 членом последовательности, заданной формулой $a_n = n^2 - 24n - 69$? Определите, если это возможно.

4.17. Последовательности (a_n), (b_n) и (c_n) заданы формулами n-го члена $a_n = 18n - 4$; $b_n = n^2 - 32n + 17$; $c_n = n^3 - 75$. Существует ли в каждой последовательности член, равный 50? Если существует, найдите его номер.

4.18. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 3n - 20$. Определите:

а) сколько отрицательных членов содержит данная последовательность;

б) сколько членов, меньших 100, содержит данная последовательность.

4.19*. Последовательность (k_n) задана формулой n-го члена $k_n = n^2 - 8n - 1$. Найдите число членов данной последовательности, меньших 19.

4.20*. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = -2n^2 + 32n - 40$. Найдите номера членов данной последовательности, больших 16.

4.21*. Каким способом задана последовательность (p_n)? Запишите 4 первых члена последовательности (p_n):

а) $p_1 = 5$; $p_{n+1} = p_n - 7$;

б) $p_1 = 3$; $p_{n+1} = -5p_n$;

в) $p_1 = -3$; $p_2 = 2$; $p_{n+2} = p_{n+1} - 2p_n$;

г) $p_1 = 1$; $p_2 = 5$; $p_{n+2} = p_n^2 - p_{n+1}$.

4.22. Запишите 6 первых членов последовательности нечетных натуральных чисел. Назовите первый, пятый, двадцатый, сотый и n-й члены этой последовательности.

4.23. Найдите 4 первых члена последовательности (b_n), заданной формулой n-го члена:

а) $b_n = n - 7$; б) $b_n = 6n + 1$;

в) $b_n = 3 - n^2$; г) $b_n = 2^n$.

4.24. Найдите третий и десятый члены последовательности (x_n), заданной формулой n-го члена:

а) $x_n = 6 - 7n$; б) $x_n = \frac{60}{n}$;

в) $x_n = 5n^2$; г) $x_n = (-1)^n \cdot (n + 1)$.

4.25. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = 8n - 1$. Запишите для данной последовательности c_1; c_5; c_{10}; c_{2m}; c_{m-4}.

4.26. Найдите закономерность и продолжите последовательность чисел:

а) –3; –5; –7; –9; ...; б) $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3; ... .

Запишите формулу n-го члена последовательности, первыми членами которой являются данные числа. Для каждой из последовательностей найдите ее седьмой член.

4.27. Биатлонист проходит дистанцию в 5 км. За каждый неточный выстрел ему приходится бежать еще 150 м. Запишите формулу, по которой можно вычислить «лишний» путь, который придется пройти биатлонисту, если он сделает n неточных выстрелов. На сколько метров больше планируемой дистанции пройдет биатлонист, выполнивший 3 неточных выстрела; 5 неточных выстрелов?

4.28. Последовательности (a_n), (b_n), (c_n) и (k_n) заданы формулами n-го члена $a_n = n^3 - 3$; $b_n = -3^n$; $c_n = 2n + 1$; $k_n = \frac{15}{n-1}$. Найдите значение выражения $a_2 + b_3 + c_5 - k_6$.

4.29. Последовательность (d_n) задана формулой n-го члена $d_n = 2n^2 - 1$. Является ли членом этой последовательности число:

а) –1; б) 31; в) 99; г) 199?

4.30. Найдите номер члена последовательности (b_n), заданной формулой $b_n = 0{,}25(n - 18)^2$, равного 144.

4.31. Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 12n + 9$. Найдите, под каким номером находится член последовательности, равный 22.

4.32. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = 100 - 7n$. Определите, сколько положительных членов содержит данная последовательность.

4.33*. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = n^2 - 6n - 3$. Найдите номера членов данной последовательности, не превосходящих 4.

4.34*. Запишите 4 первых члена последовательности (a_n), заданной рекуррентно:

а) $a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = 5a_n - 1;$ б) $a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = a_n^2 + a_n.$

4.35. Постройте график функции $f(x) = -\frac{6}{x}$ и найдите:

а) $f(-3)$ и $f(18)$;

б) значения аргумента, при которых значение функции равно 12;

в) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения;

г) промежутки возрастания функции.

4.36. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 12y = 6, \\ x + 4y = -2. \end{cases}$

4.37. Упростите выражение $\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y}{y + x}.$

4.38. Числитель обыкновенной дроби на 4 меньше знаменателя. Если и числитель, и знаменатель этой дроби уменьшить на 3, то получится дробь, равная 0,75. Найдите первоначальную дробь.

§ 15. Арифметическая прогрессия

4.39. Решите уравнение $2{,}24x - 6{,}6 = 38{,}2$.

4.40. Функция задана формулой $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$. Вычислите:

а) $f(4)$; б) $f\left(\frac{1}{9}\right)$; в) $f(0{,}01)$.

4.41. Найдите все значения аргумента, при которых значение функции $f(x) = x^2$ равно:

а) 7; б) 0,04; в) $1\frac{7}{9}$.

4.42. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 12 и 24; б) 5; 7 и 9.

Рассмотрим задачу. В горной местности температура воздуха летом при подъеме на каждые 100 м в среднем понижается на 0,7 °С. У подножия горы температура равна 26 °С. Найдите температуру воздуха на высоте 100 м; 200 м; 300 м.

Решение. Температура воздуха на высоте 100 м равна 26 °С – 0,7 °С = 25,3 °С. На высоте 200 м температура будет равна 25,3 °С – 0,7 °С = 24,6 °С, а на высоте 300 м — 24,6 °С – 0,7 °С = 23,9 °С.

Ответ: 25,3 °С; 24,6 °С; 23,9 °С.

Решая задачу, мы получили последовательность 26; 25,3; 24,6; ... . Каждый член этой последовательности равен предыдущему, сложенному с числом –0,7. Многие практические задачи приводят к последовательностям такого вида. Они называются ***арифметическими прогрессиями*** (от лат. *progression — движение вперед*).

Определение. Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом, т. е.

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ где } n \in \boldsymbol{N},\ d \in \boldsymbol{R}.$$

Число d называется **разностью арифметической прогрессии.**

Из равенства $a_{n+1} = a_n + d$ следует, что $d = a_{n+1} - a_n$.

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$$

Чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n), достаточно задать ее первый член a_1 и разность d.

Например, если $a_1 = 3$, $d = 4$, то получится арифметическая прогрессия 3; 7; 11; 15; ... .

Если $a_1 = 2$, $d = -3$, то арифметическая прогрессия имеет вид 2; –1; –4; –7; –10; ... .

Если $a_1 = -7$, $d = 0$, то все члены арифметической прогрессии равны между собой: –7; –7; –7; –7; ... .

Чтобы вычислить любой член арифметической прогрессии, не вычисляя все предыдущие члены, используют формулу n-го члена арифметической прогрессии

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

Выведем эту формулу. Если (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d, то, используя определение, получим верные равенства:

$$a_2 = a_1 + d;\quad a_3 = a_2 + d;\quad a_4 = a_3 + d;\ \ldots;$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + d;\quad a_n = a_{n-1} + d.$$

Сложим эти равенства:

$$\begin{aligned} & a_2 = a_1 + d \\ & a_3 = a_2 + d \\ & a_4 = a_3 + d \\ + & \ldots \\ & a_{n-1} = a_{n-2} + d \\ & a_n = a_{n-1} + d \end{aligned}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n =$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1\ \text{раз}}.$$

После упрощения получим:

$$a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1\ \text{раз}}.$$

Так как число слагаемых d равно $n - 1$, то равенство примет вид

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Получили формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n).

Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n) позволяет вычислить любой член прогрессии, зная ее первый член a_1, номер члена n и разность прогрессии d.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d}$$

Пример 1. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 2$, $d = 2{,}5$. Найдите 100-й член прогрессии.

Решение. По формуле n-го члена получим:

$a_{100} = a_1 + (100 - 1)d = 2 + 99 \cdot 2{,}5 = 249{,}5.$

Ответ: 249,5.

Пример 2. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 3$, $d = 2{,}5$. Является ли членом этой прогрессии число: а) 168; б) 201?

Решение. а) По условию $a_n = 168$, $a_1 = 3$, $d = 2{,}5$. Подставим эти значения в формулу n-го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ и получим уравнение $168 = 3 + (n - 1) \cdot 2{,}5$. Решив его, получим, что $n = 67$ — корень уравнения. Так как 67 — натуральное число, то число 168 является членом этой прогрессии с номером 67.

б) Подставим значения $a_n = 201$, $a_1 = 3$, $d = 2{,}5$ в формулу n-го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ и получим уравнение $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2{,}5$. Решим его: $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2{,}5$; $198 = 2{,}5(n - 1)$; $79{,}2 = n - 1$; $n = 80{,}2$. Так как корень уравнения 80,2 — не натуральное число, то число 201 не является членом этой прогрессии.

Ответ: а) число 168 является членом этой прогрессии; б) число 201 не является членом этой прогрессии.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

В арифметической прогрессии каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего (соседних с ним) членов, т. е. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при $n \geqslant 2$.

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

при $n \geqslant 2$

Доказательство. В арифметической прогрессии (a_n) для члена a_n запишем по формуле n-го члена предыдущий и последующий члены, т. е. a_{n-1} и a_{n+1}:

$$a_{n-1} = a_1 + d(n - 2), \quad a_{n+1} = a_1 + dn.$$

Найдем их среднее арифметическое:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + d(n-2) + a_1 + dn}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n-1)}{2} = a_1 + d(n - 1) = a_n.$$

Справедливо и обратное утверждение:

если в последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего (соседних с ним) членов, то последовательность является арифметической прогрессией.

Доказательство. Пусть в некоторой числовой последовательности (a_n) каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, т. е. $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$. Тогда $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, значит, разность каждого ее члена с предыдущим членом есть одно и то же число. Обозначим его d, получим $a_{n+1} - a_n = d$ при любом натуральном n, следовательно, $a_{n+1} = a_n + d$. Значит, по определению последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия.

Оба утверждения можно объединить в одно, которое называется **характеристическим свойством арифметической прогрессии:**

числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

Пример 3. Проверьте, является ли арифметической прогрессией последовательность, заданная формулой

$$a_n = 2n + 7.$$

Решение. Запишем для $a_n = 2n + 7$ предыдущий и последующий члены последовательности:

$$a_{n-1} = 2(n-1) + 7 = 2n + 5; \quad a_{n+1} = 2(n+1) + 7 = 2n + 9.$$

Найдем среднее арифметическое этих членов:

$$\frac{(2n+5)+(2n+9)}{2} = \frac{4n+14}{2} = 2n + 7 = a_n.$$

По характеристическому свойству арифметической прогрессии последовательность $a_n = 2n + 7$ является арифметической прогрессией.

Определение арифметической прогрессии	
1. Последовательность 2; 12; 22; ... является арифметической прогрессией. Продолжите последовательность.	Так как последовательность является арифметической прогрессией, то найдем ее разность $d = 12 - 2 = 10$. Тогда каждый следующий член последовательности равен предыдущему, сложенному с числом 10: 2; 12; 22; 32; 42; ... .

2. Известны члены арифметической прогрессии: $a_6 = -2$; $a_7 = 3$. Найдите разность этой прогрессии.	Найдем разность арифметической прогрессии: $d = a_{n+1} - a_n$; $d = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$.
Формула *n*-го члена арифметической прогрессии	
3. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите двадцатый член прогрессии, если $a_1 = 3$, $d = 1{,}6$.	По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$ получим: $a_{20} = 3 + (20-1) \cdot 1{,}6 = 33{,}4$.
4. Запишите формулу n-го члена для арифметической прогрессии $-15{,}5$; $-14{,}9$; $-14{,}3$; ... и найдите ее двадцатый член.	По условию $a_1 = -15{,}5$, $a_2 = -14{,}9$, тогда $d = a_2 - a_1 = -14{,}9 - (-15{,}5) = 0{,}6$. Запишем формулу n-го члена данной арифметической прогрессии, подставив в формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$ значения для a_1 и d: $a_n = -15{,}5 + (n-1) \cdot 0{,}6$; $a_n = 0{,}6n - 16{,}1$. Подставим $n = 20$ в формулу n-го члена данной арифметической прогрессии и найдем ее двадцатый член: $a_{20} = 0{,}6 \cdot 20 - 16{,}1 = -4{,}1$.
5. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = -5{,}6$; $a_2 = -4{,}8$. Число 16 является членом этой прогрессии. Найдите его номер.	Так как $a_1 = -5{,}6$; $a_2 = -4{,}8$, то $d = a_2 - a_1 = -4{,}8 - (-5{,}6) = -4{,}8 + 5{,}6 = 0{,}8$. По условию $a_n = 16$. Воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$, тогда $16 = -5{,}6 + (n-1) \cdot 0{,}8$; $16 = -5{,}6 + 0{,}8n - 0{,}8$; $16 = 0{,}8n - 6{,}4$; $22{,}4 = 0{,}8n$; $n = 28$.
6. В арифметической прогрессии $a_6 = 8$, $a_{10} = 16$. Найдите разность прогрессии и ее первый член.	По условию $a_6 = a_1 + 5d = 8$, $a_{10} = a_1 + 9d = 16$. Решим систему уравнений $\begin{cases} a_1 + 5d = 8, \\ a_1 + 9d = 16. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое, получим $4d = 8$, откуда $d = 2$. Подставим $d = 2$ в первое уравнение системы, получим $a_1 = -2$.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии	
7. Найдите восьмой член арифметической прогрессии (a_n), если $a_7 = 21$, $a_9 = 29$.	По характеристическому свойству арифметической прогрессии $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, т. е. $a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{21+29}{2} = 25$.
8. При каком значении x последовательность $x - 1$; $4x - 9$; $4x + 2$ является арифметической прогрессией?	По характеристическому свойству прогрессии последовательность является арифметической прогрессией, если каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов: $4x - 9 = \frac{(x-1)+(4x+2)}{2}$. Решим полученное уравнение: $8x - 18 = 5x + 1; 3x = 19; x = 6\frac{1}{3}$.

1. В арифметической прогрессии (a_n) n-й член вычисляется по формуле:

а) $a_n = a_1 + d$; б) $a_n = a_1 + nd$;

в) $a_n = a_1 + (n-1)d$; г) $a_n = a_1 + 2dn$.

Выберите правильный ответ.

2. Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, если для всех членов последовательности, начиная со второго, выполняется условие:

а) $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$; б) $a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$;

в) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$; г) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Выберите правильный ответ.

4.43. Данная последовательность является арифметической прогрессией, определите разность прогрессии и найдите следующие три ее члена:

а) 2; 4; 6; ...; б) –1; –4; –7; ...;

в) 2; 5; 8; ...; г) 0,1; 0,2; 0,3; ... .

4.44. Первый член арифметической прогрессии равен 5,3, а разность равна 3. Назовите 5 первых членов этой арифметической прогрессии.

4.45. Какие члены прогрессии можно использовать, чтобы определить разность арифметической прогрессии:

а) –8; –4; 0; 4; ...;   б) 8,5; 8; 7,5; 7; ...;

в) 9; 9; 9; 9; ...;   г) $\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 4\sqrt{3};$ ...?

Найдите шестой член прогрессии.

4.46. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 12,\ a_2 = -6;$ б) $a_8 = 7{,}2,\ a_9 = 8{,}5;$

в) $a_{45} = 8\sqrt{2}, a_{46} = 5\sqrt{2};$ г) $a_n = 3\frac{5}{7}, a_{n+1} = 2\frac{3}{7}.$

4.47. В арифметической прогрессии –100; 0; 100; ... найдите номер члена, равного 1000.

4.48. Разность арифметической прогрессии (a_n) равна 4. Найдите первый и второй члены этой прогрессии, если:

а) $a_3 = 5;$ б) $a_3 = -2;$

в) $a_3 = 1{,}5;$ г) $a_3 = -3\frac{1}{3}.$

4.49. Используйте формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n) для вычисления шестнадцатого члена этой прогрессии, если:

а) $a_1 = 5,\ d = -3;$ б) $a_1 = -0{,}2,\ d = 10;$

в) $a_1 = 0, d = \frac{1}{3};$ г) $a_1 = \sqrt{5}, d = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$

4.50. Для арифметической прогрессии (a_n) выразите через a_7 и d:

а) $a_1;$ б) $a_8;$ в) $a_{20};$ г) $a_{100}.$

4.51. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Выразите a_{30} через:

а) a_1 и d;   б) a_{31} и d;   в) a_{15} и d;   г) a_{40} и d.

4.52. Запишите формулу n-го члена и найдите a_{10}, a_{21} и a_{201} для арифметической прогрессии (a_n):

а) –26; –21; –16; ...;   б) 7,8; 7,1; 6,4; ...;

в) $-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2};$ ...;   г) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1;$ ... .

4.53. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_2 = -4,\ \ a_3 = 2$. Найдите разность прогрессии, ее первый и двадцать пятый член.

4.54. В бензобак грузового автомобиля залили 600 л бензина. В первый день пути было израсходовано 30 л бензина, а в каждый следующий день расходовали на 5 л бензина больше, чем в предыдущий. Сколько литров бензина израсходовали в пятый день; в седьмой день?

4.55. Как определить, является ли число 142 членом арифметической прогрессии –18; –16,4; –14,8; ...? Какой номер имеет член прогрессии, равный 142? Можно ли без вычислений определить, является ли членом данной прогрессии число 15?

4.56. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = -7{,}3$ и $a_2 = -6{,}4$. Является ли членом данной прогрессии число 26?

4.57. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, $a_1 = 4{,}5$, $d = -0{,}6$.

Найдите номер первого отрицательного члена этой прогрессии. Какой номер имеет член данной прогрессии, равный –15,9? Сколько членов данной прогрессии, больших числа –51?

4.58. Первый член арифметической прогрессии равен –37, $d = 1$, n-й член равен 78. Сколько членов у этой прогрессии от первого до n-го члена, включая эти члены? Найдите количество всех целых чисел, принадлежащих промежутку:

а) [–37; 78]; б)[–15; 49]; в) [–23,8; 89,2].

4.59. Курс оздоровительных тренировок начинают с занятия продолжительностью 10 мин. Затем каждый следующий день время тренировки увеличивают на 3 мин. В какой день с момента начала занятий продолжительность тренировки достигнет 25 минут; станет больше 45 минут?

4.60. Можно ли найти первый член арифметической прогрессии (c_n), если:

а) $c_{12} = 48$, $d = -2$;

б) $c_{32} = 11{,}8$, $d = 0{,}3$;

в) $c_9 = 8\sqrt{2}$, $d = -\sqrt{2}$?

По результатам вычислений сделайте обобщение.

4.61. Какой формулой можно воспользоваться, чтобы найти разность арифметической прогрессии (a_n), если известно, что:

а) $a_1 = -12$, $a_{15} = 16$;

б) $a_1 = \frac{2}{9}$, $a_6 = 6\frac{7}{18}$;

в) $a_1 = 19\sqrt{7}$, $a_8 = -2\sqrt{7}$?

4.62. В арифметической прогрессии $a_{19} = 59$, $d = 3$. Какой из членов прогрессии a_1; a_6; a_{20} можно найти, не используя формулу n-го члена? Найдите a_1; a_6; a_{20}.

4.63. В арифметической прогрессии $a_{15} = 11{,}8$, $a_{16} = 10{,}2$. Найдите a_1; d; a_{18}. Выполните задание разными способами.

4.64. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_{15} = 10$, $a_{20} = 6$. Найдите разность прогрессии и ее первый член. Как вычислить разность арифметической прогрессии по заданным двум ее членам?

4.65. Найдите тридцатый член арифметической прогрессии (a_n), если известно, что:

а) $a_6 = 56$, $a_{18} = -4$;

б) $a_{10} = -8{,}5$, $a_{20} = 13{,}5$;

в) $a_{17} = -3\sqrt{10}$, $a_{23} = -15\sqrt{10}$.

4.66. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 8,3; 7,9; 7,5; ...?

4.67. Найдите номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии (c_n), если $c_1 = 2\frac{1}{7}$, $d = -\frac{3}{14}$.

4.68. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии $-6\sqrt{3}$; $-\frac{11\sqrt{3}}{2}$; $-5\sqrt{3}$; ... .

4.69. Если между числами –12 и 8 нужно вставить семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию, то какой номер имеет член, равный 8? Чему равна разность этой арифметической прогрессии?

4.70. Каким свойством можно воспользоваться, чтобы найти десятый член арифметической прогрессии, если девятый и одиннадцатый ее члены соответственно равны –12,3 и 5,7?

4.71. В арифметической прогрессии $a_{28} = 6\frac{2}{3}$, $a_{30} = 1\frac{1}{3}$. Найдите a_{29}; d; a_1; a_{45}. Выполните задание разными способами.

4.72. Найдите, при каком значении переменной значения выражений будут являться последовательными членами арифметической прогрессии:

а) $5x + 2$; $x - 4$ и $7 - 2x$;

б) $x^2 - 8$; $5x + 3$ и $3x + 6$;

в) $x^2 + 5$; $x^2 + x$ и $8x - 14$.

4.73. Сумма трех первых членов арифметической прогрессии равна 51. Найдите второй член прогрессии.

4.74. Докажите, что значения выражений $(a+b)^2$; a^2+b^2 и $(a-b)^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4.75*. Проверьте, является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) $b_n = 7n + 1$; б) $c_n = 3 - 5n$; в) $x_n = n^2$; г) $y_n = 12n$.

Если да, то найдите ее первый член и разность.

4.76*. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_4 + a_8 = 30$ и $a_7 + a_{10} = 60$;

б) $a_{24} - a_{19} = 12$ и $a_{16} = 18$;

в) $a_3 + a_{19} = 46$ и $a_{20} - 2a_3 = 27$.

4.77*. Найдите восьмой член арифметической прогрессии (a_n), если известно, что $a_{13} + a_{14} + a_{15} = 15$ и $a_{12}a_{14} = -210$.

4.78*. В арифметической прогрессии $a_2 = -1$, $a_4 + a_6 = -20$, $a_n = -22$. Найдите n.

4.79*. В арифметической прогрессии

$a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147$. Найдите $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$.

4.80*. Арифметические прогрессии (a_n) и (c_n) заданы формулами своих n-х членов $a_n = 43 - 2n$ и $c_n = 3n - 67$. Есть ли в этих прогрессиях равные члены с одинаковыми номерами?

4.81*. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Определите, является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) a_2; a_4; a_6; ...; б) $a_1 + 5$; $a_2 + 5$; $a_3 + 5$; ...;

в) $3a_1$; $3a_2$; $3a_3$; ...; г) a_1^2; a_2^2; a_3^2; ... .

4.82*. В арифметической прогрессии $a_4 = 7$. При каком значении разности прогрессии значение суммы $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$ будет наименьшим?

4.83. Данная последовательность является арифметической прогрессией, определите разность прогрессии и найдите следующие три ее члена:

а) –10; –5; 0; 5; ...; б) 9,2; 8,2; 7,2; 6,2; ...;

в) –2; –2; –2; –2; ...; г) $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; ... .

4.84. Разность арифметической прогрессии (a_n) равна 3. Найдите первый член прогрессии, если:

а) $a_2 = 7$; б) $a_2 = -1$; в) $a_2 = 4{,}5$; г) $a_2 = -1\frac{2}{7}$.

4.85. Для арифметической прогрессии (a_n) выразите a_{18} через:

а) a_1 и d; б) a_{17} и d; в) a_{29} и d; г) a_3 и d.

4.86. В арифметической прогрессии (a_n) известны первый член a_1 и разность d. Запишите формулу n-го члена этой прогрессии и найдите a_6, a_{12} и a_{51}, если:

а) $a_1 = 3,\ d = -2$; б) $a_1 = -7,\ d = 8$;

в) $a_1 = 4,\ d = 0{,}25$; г) $a_1 = -\sqrt{2},\ d = -5\sqrt{2}$.

4.87. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_2 = 6$; $a_3 = -1$. Найдите разность прогрессии и десятый член этой прогрессии. Какой формулой вы воспользовались?

4.88. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия, $c_1 = 8$; $d = -1{,}5$. Является ли членом этой прогрессии число:

а) -132; б) -37?

4.89. Турист планирует взять напрокат автомобиль. Стоимость проката включает оплату за первые сутки (100 р.) и оплату за каждые следующие сутки проката (30 р.). Сколько нужно будет заплатить за автомобиль, взятый напрокат на 3 суток; на 5 суток? Сколько суток пользовался автомобилем турист, заплативший за прокат 280 р.? На сколько суток может взять автомобиль напрокат турист, рассчитывающий потратить на это не более 250 р.?

4.90. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите первый член этой прогрессии, если $a_{15} = 29$; $d = -3$.

4.91. Используйте формулу n-го члена арифметической прогрессии и найдите разность арифметической прогрессии (x_n), если известно, что $x_1 = 56{,}7$; $x_{24} = -12{,}3$.

4.92. В арифметической прогрессии $a_{13} = 25$; $d = -2$. Найдите a_1; a_7; a_{25}.

4.93. В арифметической прогрессии $a_{11} = -6{,}5$; $a_{12} = -7{,}3$. Найдите a_1; d; a_{13}; a_{21}.

4.94. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_9 = -19$, $a_{17} = 13$. Найдите a_1; d; a_{32}.

4.95. Определите, если возможно, сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия –112; –108; –104; ... .

4.96. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -9{,}5$; $d = 0{,}4$. Определите его номер.

4.97. Между числами $-3\sqrt{5}$ и $9\sqrt{5}$ вставьте шесть таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию. Какой номер будет иметь число $9\sqrt{5}$? Чему равна разность этой арифметической прогрессии?

4.98. Найдите пятнадцатый член и разность арифметической прогрессии, если четырнадцатый и шестнадцатый ее члены соответственно равны –43,6 и –28,4. Каким свойством вы воспользовались?

4.99. Воспользуйтесь характеристическим свойством арифметической прогрессии и найдите, при каком значении переменной значения выражений $9 - 4x$; $2x + 5$ и $3x - 1$ будут являться последовательными членами арифметической прогрессии.

4.100*. Докажите, что последовательность $a_n = 5n - 1$ является арифметической прогрессией.

4.101*. Проанализируйте условие и найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_4 + a_{13} = 47$ и $a_9 + a_{15} = 68$;

б) $a_2 + a_6 = 42$ и $a_{10} - a_4 = 54$.

4.102*. В арифметической прогрессии третий и десятый члены соответственно равны 12 и –2. Найдите сумму второго и одиннадцатого членов прогрессии.

4.103*. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Определите, является ли арифметической прогрессией последовательность $-a_1$; $-a_3$; $-a_5$; ... .

4.104. Вычислите: $\left(3\sqrt{2} + 2\right)^2 + \left(6 - \sqrt{2}\right)^2$.

4.105. Найдите значение выражения

$$\text{НОК }(16;\ 24;\ 48) + \text{НОД }(48;\ 49).$$

4.106. На рисунке 93 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

а) $y = f(x - 1)$;
б) $y = f(x + 2)$;
в) $y = f(x) - 2$;
г) $y = f(x) + 3$.

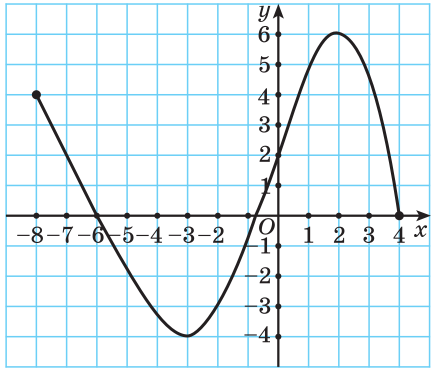


Рис. 93

4.107. Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-1)(x^2-6x+9)(5-x) \geqslant 0$;

б) $\dfrac{(x^2-4)(x+5)}{x^2+4x+4} \leqslant 0$.

§ 16. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

4.108. Выразите n из формулы суммы углов n-угольника $S = (n-2) \cdot 180°$.

4.109. По формуле числа всех диагоналей n-угольника найдите число диагоналей 20-угольника.

4.110. Найдите сумму рациональным способом:

$$2 + 0{,}34 - 1{,}246 + 0{,}66 - 2{,}754.$$

Рассмотрим задачу. Двое друзей решили улучшить знание английского языка и каждый день учить на 3 новых слова больше, чем в предыдущий. Сколько слов выучит каждый из друзей за 10 дней, если они начнут с одного слова?

Для решения этой задачи нужно найти сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), у которой $a_1 = 1,\ d = 3$.

Возникает вопрос: как найти эту сумму, не вычисляя всех десяти членов прогрессии?

В общем виде эта задача приводит к необходимости вывода формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

$$\boxed{a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n}$$

Для того чтобы вывести эту формулу, докажем свойство: суммы двух членов конечной арифметической прогрессии, равноудаленных от ее концов, равны между собой и равны сумме первого и последнего ее членов, т. е. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$.

В общем виде: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Доказательство. Преобразуем слагаемые в левой части равенства, воспользовавшись формулой n-го члена: $a_k = a_1 + (k-1)d$; $a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)d$. Тогда получим:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d =$$
$$= a_1 + dk - d + a_1 + dn - dk = a_1 + a_1 + d(n-1) = a_1 + a_n.$$

С помощью доказанного свойства найдем, например, сумму всех натуральных чисел от 1 до 50.

Натуральные числа от 1 до 50 составляют арифметическую прогрессию 1; 2; 3; ...; 50. Первый член этой прогрессии равен 1, последний равен 50. Всего в этой прогрессии 50 членов.

Поскольку $a_1 + a_{50} = 1 + 50 = 51$, то и $a_2 + a_{49} = a_1 + a_{50} = 51$, и $a_3 + a_{48} = a_1 + a_{50} = 51$, и $a_4 + a_{47} = 51$, ..., $a_{25} + a_{26} = 51$ (рис. 94), то искомая сумма равна $51 \cdot 25 = 1275$.

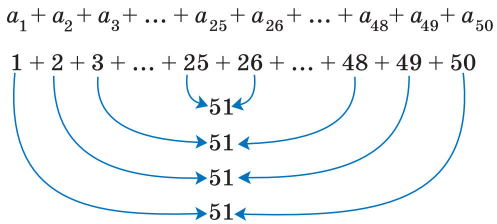


Рис. 94 Всего 25 пар

Выведем формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

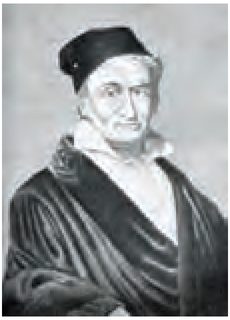
Обозначим $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ через S_n и запишем эту сумму дважды: с первого члена до n-го и с n-го члена до первого:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Сложим эти два равенства и получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

По свойству $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ заменим каждую сумму в скобках на $a_1 + a_n$.



К. Ф. Гаусс

Число всех таких пар сумм равно n, значит, удвоенная искомая сумма равна: $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, т. е. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — **формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.**

Идея такого доказательства принадлежит выдающемуся немецкому математику К. Гауссу (1777—1855).

Формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии можно записать и в другом виде. Для этого по формуле n-го члена арифметической прогрессии выразим a_n через a_1 и d и получим: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$

Если известен первый член прогрессии и разность, то удобно использовать формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$

Применим эту формулу к задаче о количестве выученных иностранных слов и получим: $S_{10} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10,$ $S_{10} = 29 \cdot 5 = 145.$ Каждый из друзей выучил по 145 новых слов.

Пример 1. Найдите сумму пятидесяти первых членов арифметической прогрессии 3; 7; 11; 15; ... .

Решение. В этой прогрессии первый член равен 3, а разность $d = 7 - 3 = 4$. Применим формулу суммы

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

для $n = 50$ и получим:

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 3 + 4(50-1)}{2} \cdot 50 = 5050.$$

Ответ: 5050.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Пример 2. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_{85} = 44$. Найдите сумму 85 первых членов арифметической прогрессии.

Решение. Применим формулу сумы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и получим: $S_{85} = \frac{a_1 + a_{85}}{2} \cdot 85$; $S_{85} = \frac{-2 + 44}{2} \cdot 85 = 21 \cdot 85 = 1785.$

Ответ: 1785.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

1. Найдите сумму шести первых членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен -2, а разность прогрессии равна 0,4.	Воспользуемся формулой $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, так как $a_1 = -2$; $d = 0{,}4$, то $S_6 = \frac{2 \cdot (-2) + (6-1) \cdot 0{,}4}{2} \cdot 6 =$ $= \frac{-4+2}{2} \cdot 6 = -1 \cdot 6 = -6.$
2. Найдите сумму $4 + 7 + 10 + \ldots + 100$, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии.	Последовательность 4, 7, 10, ..., 100 является арифметической прогрессией, в которой $a_1 = 4$; $d = 3$; $a_n = 100$. По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдем количество членов этой прогрессии: $100 = 4 + 3(n-1)$; $96 = 3(n-1)$; $n - 1 = 32$; $n = 33$. Воспользуемся формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и найдем искомую сумму: $S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{4+100}{2} \cdot 33 =$ $= 52 \cdot 33 = 1716.$
3. Найдите количество членов арифметической прогрессии, зная, что их сумма равна 430, первый член прогрессии равен -7, а разность прогрессии равна 3.	Воспользуемся формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$. Так как $S_n = 430$; $a_1 = -7$; $d = 3$, то составим и решим уравнение: $430 = \frac{2 \cdot (-7) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$; $430 = \frac{-14 + 3n - 3}{2} \cdot n$; $430 = \frac{-17 + 3n}{2} \cdot n$; $860 = (3n - 17) \cdot n$; $3n^2 - 17n - 860 = 0$; $D = 17^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-860) = 289 + 10\,320 =$ $= 10\,609 = 103^2$; $n_{1,2} = \frac{17 \pm 103}{2 \cdot 3}$; $n_1 = 20$; $n_2 = -\frac{86}{6}$. Так как n — натуральное число, то $n = 20$.

4. В арифметической прогрессии $a_5 = 18$, $a_{10} = 13$. Найдите сумму членов этой прогрессии с четвертого по семнадцатый включительно.	Найдем a_1 и d. Поскольку $a_5 = a_1 + 4d$; $a_{10} = a_1 + 9d$, то составим систему уравнений $\begin{cases} a_1 + 4d = 18, \\ a_1 + 9d = 13. \end{cases}$ Решим полученную систему способом сложения: $\begin{cases} -a_1 - 4d = -18, \\ a_1 + 9d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = -5, \\ a_1 + 9d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} d = -1, \\ a_1 + 9 \cdot (-1) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1, \\ a_1 = 22. \end{cases}$ Тогда $a_4 = 22 + 3 \cdot (-1) = 19$; $a_{17} = 22 + 16 \cdot (-1) = 6$. Примем четвертый член данной прогрессии за первый член некоторой другой прогрессии, тогда семнадцатый член данной прогрессии станет четырнадцатым $(17 - 4 + 1 = 14)$ членом новой прогрессии. Искомая сумма равна: $\frac{19 + 6}{2} \cdot 14 = 175$.
5. Найдите сумму всех четных натуральных чисел, не превосходящих 300, которые при делении на 13 дают в остатке 5.	Первое число в последовательности всех четных натуральных чисел, не превосходящих 300, которые при делении на 13 дают в остатке 5, — это число 18. Каждое следующее число равно предыдущему, сложенному с числом 26. Последнее четное число, которое при делении на 13 дает в остатке 5, — это число 278. Поскольку рассматриваются только четные числа, то разность прогрессии равна 26. Найдем номер числа прогрессии, равного 278: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $278 = 18 + 26(n-1)$, откуда $n = 11$. $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{18 + 278}{2} \cdot 11 = 1628$.

? **1.** В арифметической прогрессии (a_n) сумма n первых членов вычисляется по формуле:

а) $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$; б) $S_n = a_1 + d \cdot n$;

в) $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$; г) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Выберите правильные ответы.

2. В арифметической прогрессии (a_n):
а) S_4 — это четвертый член прогрессии;
б) S_4 — сумма любых четырех членов прогрессии;
в) S_4 — сумма четырех первых членов прогрессии.
Выберите правильный ответ.

4.111. В арифметической прогрессии (a_n) найдите:
а) S_8, если $a_1 = 4$, $d = -3$;
б) S_{51}, если $a_1 = -0{,}2$, $d = 5$;
в) S_{26}, если $a_1 = \sqrt{3}$, $d = 3\sqrt{3}$.

4.112. Найдите сумму сорока первых членов арифметической прогрессии (c_n), если:
а) $c_1 = 6$; $c_{40} = 128$; б) $c_1 = -2\sqrt{7}$; $c_{40} = -36\sqrt{7}$.

4.113. В первый день приема документов в университет приемная комиссия приняла документы от 320 человек. В каждый следующий день подавали документы на 100 человек больше, чем в предыдущий. Сколько человек подали документы в университет за пять первых дней?

4.114. В первом ряду концертного зала 24 места, а в каждом следующем ряду на 4 места больше, чем в предыдущем. Всего в концертном зале 25 рядов. На праздничный концерт продано 1710 билетов. На сколько процентов будет заполнен зал?

4.115. Выберите одну из формул суммы членов арифметической прогрессии и найдите сумму одиннадцати первых членов арифметической прогрессии:
а) -3; 6; 15; ...; б) $1{,}8$; $1{,}5$; $1{,}2$; ...;
в) $3\frac{1}{7}$; $3\frac{3}{7}$; $3\frac{5}{7}$; ...; г) $-10\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$; ... .

4.116. Найдите a_n и S_n арифметической прогрессии (a_n), у которой:
а) $a_1 = 12$; $d = -6$; $n = 14$;
б) $a_1 = -25$; $d = 0{,}5$; $n = 21$.

4.117. Вычислите сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:
а) $1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$;
б) $5 + 10 + 15 + ... + 195 + 200 + 205$.

4.118. Составьте план решения и найдите сумму:

а) ста первых нечетных чисел;

б) всех четных трехзначных чисел;

в) всех двузначных чисел, кратных трем.

4.119. Используйте рациональный способ для вычисления суммы всех целых чисел, принадлежащих промежутку:

а) $(-33;\ 101]$; б) $[-56,2;\ 44,1]$.

4.120. Во время предпраздничной акции количество проданных подарочных наборов ежедневно увеличивалось на одно и то же число. В первый день акции было продано 25 наборов, а в последний — 160. Найдите, сколько дней длилась акция, если известно, что всего за период акции было продано 925 подарочных наборов.

4.121. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 5n - 3$. Найдите:

а) S_8; б) S_{21}; в) S_n.

4.122. Найдите последний член и разность арифметической прогрессии, состоящей из n членов, у которой:

а) $a_1 = 15$; $n = 14$; $S_{14} = 1407$;

б) $a_1 = -\frac{1}{3}$; $n = 10$; $S_{10} = 88\frac{1}{6}$.

4.123. Используйте формулу суммы членов арифметической прогрессии и найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 5,5, а сумма шестнадцати первых членов равна 328.

4.124. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна 10, а сумма десяти первых членов равна –120.

4.125. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 5, чтобы их сумма была равна 221?

4.126. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $d = -7$ и $a_{16} = -9$. Найдите a_{20} и S_{20}.

4.127. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (y_n), если известно, что:

а) $y_{10} = 40$, $S_{10} = 175$;

б) $y_7 = -27$, $S_7 = -210$;

в) $y_{15} = 47$, $S_{30} = 1500$.

4.128. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = 3$, $d = 5$. Найдите сумму всех членов этой прогрессии:

а) с 15-го по 30-й включительно;

б) с 10-го по 24-й включительно.

Выполните задание разными способами.

4.129. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии (c_n), если известно, что:

а) $c_5 = 4$, $c_{10} = -6$; б) $c_8 = -1{,}7$, $c_{13} = 2{,}3$.

4.130. Вычислите сумму всех:

а) положительных членов арифметической прогрессии $5\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$; ... ;

б) отрицательных членов арифметической прогрессии $-98{,}5$; $-92{,}5$; ... .

4.131. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, кратных 3, чтобы их сумма была больше 165?

4.132. Найдите сумму двадцати пяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{10} = 17$, $d = 3$.

4.133. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не больших 248.

4.134. Назовите первое и последнее трехзначное число, кратное 9. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 9.

4.135. Запишите формулу натурального числа, которое при делении на 7 дает в остатке 3. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 153, которые при делении на 7 дают в остатке 3.

4.136. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = -3$, $d = 5$. Найдите $S_{21} - S_{20}$.

4.137. Первый член арифметической прогрессии равен -12, а разность прогрессии равна 6. Сколько надо взять первых последовательных членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равна 528?

4.138. Найдите сумму тридцати шести первых членов арифметической прогрессии, если ее разность равна 2, а пятый член прогрессии в 4 раза меньше второго члена.

4.139*. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_6 = 39$ и $S_{14} = -77$.

4.140*. Сумма членов арифметической прогрессии с третьего по тринадцатый равна 55, $a_n = 5$. Найдите n.

4.141*. Сумма 40 первых членов арифметической прогрессии равна 340, а сумма 39 первых ее членов равна 325. Найдите разность прогрессии.

4.142*. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 18$.

4.143*. Сумма пятнадцати первых членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 333, но меньше 396. Найдите восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем.

4.144. В арифметической прогрессии (a_n) найдите:

а) S_{11}, если $a_1 = -2$, $d = 5$; б) S_{24}, если $a_1 = -2{,}5$; $d = -0{,}5$;

в) S_{31}, если $a_1 = \sqrt{2}$, $d = 4\sqrt{2}$.

4.145. Определите необходимые компоненты формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии и найдите сумму шестнадцати первых членов арифметической прогрессии:

а) 1; 11; 21; ...; б) 2,3; 1,8; 1,3; ...;

в) $5\frac{2}{9}$; $6\frac{2}{9}$; $7\frac{2}{9}$; ...; г) $7\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; ... .

4.146. Ученик взял в библиотеке книгу и в первый день прочитал 30 страниц. Книга настолько увлекла его, что в каждый следующий день он читал на 10 страниц больше, чем в предыдущий. Успеет ли ученик прочитать книгу за 7 дней, если в ней 490 страниц?

4.147. Найдите сумму двадцати пяти первых членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_1 = -2{,}8$; $x_{25} = 12{,}6$.

4.148. Найдите a_n и воспользуйтесь полученным результатом, чтобы найти S_n арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 1\frac{1}{3}$; $d = -\frac{2}{3}$; $n = 16$.

4.149. Какой формулой можно воспользоваться, чтобы найти сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

а) $2 + 4 + 6 + ... + 96 + 98 + 100$;

б) $12 + 16 + 20 + ... + 88 + 92 + 96$?

Найдите эту сумму.

4.150. Выполните анализ условия и найдите сумму всех:

а) двузначных чисел;

б) трехзначных чисел, кратных пяти.

4.151. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 4n + 5$. Какие члены этой прогрессии нужно найти, чтобы вычислить:

а) S_{10}; б) S_{35}?

Вычислите эти суммы.

4.152. Используйте формулы арифметической прогрессии и найдите последний член и разность арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 3$; $n = 20$; $S_{20} = 820$.

4.153. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна -8, а сумма двенадцати первых членов равна 96.

4.154. Для арифметической прогрессии (a_n) известно, что $d = 3$ и $a_{11} = 6$. Найдите a_{15} и S_{15}.

4.155. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (x_n), если известно, что $x_9 = 20$, $S_9 = 123$.

4.156. Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии (a_n) с 10-го по 25-й включительно, если известно, что $a_1 = -2$, $d = 7$.

4.157. В арифметической прогрессии (c_n) известно, что $c_3 = 12$, $c_{17} = 54$. Найдите S_{20}.

4.158. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 8,4; 7,2; ... .

4.159. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не больших 162.

4.160. Запишите формулу натурального числа, которое при делении на 8 дает в остатке 1. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 225, которые при делении на 8 дают в остатке 1.

4.161*. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_4 = 60$ и $S_9 = 225$.

4.162*. Арифметическая прогрессия содержит 8 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 28, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 16. Найдите первый член прогрессии.

4.163. Найдите значение выражения

$$\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 0{,}81-1\frac{9}{16}\cdot 0{,}17}.$$

4.164. Упростите выражение $a-\frac{a^2-5a}{a+1}\cdot\frac{1}{a-5}$.

4.165. Решите уравнение $\frac{x}{x^2-16}+\frac{x+3}{x+4}=0$.

4.166. Имеющегося сырья хватит первому цеху на 12 дней работы или второму цеху на 24 дня работы. Хватит ли этого сырья на 9 дней их совместной работы?

4.167. Решите систему неравенств $\begin{cases}7x>x^2,\\16x^2<9.\end{cases}$

4.168. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(-3;\ 5)$ относительно оси симметрии параболы

$$y=2x^2-8x+1.$$

§ 17. Геометрическая прогрессия

4.169. Решите уравнение:

а) $x^2=16$; б) $x^2=2{,}25$; в) $x^2=-0{,}25$.

4.170. Вычислите $g(4)$; $g(0)$; $g(-2)$, если $g(x)=3^x$.

4.171. Найдите значение выражения $2^{-3}\cdot 0{,}5^{-2}:0{,}125^{-1}$.

4.172. Найдите новую цену товара, если его первоначальная цена в 25 р. увеличилась на 20 %.

4.173. Найдите среднее геометрическое чисел:

а) 8 и 32; б) 12 и 5.

Рассмотрим задачу. Вкладчик положил в банк 1000 р. на депозит, по которому сумма вклада увеличивается ежегодно на 5 %. Какая сумма будет у него через 1 год, 2 года, 6 лет?

Решение. Начальная сумма в 1000 р. через год увеличится на 5 % и составит 105 % от 1000 р. Найдем 105 % = 1,05 от 1000 р.: $1000\cdot 1{,}05=1050$ (р.).

Через два года сумма вклада станет равной $1000\cdot 1{,}05\cdot 1{,}05=1000\cdot 1{,}05^2$ (р.), через три года — $1000\cdot 1{,}05^3$ (р.) и т. д. Получим числовую последовательность: $1000\cdot 1{,}05$; $1000\cdot 1{,}05^2$; $1000\cdot 1{,}05^3$; ... .

Через шесть лет сумма будет равна $1000\cdot 1{,}05^6$ (р.).

Многие практические задачи приводят к последовательностям такого вида. Они называются **геометрическими прогрессиями.**

Определение. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же для данной последовательности число, не равное нулю, т. е.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } n \in \boldsymbol{N},\ q \neq 0.$$

Число q называется **знаменателем геометрической прогрессии.**

Из равенства $b_{n+1} = b_n \cdot q$ следует, что $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

$$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q}$$

Чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n), достаточно задать ее первый член b_1 и знаменатель q.

Например, если $b_1 = 3$, $q = 2$, то получится геометрическая прогрессия 3; 6; 12; 24; ... .

Если $b_1 = 3$, $q = -2$, то получится геометрическая прогрессия, знаки членов у которой чередуются, так как знаменатель прогрессии является отрицательным числом: 3; –6; 12; –24; ... .

Если $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{4}$, то геометрическая прогрессия имеет вид 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; ... .

Если $b_1 = 3$, $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны между собой: 3; 3; 3; 3; ... .

Чтобы вычислить любой член геометрической прогрессии, не вычисляя все предыдущие члены, используют **формулу *n*-го члена геометрической прогрессии**

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Выведем эту формулу. Если (b_n) — геометрическая прогрессия и q — ее знаменатель, то по определению верны равенства:

$$b_2 = b_1 \cdot q; \quad b_3 = b_2 \cdot q; \quad b_4 = b_3 \cdot q; \ \ldots;$$
$$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q; \quad b_n = b_{n-1} \cdot q.$$

Перемножим эти равенства между собой:

$$\times\begin{array}{l} b_2 = b_1 \cdot q \\ b_3 = b_2 \cdot q \\ b_4 = b_3 \cdot q \\ \ldots \\ b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q \\ b_n = b_{n-1} \cdot q \end{array}$$

$$b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ раз}}.$$

Разделим обе части равенства на произведение $b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$ и получим $b_n = b_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ раз}}$.

Так как число множителей q равно $n-1$, то равенство примет вид

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Получили формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии (b_n) позволяет вычислить любой член прогрессии, зная ее первый член, номер члена и знаменатель прогрессии.

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Пример 1. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, $b_1 = 2$, $q = 3$. Найдите 8-й член прогрессии.

Решение. По формуле n-го члена получим:

$b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2187 = 4374.$

Ответ: 4374.

Пример 2. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, $b_1 = 2{,}5$, $q = 2$. Является ли число 320 членом этой прогрессии?

Решение. По условию $b_n = 320$, $b_1 = 2{,}5$, $q = 2$. Подставим эти значения в формулу n-го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ и получим уравнение $320 = 2{,}5 \cdot 2^{n-1}$.

Решим это уравнение: $2^{n-1} = 128$; $2^{n-1} = 2^7$; $n - 1 = 7$; $n = 8$.

Так как 8 — натуральное число, то число 320 является членом этой прогрессии с номером 8.

Ответ: число 320 является членом этой прогрессии.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии

В геометрической прогрессии модуль каждого ее члена, начиная со второго, равен среднему пропорциональному предыдущего и последующего (соседних с ним) ее членов, т. е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ при $n \geqslant 2$.

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}},$$

или

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

при $n \geqslant 2$

Доказательство. В геометрической прогрессии (b_n) для члена b_n запишем по формуле n-го члена предыдущий и последующий (соседние) члены, т. е. b_{n-1} и b_{n+1}:

$$b_{n-1} = b_1 q^{n-2}, \quad b_{n+1} = b_1 q^n.$$

Найдем среднее пропорциональное (среднее геометрическое) соседних с b_n членов геометрической прогрессии. Для этого перемножим равенства $b_{n-1} = b_1 q^{n-2}$ и $b_{n+1} = b_1 q^n$ и получим:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 q^{n-2} \cdot b_1 q^n.$$

Выполним преобразования в правой части равенства:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1^2 \cdot q^{2n-2},$$

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1^2 \cdot q^{2(n-1)},$$

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = \left(b_1 \cdot q^{n-1}\right)^2,$$

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = \left(b_n\right)^2,$$

откуда получим, что

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ или } |b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Справедливо и обратное утверждение:

если в последовательности чисел, отличных от нуля, модуль каждого ее члена, начиная со второго, равен среднему пропорциональному предыдущего и последующего (соседних с ним) ее членов, то последовательность является геометрической прогрессией.

Доказательство. Пусть в некоторой числовой последовательности (b_n) модуль каждого ее члена, начиная со второго, равен среднему пропорциональному предыдущего и последующего ее членов, т. е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Тогда $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, значит, $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, т. е. частное от деления каждого члена последовательности на предшествующий ему член есть одно и то же число, отличное от нуля. Обозначим его q, получим $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ при любом натуральном n, следовательно, $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Значит, по определению последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия.

Оба утверждения можно объединить в одно, которое называется **характеристическим свойством геометрической прогрессии:**

числовая последовательность, все члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда модуль каждого ее члена, начиная со второго, равен среднему пропорциональному предыдущего и последующего ее членов:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Пример 3. Проверьте, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой $b_n = 6^n$.

Решение. Запишем для $b_n = 6^n$ предыдущий и последующий члены последовательности:

$$b_{n-1} = 6^{n-1}, \quad b_{n+1} = 6^{n+1}.$$

Найдем среднее пропорциональное этих членов:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{6^{n-1} \cdot 6^{n+1}} = \sqrt{6^{2n}} = |6^n| = 6^n = b_n.$$

По характеристическому свойству геометрической прогрессии последовательность $b_n = 6^n$ является геометрической прогрессией.

Определение геометрической прогрессии	
1. Последовательность 2; 10; 50; ... является геометрической прогрессией. Продолжите последовательность.	Так как последовательность является геометрической прогрессией, то найдем ее знаменатель $q = 10 : 2 = 5$. Тогда каждый следующий член равен предыдущему, умноженному на число 5: 2; 10; 50; 250; 1250; 6250; ... .
2. Известны члены геометрической прогрессии: $b_7 = 16$; $b_8 = 32$. Найдите знаменатель этой прогрессии.	Так как знаменатель геометрической прогрессии равен отношению любого ее члена к предыдущему, то $q = \frac{b_8}{b_7} = 32 : 16 = 2.$
Формула *n*-го члена геометрической прогрессии	
3. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите пятый член этой прогрессии, если $b_1 = -0{,}1$, $q = 4$.	По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ получим: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = -0{,}1 \cdot 4^4 = -25{,}6.$
4. Запишите формулу n-го члена для геометрической прогрессии -216; 36; -6; ... и найдите ее седьмой член.	По условию $b_1 = -216$, $b_2 = 36$, тогда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{36}{-216} = -\frac{1}{6}.$ Запишем формулу n-го члена данной геометрической прогрессии, подставив в формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ значения для b_1 и q: $b_n = -216 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$ Подставим $n = 7$ в формулу n-го члена данной геометрической прогрессии и найдем ее седьмой член: $b_7 = -216 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{7-1} = -216 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{6} = -6^3 \cdot \frac{1}{6^6} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}.$
5. Найдите номер члена геометрической прогрессии 0,1; 0,3; ..., равного 218,7.	Найдем знаменатель прогрессии: $b_1 = 0{,}1$, $b_2 = 0{,}3$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 3.$ Известно, что $b_n = 218{,}7$. По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ получим: $218{,}7 = 0{,}1 \cdot 3^{n-1}$; $3^{n-1} = 2187$; $3^{n-1} = 3^7$; $n - 1 = 7$; $n = 8$.

6. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_5 = 24$; $b_8 = -3$.	По условию $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 24$; $b_8 = b_1 \cdot q^7 = -3$. Составим систему уравнений $\begin{cases} b_1 \cdot q^4 = 24, \\ b_1 \cdot q^7 = -3. \end{cases}$ Разделим второе уравнение на первое и получим: $q^3 = -\frac{1}{8}$, $q = -\frac{1}{2}$. Подставим это значение q в первое уравнение системы и получим $b_1 = 384$.
Характеристическое свойство геометрической прогрессии	
7. Найдите сорок девятый член геометрической прогрессии, если сорок восьмой ее член равен 4, а пятидесятый ее член равен 9.	Воспользуемся характеристическим свойством геометрической прогрессии $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ и получим $b_{49}^2 = b_{48} \cdot b_{50}$, т. е. $b_{49}^2 = 4 \cdot 9$; $b_{49}^2 = 36$. Тогда $b_{49} = -6$ или $b_{49} = 6$.
8. При каком значении x последовательность $x - 2$; $x - 1$; $x + 2$ является геометрической прогрессией?	По характеристическому свойству прогрессии последовательность является геометрической прогрессией, если каждый ее член, начиная со второго, равен среднему пропорциональному предыдущего и последующего членов: $(x-1)^2 = (x-2)(x+2)$. Решим полученное уравнение: $(x-1)^2 = x^2 - 4$; $-2x = -5$; $x = 2{,}5$.

?

1. В геометрической прогрессии (b_n) n-й член вычисляется по формуле:

а) $b_n = b_1 \cdot q$; б) $b_n = b_1 \cdot q^n$;

в) $b_n = b_1 + (n-1)q$; г) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Выберите правильный ответ.

2. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, если для всех членов последовательности, начиная со второго, выполняется условие:

а) $b_n = (n-1) \cdot b_{n+1}$; б) $b_n = b_{n-1} : b_{n+1}$;

в) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$; г) $b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2}$.

Выберите правильный ответ.

4.174. Как определить знаменатель геометрической прогрессии, если заданы несколько ее первых членов? Определите знаменатель геометрической прогрессии:

а) 6; 12; 24; 48; ...; б) 1; 4; 16; 64; ...;
в) 2; 6; 18; 54; ...; г) 1; 0,5; 0,25; 0,125; ... .

4.175. Вычислите знаменатель и следующие четыре члена геометрической прогрессии:

а) –1; –2; –4; –8; ...; б) 3; –0,3; 0,03; –0,003; ...;
в) 5; 5; 5; 5; ...; г) $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; ... .

4.176. Первый член геометрической прогрессии равен 10, а знаменатель равен 2. Назовите пять первых членов этой геометрической прогрессии.

4.177. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 8,\ b_2 = -2$; б) $b_9 = -6,\ b_{10} = -12$;
в) $b_{15} = 5\sqrt{5},\ b_{16} = 25$; г) $b_n = \frac{3}{8},\ b_{n+1} = 1\frac{3}{4}$.

4.178. Как определить по заданному члену геометрической прогрессии его номер? В геометрической прогрессии 0,01; 0,1; 1; 10; ... найдите номер члена, равного 1 000 000.

4.179. Знаменатель геометрической прогрессии (b_n) равен 2. Найдите первый и второй члены этой прогрессии, если:

а) $b_3 = 16$; б) $b_3 = -1$; в) $b_3 = \frac{1}{4}$; г) $b_3 = -4\sqrt{3}$.

4.180. В геометрической прогрессии четвертый член равен 32. Найдите все предыдущие члены этой прогрессии, если знаменатель прогрессии равен:

а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1; г) –4.

Выполните задание двумя способами.

4.181. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Используйте формулу n-го члена для вычисления шестого члена этой прогрессии, если:

а) $b_1 = 5,\ q = 2$; б) $b_1 = -0{,}002,\ q = 10$;
в) $b_1 = 1,\ q = \frac{1}{3}$; г) $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{9},\ q = -\sqrt{3}$.

4.182. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Выразите b_8 через:

а) b_1 и q; б) b_7 и q; в) b_9 и q; г) b_5 и q.

4.183. Для геометрической прогрессии (b_n) выразите через b_{19} и q:

а) b_1; б) b_{20}; в) b_{14}; г) b_{27}.

4.184. Запишите формулу n-го члена и найдите b_5 и b_7 для геометрической прогрессии (b_n):

а) $-25; -5; -1; ...$; б) $\frac{1}{27}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; ...$;

в) $\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3}; ...$; г) $-0,25; 0,5; -1; ...$.

4.185. Верно ли, что можно найти первый член геометрической прогрессии по одному из его членов и знаменателю прогрессии? Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_8 = 384$ и $q = 2$;

б) $b_5 = 31,25$ и $q = -2,5$;

в) $b_{10} = \frac{1}{243}$ и $q = \frac{1}{3}$.

4.186. Для геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_4 = -4$, $b_3 = 2$. Найдите знаменатель прогрессии и ее восьмой член.

4.187. Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 4^n$. Верно ли, что:

а) $q = 2$; б) $q = 4$; в) $b_1 = \frac{1}{4}$; г) $b_1 = 4$?

4.188. Виктория амазонская — самая большая кувшинка в мире — очень быстро растет. Днем ее лист имеет диаметр 0,1 см, а через 12 ч достигает максимального размера. Каков максимальный размер листа кувшинки, если каждый час его диаметр увеличивается в 2 раза?

4.189. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (x_n), в которой:

а) $x_1 = 2$, $x_7 = 1458$; б) $x_1 = 74\frac{2}{3}$; $x_6 = 2\frac{1}{3}$.

4.190. Число 324 является членом геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 4$, а $q = 3$. Найдите номер этого члена.

4.191. Последовательность $\frac{3}{16}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}; ...$ — геометрическая прогрессия. Какой номер имеет член прогрессии, равный 96?

4.192. В первый день мировой премьеры кинофильма было продано 300 000 билетов. В последующие дни число проданных билетов увеличивалось на 10 % ежедневно. Сколько билетов было продано за второй и за пятый дни премьеры?

4.193. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_4 = 2,\ b_7 = -54$; б) $b_3 = 25,\ b_6 = -3125$;

в) $b_2 = 10^8,\ b_6 = 10^4$.

4.194. Найдите пятнадцатый член геометрической прогрессии (y_n), если $b_4 = 1,\ b_9 = 10^{-5}$.

4.195. Какие два числа надо вставить между числами 9 и 243, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

4.196. Между числами $40\frac{1}{2}$ и $5\frac{1}{3}$ вставьте четыре такие числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию. Чему равен знаменатель этой геометрической прогрессии?

4.197. Найдите восьмой член геометрической прогрессии, если седьмой и девятый ее члены соответственно равны:

а) 4 и 25; б) –9 и –16; в) 5 и 10.

4.198. Известно, что в геометрической прогрессии, все члены которой положительны, $b_4 = 5,\ b_6 = 1$. Найдите b_5; q; b_1; b_8.

4.199. Найдите, при каком значении переменной значения выражений будут последовательными членами геометрической прогрессии:

а) $5;\ 9 - 4x$ и $4x + 1$;

б) $x + 11;\ x - 5$ и $2x - 10$;

в) $4;\ x - 5$ и $(x + 3)^2$.

4.200*. Проверьте, является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) $b_n = 5^n$; б) $c_n = \frac{7}{11} \cdot 8^{n-1}$;

в) $x_n = 2n^3$; г) $y_n = -5n$.

Если да, то найдите ее первый член и знаменатель.

4.201*. Докажите, что последовательность 3^n; 3^{n+1}; 3^{n+2}; 3^{n+3}; ..., где $n \in N$, является геометрической прогрессией. Найдите знаменатель этой прогрессии.

4.202*. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_7 = 5b_5$ и $b_5 - b_3 = 48$;

б) $b_1 + b_3 = 10$ и $b_2 + b_4 = 30$;

в) $b_5 - b_1 = 15$ и $b_4 - b_2 = 6$.

4.203*. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_{43} \cdot b_{36} = 57$. Найдите значение выражения $b_{33} \cdot b_{46}$.

4.204*. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 - b_5 = 48$; $b_6 + b_5 = 48$.

4.205*. Пятый член геометрической прогрессии равен 2. Чему равно произведение первых девяти членов этой прогрессии?

4.206*. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Определите, является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) b_1; b_3; b_5; ...; б) $b_1 + 7$; $b_2 + 7$; $b_3 + 7$; ...;

в) $5b_1$; $5b_2$; $5b_3$; ...; г) b_1^2; b_2^2; b_3^2; ... .

4.207*. В геометрической прогрессии с положительными членами $b_1 + b_2 = 20$, $b_3 + b_4 = 180$, $b_n = 405$. Найдите n.

4.208. Знаменатель геометрической прогрессии (b_n) равен 5. Найдите первый член прогрессии, если:

а) $b_2 = 20$; б) $b_2 = -5$; в) $b_2 = 24$; г) $b_2 = -15\frac{1}{7}$.

4.209. Как определить знаменатель геометрической прогрессии, если заданы несколько ее первых членов? Найдите знаменатель и шестой член геометрической прогрессии:

а) –1; –5; –25; –125; ...; б) 8; 4; 2; 1; ...;

в) –3; 3; –3; 3; ...; г) $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; 9; ... .

4.210. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 10$, $b_2 = 30$; б) $b_5 = -12$, $b_6 = 3$;

в) $b_{17} = 0{,}25$, $b_{18} = 0{,}5$; г) $b_{21} = 16$, $b_{22} = 4\sqrt{2}$.

4.211. В геометрической прогрессии шестой член равен 27. Найдите два предыдущих и два последующих члена этой прогрессии, если знаменатель прогрессии равен:

а) 3; б) $-\frac{1}{3}$; в) 1; г) –3.

4.212. Для геометрической прогрессии (b_n) выразите b_{12} через:

а) b_1 и q; б) b_{11} и q; в) b_{15} и q; г) b_7 и q.

4.213. В геометрической прогрессии (b_n) известны первый член b_1 и знаменатель q. Запишите формулу n-го члена этой прогрессии и найдите b_4 и b_7, если:

а) $b_1 = 5,\ q = 2$; б) $b_1 = -1,\ q = \frac{1}{3}$;

в) $b_1 = 16,\ q = -\frac{1}{2}$; г) $b_1 = 9\sqrt{3},\ q = \sqrt{3}$.

4.214. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_7 = \frac{4}{9}$ и $q = -\frac{1}{3}$.

4.215. Для геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_2 = 6,\ b_3 = -2$. Найдите знаменатель прогрессии и пятый член этой прогрессии.

4.216. Три года назад население города составляло 250 000 чел. В связи с расширением производственных мощностей предприятий города в последующие годы число жителей города увеличивалось на 8 % ежегодно. Верно ли, что сейчас в городе проживает более 350 000 человек?

4.217. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (c_n), в которой $c_1 = -1{,}5,\ c_4 = 96$.

4.218. Является ли число 486 членом геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 2$, а $q = 3$?

4.219. Число –256 является членом геометрической прогрессии –8; –16; –32; ... . Найдите номер этого члена.

4.220. Проверьте, является ли число 1024 членом геометрической прогрессии 4; 16; 64; ... .

4.221. Предприятие в январе планирует запустить новую производственную линию. По предварительным расчетам, в первый месяц на новой линии может быть изготовлено 256 тыс. единиц продукции. Затем предполагается увеличивать выпуск продукции на 25 % ежемесячно. В каком месяце, согласно этому плану, предприятию удастся довести выпуск продукции до 625 тыс. единиц в месяц?

4.222. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_4 = -48,\ b_8 = -768$.

4.223. Какие четыре числа надо вставить между числами 160 и 5, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию? Чему равен знаменатель этой геометрической прогрессии?

4.224. Найдите двадцатый член и знаменатель геометрической прогрессии, если девятнадцатый и двадцать первый ее члены соответственно равны 2 и 50.

4.225. Найдите, при каком значении переменной значения выражений будут последовательными членами геометрической прогрессии:

а) 4; $x-5$ и $7-2x$; б) $3x-4$; $x+2$ и $x+6$.

4.226*. Докажите, что последовательность $b_n = \frac{2}{7} \cdot 3^n$ является геометрической прогрессией.

4.227*. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_4 - b_5 = -168$ и $b_3 + b_4 = -28$.

4.228*. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Определите, является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) b_2; b_4; b_6; ...; б) $\frac{1}{b_1}$; $\frac{1}{b_2}$; $\frac{1}{b_3}$; ... .

4.229*. Шестой член геометрической прогрессии равен 10. Чему равно произведение одиннадцати первых членов этой прогрессии?

4.230. С помощью графиков функций $y = |x|$ и $y = \frac{3x}{7} + 2\frac{6}{7}$ (рис. 95) решите уравнение $|x| = \frac{3x}{7} + 2\frac{6}{7}$. Выполните проверку.

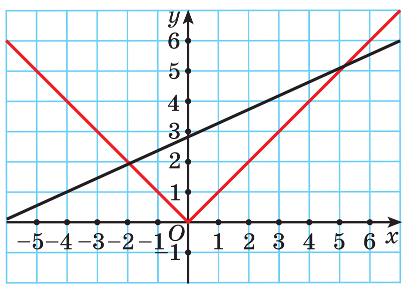


Рис. 95

4.231. Найдите значение выражения

$$\frac{7}{\sqrt{11}-2} + \frac{5}{4+\sqrt{11}}.$$

4.232. Сократите дробь $\frac{y^2+2y-15}{y^2-9}$.

4.233. Автобус должен проехать 700 км за 10 ч. Оказалось, что 45 % пути он преодолел за 4,5 ч. С какой скоростью ему надо двигаться дальше, чтобы прибыть в пункт назначения по расписанию?

§ 18. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

4.234. Найдите значение выражения:

а) $\left(2^{-1}+3^{-1}\right)^{-1}$; б) $2^4 \cdot 16 : (-8)^3$.

4.235. Решите уравнение $(x-6)\left(x^2-3\right)=x-6$.

Немало легенд связано с геометрической прогрессией. Наиболее известная из них рассказывает об изобретателе шахмат.

По легенде, когда создатель шахмат показал свое изобретение правителю страны, тому так понравилась игра, что он дал изобретателю право самому выбрать награду. Мудрец попросил у правителя за первую клетку шахматной доски заплатить ему одно зерно пшеницы, за вторую — два, за третью — четыре и т. д., удваивая количество зерен на каждой следующей клетке (рис. 96).

Рис. 96

Правитель быстро согласился и приказал казначею выдать мудрецу нужное количество зерна. Однако когда казначей показал расчеты, то оказалось, что расплатиться невозможно, разве только осушить моря и океаны и засеять все пшеницей.

Число зерен, которое попросил мудрец, равно сумме членов геометрической прогрессии 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}, т. е. $1+2+2^2+2^3+...+2^{63}$.

Выведем формулу, по которой можно находить сумму n первых членов геометрической прогрессии.

Обозначим сумму n первых членов геометрической прогрессии (b_n) через S_n, тогда:

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + ... + b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель прогрессии q и получим:

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + ... + b_1 \cdot q^n.$$

Вычтем из второго равенства первое и получим:

$$
\begin{array}{r}
- \begin{array}{l} S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^n \\ S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} \end{array} \\
\hline
S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot q^n - b_1,
\end{array}
$$

т. е. $S_n \cdot (q-1) = b_1\left(q^n - 1\right)$. Выразим из этого равенства S_n при $q \neq 1$ и получим формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$$

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену, и сумму n первых членов такой геометрической прогрессии можно найти по формуле $S_n = nb_1$.

Вычислим по формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии число зерен, которое запросил в награду мудрец, т. е. сумму

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}.$$

Первый член геометрической прогрессии $b_1 = 1$, знаменатель $q = 2$, количество членов прогрессии равно 64.

Тогда $S_{64} = \dfrac{1 \cdot \left(2^{64}-1\right)}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$

Такого количества пшеницы человечество не собрало за всю свою историю.

Пример 1. Найдите сумму десяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 0{,}5$, $q = 2$.

Решение. Применим формулу суммы $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ для $n = 10$, получим $S_{10} = \dfrac{b_1\left(q^{10}-1\right)}{q-1} = \dfrac{0{,}5\left(2^{10}-1\right)}{2-1} = 0{,}5 \cdot (1024 - 1) =$ $= 0{,}5 \cdot 1023 = 511{,}5.$

Ответ: 511,5.

Пример 2. Найдите сумму двенадцати первых членов геометрической прогрессии 3; –6; 12; –24; ... .

Решение. Подставим в формулу $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ значения $b_1 = 3$, $q = -2$, $n = 12$: $S_{12} = \dfrac{3 \cdot \left((-2)^{12} - 1\right)}{-2 - 1} = \dfrac{3 \cdot \left(2^{12} - 1\right)}{-3} = -(2^{12} - 1) = -4095$.

Ответ: -4095.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии	
1. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -1$, $b_3 = -\dfrac{1}{2}$.	Найдем знаменатель и первый член геометрической прогрессии: $q = \dfrac{b_3}{b_2} = \left(-\dfrac{1}{2}\right) : (-1) = \dfrac{1}{2}$, тогда $b_1 = \dfrac{b_2}{q} = (-1) : \dfrac{1}{2} = -2$. По формуле $S_n = \dfrac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ найдем $S_5 = \dfrac{-2 \cdot \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\dfrac{1}{2} - 1} = \dfrac{-2 \cdot \left(\dfrac{1}{32} - 1\right)}{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{-2 \cdot \dfrac{31}{32}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{-62}{32} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{-62}{16} = -3\dfrac{7}{8}$.
2. Сумма членов геометрической прогрессии равна 605. Найдите количество членов прогрессии, если $b_1 = 5$, $q = 3$.	Подставим в формулу $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ значения $S_n = 605$, $b_1 = 5$, $q = 3$ и найдем n: $605 = \dfrac{5\left(3^n - 1\right)}{3 - 1}$; $5\left(3^n - 1\right) = 605 \cdot 2$; $3^n - 1 = 242$; $3^n = 243$; $3^n = 3^5$; $n = 5$.
3. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_5 = 6$; $b_6 = -36$. Найдите S_3.	Найдем знаменатель прогрессии: $q = b_6 : b_5 = -36 : 6 = -6$. Подставим в формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_5 = 6$ и $q = -6$ и найдем первый член прогрессии: $b_5 = b_1 \cdot q^4$; $6 = b_1 \cdot (-6)^4$; $b_1 = \dfrac{1}{216}$.

	По формуле $S_n = \dfrac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ найдем сумму трех первых членов геометрической прогрессии: $S_3 = \dfrac{\frac{1}{216}\left(\left(-6\right)^3 - 1\right)}{-6 - 1} = \dfrac{31}{216}$.
4. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_3 = 16$, $q = 2$, $b_n = 64$. Найдите сумму n первых членов этой прогрессии.	Зная, что третий член геометрической прогрессии равен 16, а ее знаменатель равен 2, по формуле $b_3 = b_1 \cdot q^2$ найдем первый член прогрессии: $16 = b_1 \cdot 2^2$; $b_1 = 4$. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ и найдем n: $64 = 4 \cdot 2^{n-1}$; $2^{n-1} = 16$; $2^{n-1} = 2^4$; $n - 1 = 4$; $n = 5$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии найдем S_5: $S_5 = \dfrac{4 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 124$.

1. В геометрической прогрессии (b_n) сумма n первых членов вычисляется по формуле:

а) $S_n = b_1 \cdot 2q^n$; б) $S_n = b_1 \cdot q^n$;

в) $S_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; г) $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Выберите правильный ответ.

2. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_1 = -12$, $q = 5$. Верно ли, что сумма n первых членов данной прогрессии при любом n является отрицательным числом?

4.236. Найдите сумму 99 первых членов геометрической прогрессии 7; –7; 7; –7; ... .

4.237. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии:

а) 5; 10; 20; ...; б) 9; 3; 1; ...;

в) $\frac{1}{2}$; –1; 2; ...; г) 3; $3\sqrt{3}$; 9; ... .

4.238. В геометрической прогрессии (b_n) найдите:

а) S_5, если $b_1 = 1$, $q = 5$;

б) S_8, если $b_1 = -4$, $q = -0{,}5$;

в) S_{10}, если $b_1 = -2$, $q = \sqrt{2}$.

4.239. Предприятие в течение полугода проводило модернизацию производства, в результате чего расходы на выпуск единицы продукции снижались ежемесячно на 10 % по сравнению с предыдущим месяцем. Определите, сколько средств удалось сэкономить предприятию за шесть месяцев, если до модернизации расходы на выпуск единицы продукции составляли 100 р. и ежемесячно предприятие выпускает 500 единиц продукции.

4.240. Предприниматель запланировал в течение месяца ежедневно откладывать деньги. Причем в первый день он планирует отложить 1 к., во второй — 2 к., в третий — 4 к., в четвертый — 8 к. и т. д. Сможет ли он реализовать свой план, если его ежемесячный заработок составляет 1200 р.?

4.241. Известен шестнадцатый член геометрической прогрессии и знаменатель прогрессии, не равный 1. Составьте план вычисления суммы 9 первых членов этой прогрессии.

4.242. Найдите сумму восьми первых членов геометрической прогрессии (x_n), если известно, что $x_3 = \frac{3}{32}$; $q = \frac{1}{2}$.

4.243. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 9$; $b_5 = \frac{16}{9}$. Сколько решений имеет задача?

4.244. Известны девятый и шестой члены геометрической прогрессии со знаменателем, не равным 1. Составьте план вычисления суммы 10 первых членов этой прогрессии.

4.245. В геометрической прогрессии (b_n) найдите S_6, если известно, что:

а) $b_4 = 216$; $b_5 = -648$;

б) $b_2 = 25$; $b_5 = 125\sqrt{5}$;

в) $b_3 = -12$; $b_5 = -48$.

4.246. Найдите b_n и S_n для геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 0{,}1$; $q = 10$; $n = 6$;

б) $b_1 = -3$; $q = \sqrt{3}$; $n = 8$.

4.247. Сумма четырех первых членов геометрической прогрессии равна 65. Найдите первый член прогрессии, если ее знаменатель равен $\frac{2}{3}$.

4.248. Сумма членов геометрической прогрессии равна -85. Найдите количество членов прогрессии, если $b_1 = 1$, $q = -2$.

4.249. Найдите сумму, зная, что ее слагаемые — последовательные члены геометрической прогрессии:

а) $1 + 2 + 4 + ... + 256$; б) $1 - 3 + 9 - ... + 729$.

4.250. Геометрическая прогрессия задана формулой:

а) $b_n = 2 \cdot 3^n$; найдите S_6; б) $b_n = \frac{3}{8} \cdot 2^{n-1}$; найдите S_9.

4.251. Разность четвертого и третьего членов геометрической прогрессии равна 24, а разность третьего и второго членов равна 12. Найдите сумму пяти первых членов этой прогрессии.

4.252*. Найдите количество членов геометрической прогрессии, в которой $q = -\frac{1}{3}$, $b_n = \frac{1}{9}$, $S_n = 6\frac{7}{9}$.

4.253*. В геометрической прогрессии (c_n) с положительными членами сумма четырех первых членов равна 255 и $c_1 + c_3 = 51$. Найдите q.

4.254*. В геометрической прогрессии $S_7 = 14$, $S_{14} = 18$. Найдите сумму членов этой прогрессии с 15-го по 21-й включительно.

4.255*. Выведите формулу произведения n первых членов геометрической прогрессии.

4.256*. Найдите сумму квадратов шести первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $5\sqrt{2}$, а знаменатель равен $\sqrt{2}$.

4.257*. Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4.258*. Найдите сумму четырех положительных чисел, из которых первые три составляют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую прогрессию. Сумма трех первых чисел равна 12, а сумма трех последних — 19.

4.259*. Найдите четыре целых числа, из которых первые три являются последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — последовательными членами арифметической прогрессии, если сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних чисел равна 18.

4.260. В геометрической прогрессии (b_n) найдите:

а) S_8, если $b_1 = 9$, $q = 2$; б) S_5, если $b_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$.

4.261. Найдите сумму восьми первых членов геометрической прогрессии:

а) 7; 14; 28; ...; б) –3; 3; –3; ...; в) 5; $5\sqrt{5}$; 25; ... .

4.262. На предприятии планируют благодаря эффективной рекламной кампании в первый месяц дополнительно реализовать 1000 изделий. Далее предполагается ежемесячное увеличение дополнительной реализации в 1,5 раза. За сколько месяцев предприятие сможет реализовать по этому плану дополнительно 8125 изделий?

4.263. Известен третий член геометрической прогрессии и ее знаменатель. Составьте план нахождения 7 первых членов этой прогрессии. Предложите два способа.

4.264. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии (c_n), если известно, что $c_4 = 3$; $q = -3$.

4.265. В геометрической прогрессии (b_n) найдите S_7, если известно, что:

а) $b_6 = 48{,}6$; $b_7 = 72{,}9$; б) $b_3 = 34$; $b_8 = 1088$.

4.266. Найдите b_n и S_n для геометрической прогрессии, у которой $b_1 = -1$; $q = -\frac{2}{3}$; $n = 5$.

4.267. Сумма четырех первых членов геометрической прогрессии равна 62,4. Найдите первый член прогрессии, если ее знаменатель равен 0,2.

4.268. Сумма членов геометрической прогрессии равна 684. Найдите количество членов прогрессии, если ее первый член равен 12, а знаменатель равен 7.

4.269. Найдите сумму $1 - 2 + 4 - ... - 128$, зная, что ее слагаемые — последовательные члены геометрической прогрессии.

4.270. Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = 5 \cdot 2^{n+1}$. Найдите S_8.

4.271*. Найдите количество членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$.

4.272*. Найдите сумму членов геометрической прогрессии (b_n) с шестого по десятый включительно, если $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -2$.

4.273*. Три положительных числа, дающие в сумме 30, составляют арифметическую прогрессию. Если от первого числа отнять 5, от второго — 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4.274. Сравните дроби:

а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{11}{13}$; б) $-\frac{8}{9}$ и $-\frac{15}{17}$.

4.275. Найдите значение выражения $a^{-1}+b^{-1}$ при $a=\frac{1}{3}$ и $b=-0{,}25$.

4.276. Необходимо собрать одинаковые комплекты, состоящие из ручек, карандашей и тетрадей. Найдите, какое наибольшее количество комплектов можно собрать из 304 ручек, 190 карандашей и 114 тетрадей, используя при этом все эти предметы.

4.277. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5>0, \\ x-2\leqslant 0. \end{array}\right.$

4.278. За перевод денег с одного счета на другой банк берет 1,5 % от переводимой суммы. Какую наибольшую сумму денег можно перевести, имея на счету ровно 1000 р.?

4.279. Решите уравнение $\left(3x^2-x-4\right)\left(3x^2-x+2\right)=7$, используя метод замены переменной.

§ 19. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

4.280. Какие из следующих дробей можно записать в виде конечной десятичной дроби: $\frac{2}{25}$; $\frac{7}{75}$; $\frac{4}{45}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{11}{120}$?

4.281. Найдите значение выражения $\frac{1}{25}+\frac{1}{3}-\frac{1}{45}$.

4.282. Верно ли, что $\frac{1}{6}=0{,}166...=0{,}1(6)$?

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной периодической дроби. Например, $\frac{2}{50}=0{,}04$ — конечная десятичная дробь. Бесконечная периодическая десятичная дробь получается в случае, когда деление «не заканчивается», например $\frac{2}{3} = 0{,}6666... = 0{,}(6)$, $\frac{6}{11} = 0{,}5454... = 0{,}(54)$.

Вы рассматривали правило записи конечной десятичной дроби в виде обыкновенной дроби (например, $0{,}17 = \frac{17}{100}$, $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ и т. п.).

Выясним, как бесконечную периодическую десятичную дробь записать в виде обыкновенной дроби.

Рассмотрим, например, бесконечную периодическую десятичную дробь $0{,}(7) = 0{,}7777...$. Определим, какой обыкновенной дроби равно это число.

Запишем дробь 0,(7) в виде суммы разрядных слагаемых:

$$0{,}7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... \, .$$

В данном случае необходимо найти сумму бесконечного числа слагаемых.

Слагаемые этой суммы являются членами бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{10} < 1$. Такие геометрические прогрессии называются **бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями.**

Определение. Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называется такая бесконечная геометрическая прогрессия, у которой знаменатель $|q| < 1$.

Например, геометрическая прогрессия 8; 4; 2; ... является бесконечно убывающей геометрической прогрессий, так как $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$.

Геометрическая прогрессия 9; –3; 1; $-\frac{1}{3}$, ... также является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, поскольку $|q| = \left|\frac{-3}{9}\right| = \frac{1}{3} < 1$.

Для того чтобы представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной, нужно найти **сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.** Ее обозначают буквой S и находят по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \; |q| < 1.$$

Покажем идею вывода формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию (b_n), у которой $|q| < 1$. Сумма n первых членов данной прогрессии b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Запишем эту формулу в виде $S_n = \frac{b_1}{1 - q} \cdot (1 - q^n)$.

Представим, что n неограниченно возрастает (говорят, что стремится к бесконечности, и записывают $n \to \infty$). Поскольку $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении числа n степень q^n стремится к нулю, а значение разности $1 - q^n$ стремится к единице. Значит, при неограниченном увеличении числа n сумма $S_n = \frac{b_1}{1 - q} \cdot (1 - q^n)$ стремится к числу $\frac{b_1}{1 - q}$, что можно записать в виде $S_n \to \frac{b_1}{1 - q}$ при $n \to \infty$.

Число $\frac{b_1}{1 - q}$ называют суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), у которой $|q| < 1$. Таким образом, $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \frac{b_1}{1 - q}$.

Обозначим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии буквой S и получим формулу: $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Вычислим по этой формуле сумму разрядных слагаемых: $0{,}7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$.

Слагаемые этой суммы образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{7}{1000}$; ..., первый член которой равен $\frac{7}{10}$, а знаменатель равен $\frac{1}{10}$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Так как $|q| < 1$, то можем найти сумму этой бесконечной прогрессии. Подставим $b_1 = \frac{7}{10}$ и $q = \frac{1}{10}$ в формулу $S = \frac{b_1}{1 - q}$ и получим: $S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$.

Значит, $0,(7) = 0,7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \frac{7}{9}$.

Таким образом, бесконечную периодическую десятичную дробь 0,(7) можно записать в виде обыкновенной дроби $\frac{7}{9}$, т. е. $0,(7) = \frac{7}{9}$.

Таким же способом можно любую бесконечную периодическую десятичную дробь представить в виде обыкновенной дроби.

Чтобы записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби, нужно:

① Представить число в виде суммы разрядных слагаемых.	Запишите в виде обыкновенной дроби число 2,4(15). ① $2,4(15) = 2,41515... =$ $= 2 + 0,4 + 0,015 + 0,00015 + ...$
② Выделить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	② $S = 0,015 + 0,00015 + ...$
③ Указать первый член b_1 и найти знаменатель этой прогрессии q.	③ $b_1 = 0,015;\quad q = \frac{0,00015}{0,015} = 0,01.$
④ Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.	④ $S = \frac{0,015}{1-0,01} = \frac{0,015}{0,99} = \frac{15}{990} = \frac{1}{66}.$
⑤ Вычислить сумму первых слагаемых и найденного значения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	⑤ $2,4 + \frac{1}{66} = 2\frac{4}{10} + \frac{1}{66} = 2\frac{2}{5} + \frac{1}{66} =$ $= 2\frac{137}{330}.$ $2,4(15) = 2\frac{137}{330}.$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	
1. В бесконечной геометрической прогрессии $b_1 = -36$, $b_2 = 6$. Является ли эта прогрессия бесконечно убывающей геометрической прогрессией?	Найдем знаменатель прогрессии: $q = \frac{6}{-36} = -\frac{1}{6}$. Так как $\lvert q \rvert < 1$, то данная прогрессия является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

<table>
<tr><td>2. Является ли бесконечно убывающей геометрическая прогрессия:
а) $4;\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{4}{27};\ \ldots;$
б) $1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ -\frac{1}{27};\ \ldots;$
в) $2;\ -4;\ 8;\ -16;\ \ldots$?</td><td>а) Каждый член этой геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на число $\frac{1}{3}$. Так как $|q| = \frac{1}{3} < 1$, то прогрессия является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.
б) Поскольку $|q| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, то прогрессия является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.
в) Знаменатель прогрессии $q = -2$. Так как $|-2| > 1$, то прогрессия не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии</td></tr>
<tr><td>3. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{2}$.</td><td>По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим:
$S = \frac{5}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.</td></tr>
<tr><td>4. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = 90$, $q = 0{,}1$. Найдите первый член этой прогрессии.</td><td>В формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии
$S = \frac{b_1}{1-q}$ подставим $S = 90$, $q = 0{,}1$ и получим $90 = \frac{b_1}{1-0{,}1}$.
Решим полученное уравнение:
$90 = \frac{b_1}{0{,}9}$, $b_1 = 81$.</td></tr>
<tr><td>5. Запишите бесконечную периодическую десятичную дробь $15{,}2(3)$ в виде обыкновенной дроби.</td><td>① $15{,}2(3) = 15 + 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + {}$
${} + 0{,}0003 + \ldots$.
② $S = 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$.
③ $b_1 = 0{,}03;\ \ q = \frac{0{,}003}{0{,}03} = 0{,}1$.
④ $S = \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{0{,}03}{0{,}9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$.
⑤ $15{,}2 + \frac{1}{30} = 15\frac{1}{5} + \frac{1}{30} = 15\frac{7}{30}$.
$15{,}2(3) = 15\frac{7}{30}$.</td></tr>
</table>

1. Каждый член бесконечной последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего в 3 раза. Эта последовательность: а) является арифметической прогрессией; б) является геометрической прогрессией; в) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией; г) не является прогрессией. Выберите правильный ответ.

2. Если в бесконечной геометрической прогрессии $|q| < 1$, тогда сумма членов этой прогрессии вычисляется по формуле:

а) $S = b_1 \cdot q$; б) $S = b_1 : q$; в) $S = b_1 \cdot (q - 1)$; г) $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Выберите правильный ответ.

4.283. Из данных геометрических прогрессий выберите бесконечно убывающие:

а) 3; 9; 27; 81; ...; б) 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; ...;

в) –5; 10; –20; 40; ...; г) 8; –4; 2; –1; $\frac{1}{2}$; ... .

4.284. Какую формулу нужно применить, чтобы найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q? Найдите эту сумму, если:

а) $b_1 = 12$, $q = \frac{1}{4}$; б) $b_1 = -25$, $q = -\frac{2}{5}$;

в) $b_1 = 21$, $q = -\frac{1}{3}$; г) $b_1 = -0{,}1$, $q = 0{,}9$.

4.285. Составьте план решения и найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 100; 10; 1; ...; б) 0,2; 0,02; 0,002; ...;

в) 9; –4,5; 2,25; ...; г) –3; –2; $-\frac{4}{3}$; ... .

4.286. Найдите сумму, слагаемыми которой являются последовательные члены геометрической прогрессии:

а) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$; б) $3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \frac{3}{125} + \ldots$.

4.287. Примените алгоритм для представления в виде обыкновенной дроби числа:

а) 0,(4); б) 0,(12); в) 0,(123);
г) 14,(31); д) 6,3(8); е) 10,1(26).

4.288. Используйте формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой:

а) $S = 72$, $q = \frac{2}{9}$; б) $S = 8$, $q = -\frac{3}{4}$.

4.289. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

а) $S = -140$, $b_1 = -35$; б) $S = \frac{2}{3}$, $b_1 = 1$.

4.290. Определите, является ли бесконечно убывающей геометрическая прогрессия:

а) $2; \sqrt{2}; 1; \ldots;$ б) $-5\sqrt{5}; 5; -\sqrt{5}; \ldots;$

в) $1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3}; \ldots .$

Воспользуйтесь соответствующей формулой и найдите ее сумму.

4.291. Найдите третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой знаменатель равен 0,4, а сумма прогрессии равна $33\frac{1}{3}$.

4.292. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

а) $b_2 = 1\frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{3}$; б) $b_4 = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $q = \frac{1}{2}$.

4.293*. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что сумма членов этой прогрессии равна 12,6, а отношение 20-го члена к 17-му равно $-\frac{8}{125}$.

4.294*. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой в 1,5 раза больше суммы остальных ее членов.

4.295. Какую формулу нужно применить, чтобы найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q? Найдите эту сумму, если:

а) $b_1 = 30$, $q = \frac{2}{3}$; б) $b_1 = -36$, $q = -\frac{1}{4}$.

4.296. Составьте план решения и найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 125; 25; 5; ...; б) 0,1; 0,01; 0,001; ...;

в) 18; −6; 2; ... .

4.297. Какой формулой можно воспользоваться, чтобы найти сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, слагаемыми которой являются последовательные члены геометрической прогрессии? Найдите эту сумму.

4.298. Используйте алгоритм и представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(6); б) 0,(51); в) 3,(26); г) 17,3(47).

4.299. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а ее первый член равен 4. Найдите знаменатель прогрессии.

4.300. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 6, а ее знаменатель равен $\frac{2}{3}$. Найдите первый член прогрессии.

4.301. Составьте план решения и найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1{,}5$, $q = 0{,}25$.

4.302*. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма первых двух членов в 8 раз больше суммы остальных ее членов.

4.303. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

4.304. Вычислите: $\left(2\sqrt{3} + 5\right)^2 + \left(10 - \sqrt{3}\right)^2$.

4.305. Сократите дробь $\dfrac{x^2 - 1}{17x - 2x^2 - 15}$.

4.306. Магазин продал на прошлой неделе некоторое количество товара. На этой неделе запланировано продать того же товара на 10 % меньше, но по цене на 10 % больше. Бóльшую или меньшую сумму получит магазин от продажи товара на этой неделе и на сколько процентов?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

• знать способы задания последовательностей и уметь применять их для решения задач;

• знать определение арифметической прогрессии, ее разности, формулу n-го члена арифметической прогрессии;

- уметь применять формулу n-го члена арифметической прогрессии для решения задач;
- уметь применять характеристическое свойство арифметической прогрессии для определения вида последовательностей;
- уметь применять формулу суммы членов арифметической прогрессии для решения задач;
- знать определение геометрической прогрессии, ее знаменателя, формулу n-го члена геометрической прогрессии;
- уметь применять формулу n-го члена геометрической прогрессии для решения задач;
- уметь применять характеристическое свойство геометрической прогрессии для определения вида последовательностей;
- уметь применять формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии для решения задач;
- уметь применять определение, формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для решения задач.

Я проверяю свои знания

1. Из данных прогрессий выберите арифметические прогрессии; геометрические прогрессии:

а) $-3;\ 3;\ -3;\ 3;\ \ldots;$ б) $5;\ 5;\ 5;\ 5;\ \ldots;$

в) $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots;$ г) $-9;\ 3;\ -1;\ \frac{1}{3};\ \ldots;$

д) $-10;\ -6;\ -2;\ 2;\ \ldots;$ е) $\sqrt{7};\ -7;\ 7\sqrt{7};\ -49;\ \ldots$.

Какие из данных последовательностей являются бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями?

2. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = \frac{n-1}{n}$. Выберите верное равенство:

а) $x_4 = \frac{4}{5};$ б) $x_4 = \frac{3}{4};$ в) $x_4 = 4;$ г) $x_4 = 3.$

3. а) Составьте формулу n-го члена арифметической прогрессии и найдите a_{11}, если $a_1 = 2{,}4;\ d = -0{,}8.$

б) Дана геометрическая прогрессия $1;\ 3;\ 9;\ \ldots$. Составьте формулу n-го члена геометрической прогрессии и найдите шестой член этой прогрессии.

4. а) В арифметической прогрессии $a_{99} = 8$; $a_{101} = 80$. Найдите a_{100}.

б) В геометрической прогрессии $b_9 = 12,5$; $b_{11} = 2$. Найдите b_{10}.

5. а) Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_2 = 18$; $a_5 = 6$. Найдите a_1 и d.

б) Между числами 16 и $\frac{1}{16}$ вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами составили геометрическую прогрессию.

6. а) Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 29 - 3n$. Найдите сумму 10 первых членов прогрессии.

б) Найдите первый член геометрической прогрессии, если известно, что $S_4 = 15$; $q = 0,5$.

7. а) Дана арифметическая прогрессия –231; –228; ... . Найдите число отрицательных членов этой прогрессии.

б) В геометрической прогрессии $b_1 = -4$; $q = -2$. Найдите, под каким номером в эту прогрессию входит число 128.

8. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 9,(3); б) 6,7(29).

9. а) В арифметической прогрессии $a_{13} = 10$. Найдите S_{25}.

б) В геометрической прогрессии $b_n = 54$; $q = 3$; $S_n = 80$. Найдите b_1, n.

10. Три положительных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии, знаменатель которой больше единицы. Если среднее из них увеличить в два раза, то они станут последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Практическая математика

1. По некоторым исследованиям считается, что, для того чтобы достигнуть продвинутого уровня знания иностранного языка, позволяющего понимать, читать и объясняться на этом языке, вполне достаточно знать около 3000 слов. Девятиклассник на летних каникулах планирует начать изучение иностранного языка, причем в первый день он хочет выучить 10 слов, а в каждый следующий день — на 3 слова больше, чем в предыдущий. За какое время ему удастся достигнуть продвинутого уровня, если этот план осуществится?

2. Руководство предприятия, на которое по распределению пришел работать выпускник университета, знакомит нового работника с условиями оплаты труда. В первый месяц он получит 400 р. При добросовестной работе в каждый следующий месяц он будет получать на 20 р. больше, чем в предыдущий. Сколько заработает выпускник за год?

3. В начале года вкладчик положил в банк 1600 р. под n % годовых. В конце года он снял со счета 848 р. В конце второго года на счету оказалось 824 р. Сколько процентов в год начисляет банк?

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание. Существует ли в арифметической прогрессии 2; 5; 8; ... член, номер которого равен квадрату натурального числа? Проведите исследование. Сформулируйте обобщенный результат.

Готовимся к олимпиадам

1. Верно ли утверждение: если длины сторон выпуклого четырехугольника, взятые в последовательности a, b, d и c, образуют арифметическую прогрессию, то в этот четырехугольник можно вписать окружность?

2. Упростите выражение $70(71^9 + 71^8 + ... + 71^2 + 71) + 1$.

Итоговое повторение

Числа и вычисления

1. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $7 - 3\frac{3}{8} \cdot 8$; б) $24 : \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right)$;

в) $\left(1\frac{6}{19} - 4\frac{5}{19}\right) : 2$; г) $\left(1\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot 3\right) : (-10)$.

2. Выполните действия:

а) $(32{,}24 : 4 - 2{,}1) \cdot 0{,}1$; б) $(2 - 6{,}588 : 6{,}1) : 0{,}1$;

в) $2{,}5 \cdot 0{,}1 - \left(-6{,}6 + \frac{3}{5} : 2{,}4\right)$; г) $\left(-7\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 + 2{,}5 : 0{,}2$.

3. Используйте рациональные приемы счета и найдите значение выражения:

а) $-\frac{3}{8} \cdot (-6{,}81) - 3{,}19 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$;

б) $\frac{12 \cdot 87{,}5 - 12 \cdot 85{,}5}{0{,}4 \cdot 6{,}7 + 0{,}4 \cdot 3{,}3}$;

в) $\left(4\frac{2}{3} \cdot 3{,}5 - 3\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3}\right) : 0{,}14$;

г) $(1{,}59 \cdot 12{,}3 - 23 \cdot 0{,}159) \cdot 0{,}01$.

4. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $(1{,}27 + 3{,}74) \cdot 2{,}43 - 1{,}53 : (3{,}72 - 1{,}92)$;

б) $3\frac{3}{5} - 4\frac{1}{3} : \left(5 - 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3}\right)$.

5. Из чисел 1; 2; 5; 9; 11; 26; 91; 96 выберите все простые числа.

6. Используйте признаки делимости и из чисел 122 175, 188 154, 291 523, 510 577, 941 220 и 977 895 выберите те, которые:

а) кратны 5; б) кратны 9;

в) кратны и 5, и 9; г) не кратны ни 3, ни 2.

7. Найдите НОД (465; 870).

8. Найдите НОК (40; 60; 70).

9. Используйте алгоритм приведения дроби к новому знаменателю и определите, сколько:

а) шестых в $\frac{1}{3}$; б) пятнадцатых в $\frac{1}{3}$;

в) восьмых в $\frac{1}{4}$; г) десятых в $\frac{3}{2}$.

10. Найдите среднее арифметическое чисел 2,5 и $3\frac{5}{6}$.

11. Трехсерийный фильм шел по телевизору 5 ч. Первая и вторая серии длились $3\frac{9}{20}$ ч, а вторая и третья — $3\frac{1}{12}$ ч. Сколько времени шла каждая серия?

12. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее значение выражения $0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 6{,}75 : 0{,}3$.

13. Типография израсходовала $\frac{2}{5}$ всей бумаги, а если израсходует еще 26 т, то будет израсходовано 53 % всей бумаги. Найдите, сколько бумаги было в типографии первоначально.

14. Каток прямоугольной формы, длина которого 82 м и ширина 55 м, нужно очистить от снега. Сколько тонн снега нужно вывезти, если толщина снежного покрова 0,4 м и 1 $м^3$ снега весит 125 кг?

15. Используйте пропорциональную зависимость между величинами и решите задачу. Дорогу ремонтирует бригада из 15 человек. Они должны были выполнить работу за 12 дней. На пятый день утром пришли еще несколько рабочих, и оставшаяся работа была выполнена за 6 дней. Сколько рабочих прибыло дополнительно?

16. Расфасовали и отгрузили 0,9 т крупы, что составило 30 % всей крупы на складе. Сколько крупы нужно еще расфасовать и отгрузить, чтобы на складе осталось 18 % первоначально имевшейся крупы?

17. Площадь земельного участка прямоугольной формы 6 га. Какой будет площадь этого земельного участка на плане, если масштаб плана 1 : 5000?

18. Среднее арифметическое четырех чисел равно 35, а среднее арифметическое шестнадцати других чисел равно 25. Найдите среднее арифметическое этих двадцати чисел.

19. Один токарь может выполнить заказ за 15 ч, а другой — за 18 ч. Найдите, какая часть заказа останется невыполненной после 5 ч их совместной работы.

20. Одной бригаде, чтобы выполнить всю работу, нужно 10 дней, другой — на 2 дня больше, а третьей — в 1,5 раза больше, чем первой. Найдите, за какое время могут выполнить всю работу три бригады, работая совместно.

21. Необходимо собрать одинаковые комплекты, состоящие из ручек, карандашей и тетрадей. Найдите, какое наибольшее количество комплектов можно собрать из 182 ручек, 130 карандашей и 78 тетрадей, используя при этом все предметы.

22. Используйте определение степени с целым показателем и найдите значение выражения:

а) $\left(6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}$;

б) $\left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}\right):\left(0{,}5^{-2}+0{,}2^{-1}\right)$;

в) $\dfrac{0{,}5^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-2}+1^{0}}$.

23. Вычислите: $(3^{-1}+1{,}5^{-1}):5^{-2}-4{,}23^{0}+3\cdot 0{,}1^{-2}$.

24. Найдите значение выражения

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+0{,}125^{-2}.$$

25. Сравните с единицей значение выражения:

а) $-2\cdot(-3)^{2}$; б) $-(-2)^{-3}\cdot(-1)^{-4}$;

в) $\left(\frac{1}{6^{-2}}\right)^{-3}$; г) $(-2{,}4)^{0}$.

26. Используйте свойства степени с целым показателем и найдите значение выражения:

а) $2^{-8}\cdot 2^{7}$; б) $\frac{1}{16}\cdot 2^{-3}$;

в) $(-7)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-7}$; г) $5:5^{-1}$;

д) $0{,}25^{2}:0{,}25^{4}$; е) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right)^{2}$;

ж) $25^{-4}:5^{-7}$; з) $\frac{4^{-3}\cdot 4^{-5}}{4^{-11}}$;

и) $(-2{,}25)^{-5}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{-2}$; к) $125^{-3}:\left(0{,}2^{-4}\right)^{-2}$.

27. Определите порядок числа, представленного в стандартном виде: $3{,}27 \cdot 10^9$; $1{,}2058 \cdot 10^{-12}$; $6 \cdot 10^{15}$; $2{,}0006 \cdot 10^{-1}$.

28. Представьте в стандартном виде числа: $302 \cdot 10^{-6}$; $3687 \cdot 10^9$; $0{,}034 \cdot 10^{-8}$; $0{,}00057 \cdot 10^{12}$; $1428{,}33 \cdot 10^{-7}$; $650{,}123 \cdot 10^5$.

29. Из чисел $8\frac{11}{17}$; $\sqrt{5}$; $3{,}(2)$; $5{,}2$; $\sqrt{19}$; π выберите все рациональные числа. Какие из данных чисел можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби? Какому числовому множеству принадлежат все данные числа?

30. Вычислите:

а) $\sqrt{576} - 2\sqrt{49}$;

б) $\sqrt{5\frac{4}{9}} - \sqrt{7\frac{1}{9}}$;

в) $\sqrt{0{,}81} \cdot \sqrt{2{,}25} - \sqrt{3\frac{1}{16}}$.

31. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2$; б) $\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

32. Расположите числа $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$; 4 в порядке возрастания.

33. Используйте свойства арифметического квадратного корня и выберите выражение, имеющее наибольшее значение:

а) $\sqrt{313^2 - 312^2}$; б) $\sqrt{\frac{345}{233^2 - 112^2}}$;

в) $\frac{-2\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$; г) $\frac{\sqrt{51} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{68}}$.

34. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{12} - \sqrt{27} + 2\sqrt{75}$; б) $\left(3\sqrt{7} - \sqrt{28}\right) \cdot \sqrt{7}$;

в) $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} - 5\sqrt{\frac{3}{8}}\right) : \sqrt{1{,}5}$; г) $\left(2 - \sqrt{5}\right)^2$;

д) $\left(\sqrt{6} - 1\right)^2 + \sqrt{24}$; е) $\left(3 - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7} + 3\right)$.

35. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{3} - 1}$; в) $\frac{5}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

36. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{3}$; б) $-\frac{2}{3}\sqrt{45}$; в) $a\sqrt{2}$ при $a \geqslant 0$;

г) $b\sqrt{7}$ при $b < 0$; д) $y\sqrt{y}$; е) $-d\sqrt{-d}$.

37*. Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{-9a^3k^4}$.

38*. Выполните действия:

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$; б) $\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$.

39*. Значения каких выражений являются иррациональными числами:

а) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$; в) $\sqrt{21-12\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$?

40*. Найдите значение выражения

$$65 \cdot \left(\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{2}{63 \cdot 65}\right).$$

41*. Упростите выражение $\sqrt{17 - 4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

42. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $9 - 3\frac{3}{7} \cdot 7$; б) $18 : \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right)$;

в) $\left(1\frac{10}{21} - 4\frac{9}{21}\right) : 2$; г) $\left(1\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot 3\right) : (-10)$.

43. Выполните действия:

а) $(49{,}14 : 7 - 2{,}1) \cdot 0{,}1$; б) $(2 - 5{,}871 : 5{,}7) : 0{,}01$;

в) $2{,}5 \cdot 0{,}1 - \left(-7{,}4 + \frac{2}{5} : 1{,}6\right)$; г) $\left(-6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot 5 + 1{,}5 : 0{,}2$.

44. Используйте рациональные приемы счета и найдите значение выражения:

а) $\frac{18 \cdot 9{,}5 - 18 \cdot 7{,}5}{0{,}9 \cdot 2{,}6 + 0{,}9 \cdot 7{,}4}$;

б) $\left(5\frac{3}{7} \cdot 4{,}5 - 4\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{7}\right) : 0{,}18$;

в) $\left(1{,}67 \cdot 4{,}7 + 53 \cdot 0{,}167\right) \cdot 0{,}01$.

45. Из чисел 1; 2; 7; 12; 17; 27; 91; 102 выберите все составные числа.

46. Найдите НОД (12; 18) + НОК (15; 60).

47. Сравните значения выражений $\left(7-6\frac{5}{6}\right)\cdot\left(6-4\frac{4}{5}\right)$ и $7\cdot 6\frac{5}{6}-6\cdot 4\frac{4}{5}$.

48. Найдите среднее арифметическое чисел 3,5 и $2\frac{1}{6}$.

49. Ученик прочитал $\frac{1}{4}$ книги, а если он прочитает еще 77 страниц, то будет прочитано 69 % всей книги. Найдите, сколько всего страниц в книге.

50. Используйте пропорциональную зависимость между величинами и решите задачу. За 0,7 кг продуктов заплатили 8 р. 47 к. Сколько нужно заплатить за 1,5 кг таких же продуктов?

51. Сначала цена товара повысилась на 12 %, а через год новая цена понизилась на 12 %. Товар стал дешевле или дороже его первоначальной стоимости?

52. Среднее арифметическое восьми чисел равно 35, а среднее арифметическое двенадцати других чисел равно 25. Найдите среднее арифметическое этих двадцати чисел.

53. Один токарь может выполнить заказ за 10 ч, а другой — за 8 ч. Найдите, какая часть заказа останется невыполненной после 4 ч их совместной работы.

54. Первой бригаде, чтобы выполнить всю работу, нужно 10 дней, второй — на 5 дней больше, а третьей — в 1,2 раза больше, чем первой. Найдите, за какое время могут выполнить всю работу три бригады, работая совместно.

55. Необходимо собрать одинаковые комплекты, состоящие из ручек, карандашей и тетрадей. Найдите, какое наибольшее количество комплектов можно собрать из 238 ручек, 170 карандашей и 102 тетрадей, используя при этом все предметы.

56. Используйте определение степени с целым показателем и найдите значение выражения:

а) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot 3$; б) $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}-0{,}51^{0}\right):\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$;

в) $\dfrac{1{,}7^{0}-0{,}1^{-1}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\cdot 1{,}5^{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

57. Используйте свойства степени с целым показателем и найдите значение выражения:

а) $3 \cdot 3^{-4}$; б) $25 \cdot 5^{-3}$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-9} \cdot (-9)^{-9}$;

г) $9^{-4} : 9^{-5}$; д) $\frac{1}{3} : \left(\frac{1}{3}\right)^{5}$; е) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$;

ж) $4^{-9} : 16^{-4}$; з) $\frac{3^{-1} \cdot 3^{-5}}{3^{-9}}$; и) $\left(-1\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\right)^{4}$;

к) $32^{-2} : \left(0{,}5^{-3}\right)^{-3}$.

58. Запишите в стандартном виде число и найдите его порядок: 12 300 050; 17; 0,000158; 9 000 000; 7586,258; 13,2046; 0,125; 6 900 000.

59. Из чисел 5,(3); $\sqrt{7}$; –9,37; $2\frac{13}{19}$; $\sqrt{13}$; π выберите все иррациональные числа.

60. Вычислите:

а) $\sqrt{625} + 4\sqrt{64}$;

б) $\sqrt{10\frac{9}{16}} - \sqrt{11\frac{1}{9}}$;

в) $\sqrt{0{,}16} : \sqrt{0{,}25} - \sqrt{2\frac{7}{9}}$.

61. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(-\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$.

62. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $3\sqrt{8} - \sqrt{32} + 2\sqrt{50}$; б) $\left(5\sqrt{6} - \sqrt{24}\right)\sqrt{6}$;

в) $\left(3\sqrt{\frac{2}{7}} - 4\sqrt{\frac{7}{8}}\right) : \sqrt{3{,}5}$; г) $\left(\sqrt{3} + 6\right)^2$;

д) $\left(\sqrt{7} + 2\right)^2 - 2\sqrt{28}$; е) $\left(\sqrt{13} + 1\right)\left(1 - \sqrt{13}\right)$.

63. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{2} + 1}$; в) $\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

64. Внесите множитель под знак корня:

а) $7\sqrt{2}$; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$;

в) $a\sqrt{5}$ при $a \geqslant 0$; г) $b\sqrt{7}$ при $b < 0$.

65. Значения каких выражений являются рациональными числами:

а) $\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+1}$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)}$;

в) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{6}\right)^2$?

Выражения и их преобразования

66. Выберите верное равенство: $a^{-4}=-4a$; $a^{-4}=a^4$; $a^{-4}=-\frac{4}{a}$; $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$; $a^{-4}=-4a^{-1}$.

67. Среди дробей $\frac{1}{2ab}$; $\frac{2}{ab}$; $-\frac{1}{2ab}$; $\frac{2a}{b}$; $-\frac{b}{2a}$ выберите ту, которая является результатом упрощения выражения $2ab^{-1}$.

68. Выберите одночлен, записанный в стандартном виде: $2abbc$; $2m^4$; $-a\cdot\frac{1}{2}\cdot b$; $4-n$; $17a^2bca$.

69. Из чисел 3; 2; $\frac{1}{7}$; 3,5; −6 выберите число, входящее в область определения выражения $\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

70. Выберите верные равенства: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{2a}$; $\sqrt{2}+\sqrt{a}=\sqrt{2+a}$; $\sqrt{2}-\sqrt{a}=\sqrt{2-a}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{2}{a}}$.

71. Упростите выражение $\left(a^5\right)^{-2}\cdot\left(a^{-13}\right)^{-1}$.

72. Найдите значение выражения $-a^2+1$ при $a=5$.

73. Приведите одночлен $4ab^2abb^4a(-0{,}5)$ к стандартному виду.

74. Найдите разность многочленов $3x+1$ и $-3x^2-3x+1$.

75. Представьте в виде одночлена стандартного вида выражение:

а) $\left(-2a^2b\right)^3\cdot 3ab^4$;   б) $\left(-2m^5n\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}m^4\right)$.

76. Представьте в виде трехчлена выражение:

а) $-(a+5)(a-2)$;   б) $-(3x-2)(1-5x)$.

77. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2-7x+10$;   б) $2x^2-5x+2$.

78. Разложите двучлен $c^2 - 25$ на множители.

79. Преобразуйте в одночлен стандартного вида выражение $16a^5b^3c^2 : \left(-0{,}4a^4bc^2\right)$.

80. Разложите на множители:

а) $8a^2b^2 - 72a^2c^2$; б) $2a + 4b - ab - 2b^2$;

в) $4a^2 - b^2 + 2a - b$; г) $\left(y^2 + 4\right)^2 - 16y^2$.

81. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение:

а) $\left(-\frac{y}{3} - 0{,}5x\right)\left(0{,}5x - \frac{y}{3}\right)$; б) $(3a - 7b)^2 + 42ab$;

в) $(3a + b)(2a - 5b) - 6(a - b)^2$; г) $(n - 3)^2 - (n + 2)(n - 2)$.

82. Докажите, что при любом значении m значение выражения $(3 - m)(3 + m) - 10$ отрицательно.

83. Найдите, при каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

а) $\frac{x - 5}{2x + 14}$; б) $\frac{5n}{n^2 - 4n}$.

84. Выполните действия:

а) $\frac{a}{5} - \frac{b}{5} - \frac{a + b}{5}$; б) $14m^2 \cdot \frac{2n^3}{7m^6}$;

в) $\frac{12x^5y^2}{z^3} : \left(6x^4y^6\right)$; г) $\left(-\frac{3x^2y^4}{m^3}\right)^4$.

85. Найдите сумму и разность дробей $\frac{3}{a^2 - b^2}$ и $\frac{3}{(a - b)^2}$.

86. Верно ли, что дробь $\frac{(x - 3y)^2}{x^2 - 9y^2}$ можно сократить на $3y - x$? Какая дробь получится?

87. Сократите дробь:

а) $\frac{1 - x^2}{5 - 5x}$; б) $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 - 9b^2}$.

88. Найдите значение выражения $\frac{25a^2 - 1}{30ab - 6b}$ при $a = 7$, $b = 6$.

89. Сократите дробь $\frac{x^2 - 4x + 4}{(x + 5)^2 - 49}$.

90. Выполните действия:

а) $\frac{4x^2}{x - 3} - 4x$; б) $\frac{a}{a - b} + \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a}{a + b}$; в) $\frac{7x^2}{3 - x} \cdot \frac{x^2 - 9}{14x^3}$.

91. Выполните действия: $\frac{x^2-5x+4}{x-1}+\frac{x^2+4x+3}{x+1}$.

92. Установите порядок действий и упростите выражение:

а) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\cdot\frac{x-y}{2y}$;

б) $\frac{7}{3x-1}-\frac{5}{2x-1}:\frac{3x-1}{4x^2-1}$;

в) $\left(\frac{x+4}{3x+3}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{3}{x+1}-\frac{2}{1-x^2}$;

г) $\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right)\cdot\frac{1-5a}{a^2+5a}+\frac{a^2+5}{a+1}$.

93. Докажите, что при всех действительных значениях переменных значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+p^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{p}-p\right)-\frac{1}{p}$; б) $\left(\frac{2a+6}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}\right):\frac{2a+2}{a^2-a}$.

94. Упростите выражение

$$\left(\frac{5c^2-c}{25c^2-10c+1}+\frac{4}{1-25c^2}\right):\left(1-\frac{3}{5c-1}\right)-\frac{c}{5c+1}.$$

95. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)^2-6\sqrt{xy}$; б) $8\sqrt{\frac{a}{16}}-3\sqrt{\frac{a}{9}}$.

96. Сократите дробь $\frac{6-a^2}{a^2-2a\sqrt{6}+6}$.

97. Упростите выражение $-2\cdot\sqrt{0{,}64x^2}$, если $x\leqslant 0$.

98. Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt{72n^8m^6}$ при $m<0$.

99*. Внесите множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{-2a}$.

100*. Представьте произведение $10^{-n}\cdot 0{,}0125^{-n}\cdot 128^{n+1}$ в виде степени с основанием 2.

101*. Докажите, что при любом натуральном значении переменной значение выражения $(n+5)(n-6)-(n-2)(n+15)$ кратно 14.

102*. Найдите значение выражения $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$, если $b:a=1:2$.

103*. Разложите на множители:

а) $(3x-a)y^2-4(a-3x)y-4a+12x$;

б) $(xy+y^2)(x^2+4x)-(x^2+xy)(y^2+4y)$;

в) $2a^2-20ab+50b^2-2$;

г) $(b^2+16)^2-64b^2$;

д) $(5-x)(5+x)-a(a-2x)$.

104*. Упростите выражение $\frac{4^{n+2}-4^n}{15^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{12^{-n}}$, где $n\in N$.

105*. Упростите выражение:

а) $\frac{x}{a-3}\sqrt{a^2-6a+9}$, если $a<2{,}1$;

б) $\frac{y}{b+5}\sqrt{b^2+10b+25}$, если $b<-6{,}8$.

106*. Внесите множитель под знак корня:

а) $\frac{1}{3x}\sqrt{-27x}$; б) $(m-n)\sqrt{\frac{n-m}{7}}$.

107*. Упростите выражение $\frac{x^2+x\sqrt{2}}{x^2+2}\cdot\left(\frac{x}{x-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)$.

108*. Представьте сумму $2\cdot16^n+2^n\cdot8^n+2^{4n}$ в виде степени с основанием 2.

109*. Докажите, что значение выражения $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$ кратно 14 при $n\in N$.

110*. Одно из двух натуральных чисел при делении на 7 дает остаток 2, а другое — остаток 5. Найдите, какой остаток получится при делении на 7 удвоенного произведения этих чисел.

111*. Известно, что $a^2+b^2=7$. Найдите значение выражения $2(a+1)(b+1)-(a+b)(a+b+2)$.

112*. Найдите наименьшее значение выражения $8x^2+2y^2-4xy+4x+2y+3$ и значения переменных, при которых оно достигается.

113*. Разложите на множители:

а) $81n^4+4$; б) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$.

114*. Найдите значение выражения $(x-b+1)^2+2(b-x-1)(x+b+1)+(x+b+1)^2$ при $b=0{,}4$ и $x=-4{,}019$.

115*. Вычислите значение дроби $\frac{a}{b}$, если $\frac{5a^2-10ab+2b^2}{ab-2a^2-b^2}=2$.

116*. Найдите значение выражения $\frac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$, если $x=3+\sqrt{5}$; $y=3-\sqrt{5}$.

117*. Упростите выражение

$$\frac{1}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+8)}.$$

118*. Упростите выражение

$$\left(\frac{3{,}6xy+2{,}1y^2}{1{,}44x^2-0{,}49y^2}+\frac{2x}{2{,}4x-1{,}4y}\right)\cdot\frac{12x^2-7xy}{x+3y}.$$

119*. Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt{a^2+3+2\sqrt{3}a}}$ при $a=-\sqrt{3}-0{,}25$.

120*. Сократите дробь $\frac{x+6\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}+1}$.

121*. Упростите выражение

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

122. Выберите верное равенство: $b^{-3}=-\frac{3}{b}$; $b^{-3}=-3b$; $b^{-3}=\frac{1}{b^3}$; $b^{-3}=3b^{-1}$; $b^{-3}=b^3$.

123. Среди дробей $-\frac{n}{3m}$; $\frac{3}{mn}$; $\frac{3m}{n}$; $\frac{1}{3mn}$; $-\frac{1}{3mn}$ выберите ту, которая является результатом упрощения выражения $3mn^{-1}$.

124. Выберите одночлен, записанный в стандартном виде: $m\cdot\frac{2}{3}\cdot n$; $6-a$; $9xb^2xc$; $7b^5$; $3bcdd$.

125. Из чисел -6; 1; 2; $\frac{1}{3}$; $2{,}5$ выберите число, входящее в область определения выражения $\frac{1}{\sqrt{3x-6}}$.

126. Выберите верные равенства: $\sqrt{3+b}=\sqrt{3}+\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{3}{b}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{3b}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{b}$; $\sqrt{3-b}=\sqrt{3}-\sqrt{b}$.

127. Упростите выражение $\left(a^{-2}\right)^{-4}\cdot\left(a^2\right)^{-3}$.

128. Найдите значение выражения $-b^2-3$ при $b=2$.

129. Приведите одночлен $0{,}3a^2bab^4a^2(-4)$ к стандартному виду.

130. Найдите разность многочленов $-5y+2$ и $5y^2-5y-2$.

131. Выполните действия:

а) $\left(-3mn^2\right)^3 \cdot 2mn^2$; б) $\left(-3a^4b\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^5\right)$.

132. Представьте в виде трехчлена выражение:

а) $-(x-3)(x+2)$; б) $-(6a-1)(2-3a)$.

133. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2-10x+16$; б) $3x^2-10x+3$.

134. Разложите двучлен d^2-36 на множители.

135. Найдите, при каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

а) $\frac{y-9}{3y+15}$; б) $\frac{2m}{m^2-5m}$.

136. Выполните действия:

а) $\frac{m}{7}+\frac{n}{7}-\frac{m-n}{7}$; б) $18a^3 \cdot \frac{5b^2}{9a^6}$;

в) $\frac{14m^6n^3}{k^4} : \left(7m^2n^5\right)$; г) $\left(-\frac{2x^3y^2}{a^4}\right)^6$.

137. Найдите сумму и разность дробей $\frac{1}{xy-y^2}$ и $\frac{1}{xy+y^2}$.

138. Представьте в виде дроби выражение:

а) $\left(2a^{-2}b^3\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-6}$; б) $\left(\frac{5a^{-2}}{6b^{-1}}\right)^{-2} : \frac{1}{10a^3b^4}$;

в) $\frac{28a^2}{27x^3} \cdot \left(-\frac{63x^4}{150a}\right) : \frac{49a^2}{25x^3}$; г) $\frac{\left(-1{,}5x^2y\right)^3\left(2xy^3\right)^4}{\left(6x^3y^2\right)^2}$.

139. Представьте в виде дроби выражение:

а) $\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-1} \cdot \left(x^{-1}y\right)^3$; б) $\left(\frac{5x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2} : \frac{1}{15x^3y}$;

в) $\frac{45m^3}{49p^2} \cdot \left(-\frac{56p^2}{27m^2}\right) : \frac{3m}{p}$; г) $\frac{\left(-0{,}5xy^3\right)^2\left(2x^2y\right)^3}{\left(\frac{1}{3}x^5y^3\right)^2}$.

140. Преобразуйте в одночлен стандартного вида выражение $24a^2b^5c^3 : \left(-0{,}8a^2b^4c\right)$.

141. Разложите многочлен на множители:

а) $5m^2n^2-80m^2y^2$; б) $3m-6n+mn-2n^2$;

в) a^2-9b^2+a+3b; г) $\left(x^2+9\right)^2-36x^2$.

142. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение:

а) $\left(-\frac{a}{7}-0{,}4b\right)\left(0{,}4b-\frac{a}{7}\right)$;

б) $(5a+7b)^2-70ab$;

в) $(2m-3n)(5m+n)-10(m+n)^2$;

г) $(m+2)^2-(m-3)(m+3)$.

143. Докажите, что при любом значении y значение выражения $(y+2)(y-2)+5$ положительно.

144. Сократите дробь $\frac{y^2+14y+49}{(y+3)^2-16}$.

145. Выполните действия:

а) $\frac{2x^2}{x-1}-2x$;

б) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b-a}$;

в) $\frac{6x^3}{x-5}\cdot\frac{25-x^2}{18x^2}$.

146. Упростите выражение:

а) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}$;

б) $5\sqrt{\frac{b}{25}}-18\sqrt{\frac{b}{36}}$.

147. Выполните действия $\frac{x^2+5x+4}{x+1}-\frac{x^2-4x+3}{x-1}$.

148. Выполните действия:

а) $\frac{2ab}{a^2-b^2}:\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right)$;

б) $\frac{6}{2x+3}-\frac{5}{2x+1}:\frac{2x+3}{4x^2-1}$;

в) $\left(\frac{x+10}{5x+25}-\frac{1}{x+5}\right)\cdot\frac{5}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}$;

г) $\left(\frac{b-3}{7b-4}-\frac{b-3}{b-4}\right)\cdot\frac{7b-4}{9b-3b^2}+\frac{b^2-14}{4-b}$.

149. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a}$;

б) $\left(\frac{1}{x^2+x}-\frac{x}{x+1}\right):(1-x)-\frac{1}{x}$.

150. Упростите выражение

$$\left(\frac{16a^2-24a+9}{9-16a^2}+\frac{1}{4a^2+3a}\right)\cdot\left(4+\frac{7}{a-1}\right)+\frac{1}{a}.$$

151. Сократите дробь $\frac{m^2-2m\sqrt{3}+3}{3-m^2}$.

152. Упростите выражение $-3\cdot\sqrt{0{,}25y^2}$, если $y\leqslant 0$.

153. Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt{50a^4b^{10}}$ при $b<0$.

154*. Внесите множитель под знак корня в выражении $b\sqrt{-5b}$.

155*. Представьте произведение $0{,}0004^{-n}\cdot125^{n+3}\cdot100^{-n}$ в виде степени с основанием 5.

156*. Докажите, что при любом натуральном значении переменной значение выражения $(n-1)(n+12)-(n-3)(n+4)$ кратно 10.

157*. Найдите значение выражения $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy-y^2}$, если $x:y=1:2$.

158*. Разложите на множители:

а) $(2a-3b)x^2-6(3b-2a)x+18a-27b$;

б) $\left(ab+b^2\right)\left(a^2+6a\right)-\left(a^2+ab\right)\left(b^2+6b\right)$;

в) $3n^2+12m^2+12mn-12$;

г) $\left(a^2+1\right)^2-4a^2$;

д) $(4-y)(4+y)-b(b-2y)$.

159*. Упростите выражение $\frac{7^{n+1}+7^n}{8^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{28^{-n}}$, где $n\in N$.

160*. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{16a^2}$ при $a<0$, $b>0$;

б) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{9b^2}$ при $a>0$, $b<0$.

161*. Внесите множитель под знак корня:

а) $\frac{2}{x}\sqrt{-\frac{x}{8}}$; б) $(a-b)\sqrt{\frac{b-a}{5}}$.

162*. Упростите выражение $\left(\frac{x}{x-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right):\frac{x^2+3}{x^2-x\sqrt{3}}$.

163*. Представьте сумму $9^{3m}+9^m\cdot81^m+27^{2m}$ в виде степени с основанием 3.

164*. Докажите, что значение выражения $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ кратно 39 при $n \in N$.

165*. Одно натуральное число при делении на 5 дает остаток 4, а другое — остаток 3. Найдите, какой остаток получится при делении на 5 произведения суммы и разности этих чисел.

166*. Известно, что $m^2 + n^2 = 7$. Найдите значение выражения $2(m-1)(n+1) + (m-n)(m-n-2)$.

167*. Найдите наименьшее значение выражения $5x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x + 4y + 7$ и значения переменных, при которых оно достигается.

168*. Разложите на множители:

а) $n^4 + 324$; б) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$.

169*. Найдите значение выражения

$$(y - c + 3)^2 + 2(c - y - 3)(y + c + 3) + (y + c + 3)^2$$

при $c = 0{,}2$ и $y = -8{,}029$.

170*. Вычислите значение дроби $\frac{m}{n}$, если

$$\frac{4m^2 + 3mn + 3n^2}{m^2 - mn - 2n^2} = 3.$$

171*. Найдите значение выражения $\frac{x^2 - 6xy + y^2}{x + y - 6}$, если $x = 5 + \sqrt{7}$; $y = 5 - \sqrt{7}$.

172*. Упростите выражение

$$\frac{1}{b(b+3)} + \frac{1}{(b+3)(b+6)} + \frac{1}{(b+6)(b+9)} + \frac{1}{(b+9)(b+12)}.$$

173*. Упростите выражение

$$\left(\frac{a}{0{,}5a + 1} + \frac{\frac{2}{3}a}{2 - a} + \frac{2a}{\frac{1}{4}a^2 - 1}\right) \cdot \frac{0{,}5a - 1}{0{,}5a - 2}.$$

174*. Найдите значение выражения $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 7 - 2\sqrt{7}a}}$ при $a = \sqrt{7} - 0{,}125$.

175*. Сократите дробь $\frac{x + 6\sqrt{x-2} + 6}{\sqrt{x-2} + 4}$.

176*. Упростите выражение

$$\frac{1}{1 + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{5n-4} + \sqrt{5n+1}}.$$

Функции и их свойства

177. Выберите функцию, графиком которой является прямая:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{51}{x}$;

г) $y = \frac{2}{3}x$; д) $y = 4x^2 - 1$.

178. Обратной пропорциональностью является функция:

а) $y = 4x - \frac{1}{3}$; б) $y = \frac{x}{5}$; в) $y = \frac{1}{4}x$;

г) $y = \frac{10}{x}$; д) $y = x^3$.

Выберите правильный ответ.

179. На рисунке 97, *а* изображен график функции $y = kx + b$. Среди рисунков 97, *б*—*г* выберите тот, на котором изображен график функции $y = -b$.

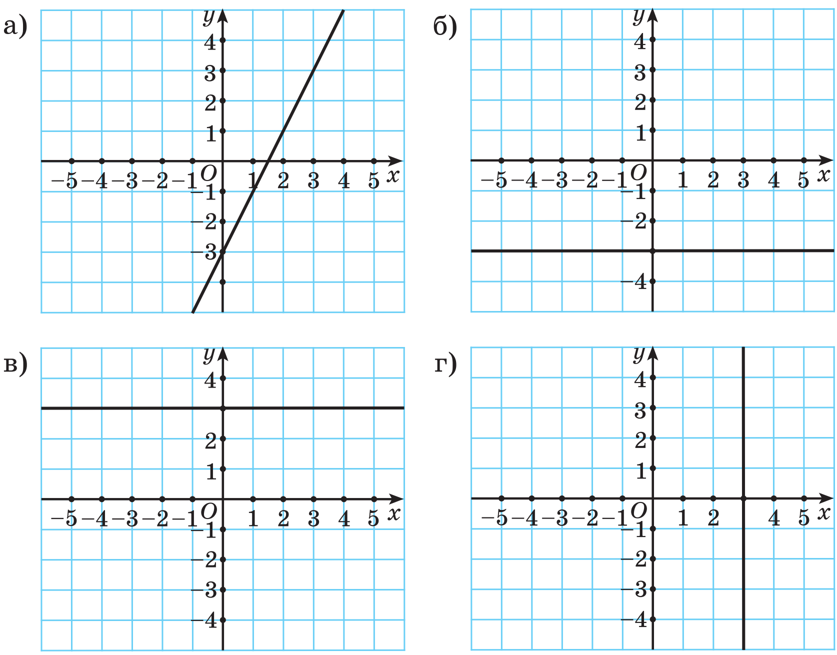


Рис. 97

180. Из точек $A\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right)$; $B\left(20; 2\sqrt{5}\right)$; $C\left(\frac{1}{25}; \frac{1}{5}\right)$; $D(0{,}1;\ 0{,}01)$ выберите все точки, принадлежащие графику функции $y = \sqrt{x}$.

181. Найдите, если это возможно, $f(3)$ для функции:

а) $f(x) = x - 3$; б) $f(x) = -x^2 + 2$;

в) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2x$; г) $f(x) = 8 - \frac{1}{2x-6}$.

182. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 10:

а) $y = 15x + 1$; б) $y = x^2 - 9x$;

в) $y = \frac{5}{x}$; г) $y = \sqrt{x-2}$.

183. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ 1)$ и параллельной прямой $y = 2x - 3$.

184. Функция задана словесным описанием: каждому положительному целому числу соответствует наименьшее натуральное число, а каждому отрицательному целому числу — наибольшее целое отрицательное число. На рисунке 98 выберите график этой функции.

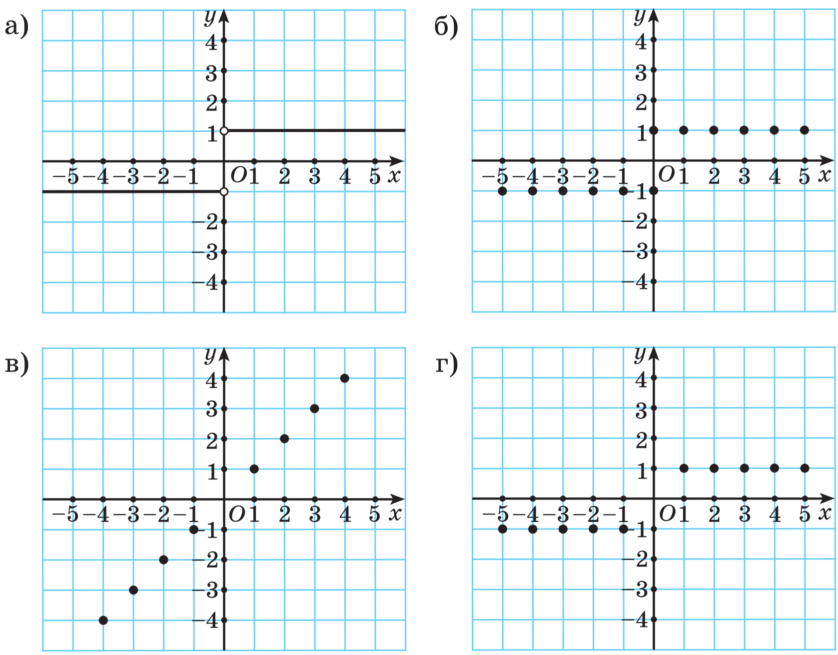


Рис. 98

185. Найдите область определения функции:

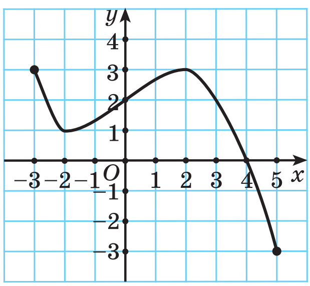
а) $f(x) = 2x + 4$; б) $f(x) = \frac{1}{x-8}$;

в) $f(x) = \sqrt{7-3x}$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9x+1}}$;

д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8x-1}} + \sqrt{5-x}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{30-x-x^2}}$;

ж) $y = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} + \sqrt{x^2+4x}$.

186. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 99). Найдите ее множество значений.

а) 

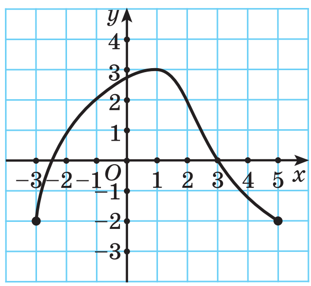
б) 

Рис. 99

187. Найдите нули функции:

а) $y = \frac{2x+7}{x-5}$; б) $y = \frac{10}{x^2-4}$;

в) $y = x^2 - 2x + 4$; г) $y = 2|x| - 5$;

д) $y = 36x^4 - 13x^2 + 1$; е) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}$;

ж) $y = \frac{3}{x^2} + 1$.

188. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = 2x - 7$; б) $y = x^2 - 7x + 6$; в) $y = \frac{2x-1}{x+5}$.

189. О функции $y = f(x)$ известно следующее:

1) она определена на множестве действительных чисел;

2) она не является ни четной, ни нечетной;

3) график функции пересекает ось ординат в точке $(0; 1)$;

4) нулями функции являются числа -3; 1 и 6;

5) $y > 0$ при $x \in (-3; 1) \cup (6; +\infty)$;

б) функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[3; +\infty)$.

На рисунке 100 выберите график, соответствующий такой функции.

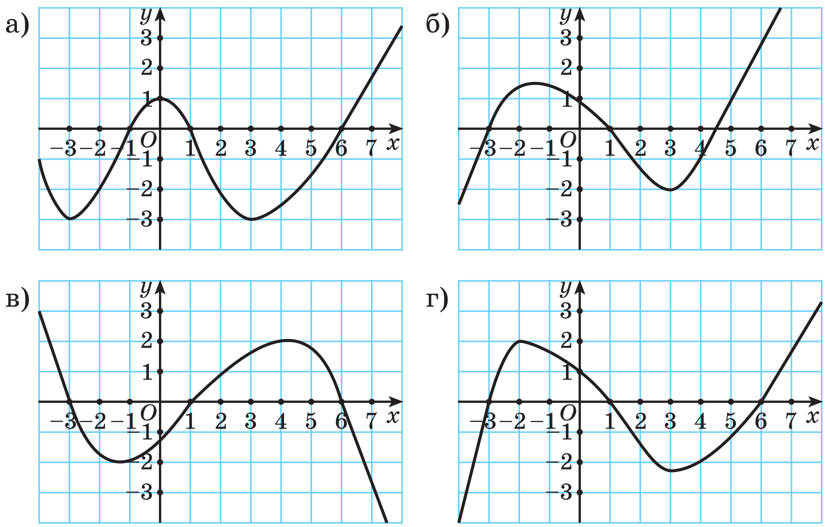


Рис. 100

190. Известно, что функция $y = f(x)$ убывает на множестве действительных чисел и $f(5) = 4$. Выберите верное утверждение:

а) $f(6) > 4$; б) $f(-5) < -4$; в) $f(10) > 8$;

г) $f(0) > 4$; д) $f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{4}$.

191. Найдите третий член геометрической прогрессии, если известно, что ее пятый член равен 0,5, а знаменатель прогрессии равен 0,5.

192. Сумма 12 первых членов арифметической прогрессии равна 198. Ее первый член равен 33. Найдите разность этой прогрессии.

193*. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, сумма первых шести членов которой составляет $\frac{7}{8}$ суммы всех ее членов.

194. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = (x - 1)(x - 3)$;

в) $y = x^2 + 4x + 6$; г) $y = x^2 - 6x + 9$;

д) $y = -3x^2 + 6x$; е) $y = x^2 - 9$.

Для каждой функции найдите:

1) область определения;

2) координаты вершины параболы;

3) множество значений;

4) наибольшее (наименьшее) значение;

5) ось симметрии параболы;

6) промежутки монотонности;

7) нули;

8) промежутки знакопостоянства;

9) координаты точки пересечения графика функции с осью ординат.

195. Найдите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 + 7x - 1$; б) $y = (x - 3)^2 + 7$;

в) $y = -2x^2 + 12x + 5$; г) $y = -3x^2 + 5$.

196. Найдите множество значений функции:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$; б) $y = 4(x - 1)^2 - 3$;

в) $y = -3x^2$; г) $y = 4 - x^2$;

д) $y = -(x - 9)^2$; е) $y = (2 - x)(x + 6)$.

197. Известно, что ось симметрии некоторой параболы проходит через точку $A\left(-\sqrt{3}; 2\right)$. Найдите абсциссу вершины этой параболы.

198. Найдите ось симметрии параболы:

а) $y = -x^2 - x + 3$; б) $y = 7 + 5(x - 4)^2$; в) $y = -7x^2 + 2$.

199. Найдите промежуток возрастания функции:

а) $y = 3x^2 + 18x - 1$;

б) $y = -(x - 3)^2 + 1$;

в) $y = (2x - 1)(x + 3)$.

200. Найдите промежуток убывания функции:

а) $y = 12 - \frac{1}{6}\left(x + 4\right)^2$;

б) $y = x^2 - 6$;

в) $y = (3 - x)(2x + 1)$.

201. Найдите нули функции, если они есть:

а) $y = -3x^2 + 10x - 3$; б) $y = \frac{1}{5}\left(x - 7\right)^2 - 5$;

в) $y = x^2 - 9x + 1$; г)* $y = x^2 - \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{14}$.

202. На рисунке 101 изображен график функции $y = 4x^2 - 11x + 6$. Найдите координаты точки N.

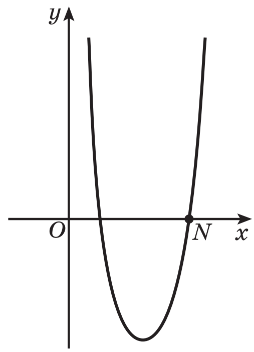


Рис. 101

203. Нулями квадратичной функции являются числа –6 и 8. Найдите абсциссу вершины параболы.

204. Найдите ординату точки пересечения с осью Oy графика функции:

а) $y = -5x^2 + 7x - 6$;

б) $y = (x - 7)(x + 2)$;

в) $y = (x - 3)^2 + 7$.

205. График некоторой функции получен из графика функции $y = -x^2$ смещением его на три единицы вправо вдоль оси абсцисс и на четыре единицы вверх вдоль оси ординат. Найдите значение функции при $x = -9$.

206. В одной системе координат постройте графики функций $y = -x^2 + 6x - 5$ и $y = 4$. Найдите координаты их общей точки. Проверьте полученный результат.

207. Найдите координаты общих точек графиков функций $y = 2x^2 - 2$ и $y = x^2 + 4x + 3$.

208. Выберите функцию, график которой получен из графика функции $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, смещением его на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единицы вверх вдоль оси ординат:

а) $y = \frac{k}{x+2} + 3$; б) $y = \frac{k}{x-2} + 3$;

в) $y = \frac{k}{x+3} - 2$; г) $y = \frac{k}{x+2} - 3$;

д) $y = \frac{k}{x-3} + 2$.

209. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке 102:

а) $y = |x + 2| + 1$;

б) $y = -|x - 2| - 1$;

в) $y = |x - 2| - 1$;

г) $y = |x + 2| - 1$;

д) $y = |x - 1| - 2$.

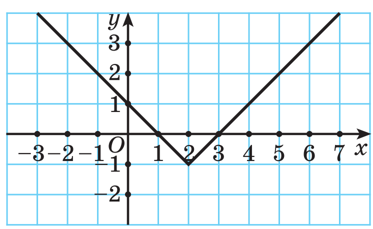


Рис. 102

210. Среди рисунков 103, *а—г* выберите график четной функции.

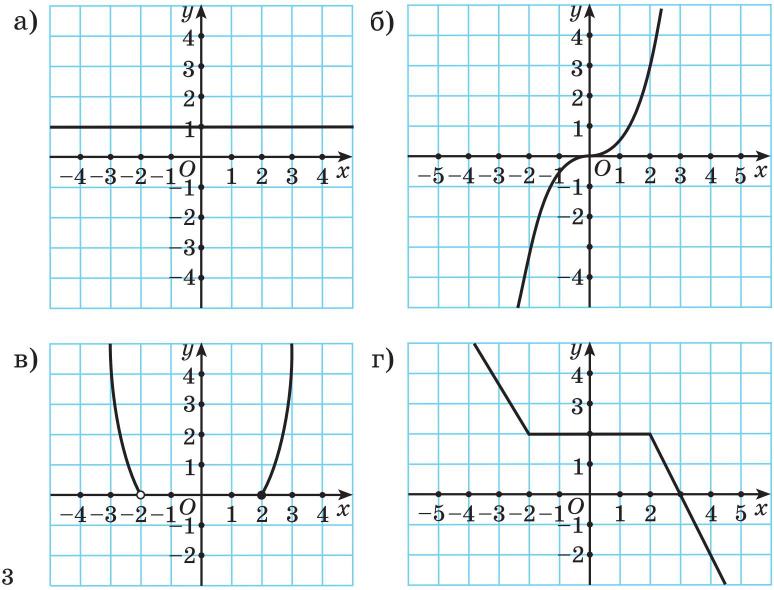


Рис. 103

211. Исследуйте функцию на четность:

а) $y = -2x^3$; б) $y = \frac{|x|}{x}$; в) $y = -\sqrt{x}$;

г) $y = -3|x| + 1$; д)* $y = |x - 1| + |x + 1|$.

212. Функция $y = f(x)$ четная. Известно, что $f(x) = x^3$ при $x \leqslant 0$. Найдите $f(2)$.

213. Найдите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$;

б) $x^2 + (y + 7)^2 = 18$.

214. Найдите расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 = 2$ и $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 18$.

215. Запишите уравнение окружности, которая симметрична окружности, изображенной на рисунке 104, относительно прямой $y = -10$.

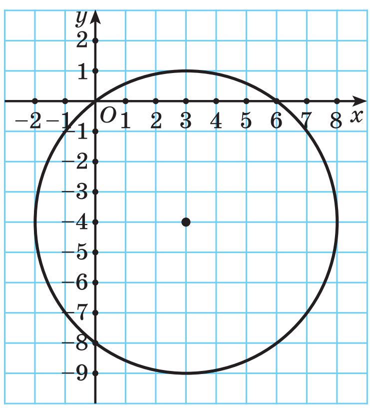


Рис. 104

216. На окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, найдите точки:

а) с абсциссой –4;

б) с ординатой 1.

217. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы на отрезке [–6; 7] графиками (рис. 105). Найдите все значения x, при которых верно неравенство $f(x) \geqslant g(x)$.

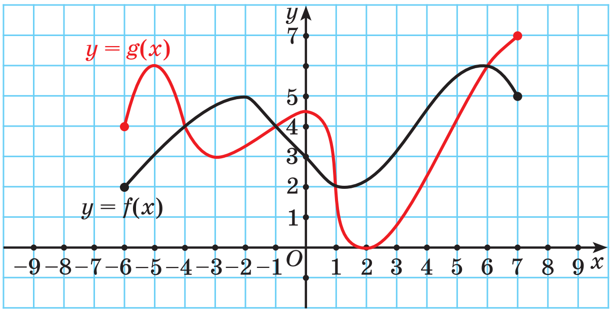


Рис. 105

218. Выберите функцию, графиком которой является гипербола:

а) $y = -\frac{4}{7x}$; б) $y = -\frac{4x}{7}$; в) $y = \frac{7x}{4}$;

г) $y = x - \frac{7}{4}$; д) $y = -\frac{4}{7}$.

219. На рисунке 106 изображен график функции вида $y = kx + b$. Выберите верное утверждение:

а) $k > 0$; $b > 0$; б) $k > 0$; $b < 0$;

в) $k = 0$; $b > 0$; г) $k < 0$; $b > 0$;

д) $k < 0$; $b < 0$.

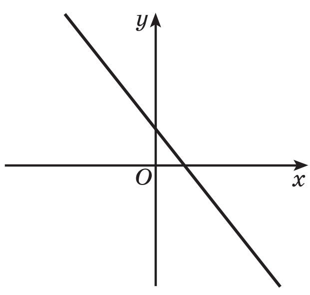


Рис. 106

220. Выберите функцию, графику которой принадлежит точка $K(-10; 1)$:

а) $y = -10x$; б) $y = -x + 1$;

в) $y = -\frac{10}{x}$; г) $y = x - 11$;

д) $y = x^2 + 99$.

221. Найдите, если это возможно, $f(5)$ для функции:

а) $f(x) = 2x + 6$; б) $f(x) = 4 - x^2$;

в) $f(x) = \sqrt{3 - x} - 1$; г) $f(x) = \frac{x + 7}{2x - 5}$.

222. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 25:

а) $y = 7x - 3$; б) $y = x^2 - 24x$;

в) $y = -\frac{10}{x}$; г) $y = \sqrt{x}$.

223. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \frac{1}{x + 5}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6 - x}}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 36}$; г) $f(x) = \sqrt{x - 5} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x}}$.

224. Найдите нули функции:

а) $y = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$; б) $y = x^2 - 2x + 1$;

в) $y = x^4 - 6x^2 + 8$; г) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

225. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = 9 - 5x$; б) $y = 2x^2 - 5x + 3$; в) $y = \frac{x - 3}{x + 2}$.

226. а) В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{8}{x}$, $y = \sqrt{x}$ и $y = 2x$.

б) С помощью построенных графиков решите уравнение:

1) $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$; 2) $\frac{8}{x} = 2x$.

в) С помощью построенных графиков решите неравенство:

1) $\frac{8}{x} \geqslant \sqrt{x}$; 2) $\frac{8}{x} > 2x$.

227. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 = 8$; $d = 3$. Найдите количество членов этой прогрессии, являющихся двузначными числами.

228. Найдите наибольшее значение переменной x, при котором числа $\frac{x}{2}$; $\frac{x^2 + 3}{2}$; $2{,}5x + 1$ будут последовательными членами арифметической прогрессии.

229. Между числами 1 и 81 расположили три числа так, что вместе с данными числами они образовали геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии.

230. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = (x - 7)(x - 1)$;

в) $y = x^2 + 2x + 3$; г) $y = x^2 - 4x + 4$;

д) $y = x^2 - 6x$; е) $y = -x^2 + 9$.

Для каждой функции найдите:

1) область определения;

2) координаты вершины параболы;

3) множество значений;

4) наибольшее (наименьшее) значение;

5) ось симметрии параболы;

6) промежутки монотонности;

7) нули;

8) промежутки знакопостоянства;

9) координаты точки пересечения графика функции с осью ординат.

231. Найдите координаты вершины параболы:

а) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 9$; б) $y = -2(x + 5)^2 - 8$;

в) $y = -3x^2 - 15x + 1$; г) $y = -4x^2 + 1$.

232. Найдите множество значений функции:

а) $y = x^2 - 8x + 17$; б) $y = -2(x - 7)^2 + 6$;

в) $y = x^2 + 9$; г) $y = -(x + 1)^2$.

233. Найдите ось симметрии параболы:

а) $y = -3x^2 - 5x + 3$; б) $y = 9 - 4(x + 2)^2$; в) $y = x^2 - 1$.

234. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = -2x^2 + 8x - 3$; б) $y = (x - 7)^2$;

в) $y = (4 - x)(x + 3)$.

235. Найдите нули функции, если они есть:

а) $y = -x^2 + 6x - 8$; б) $y = -x^2 - 8$;

в) $y = x^2 + 4x - 21$; г) $y = x^2 + \frac{x}{3}$.

236. Найдите ординату точки пересечения с осью Oy графика функции:

а) $y = x^2 + 4x - 16$; б) $y = (8 - x)(x + 1)$;

в) $y = (x - 1)^2 - 5$.

237. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = -2x + 11$, найдите координаты их общих точек.

238. Среди рисунков 107, *а—г* выберите график нечетной функции.

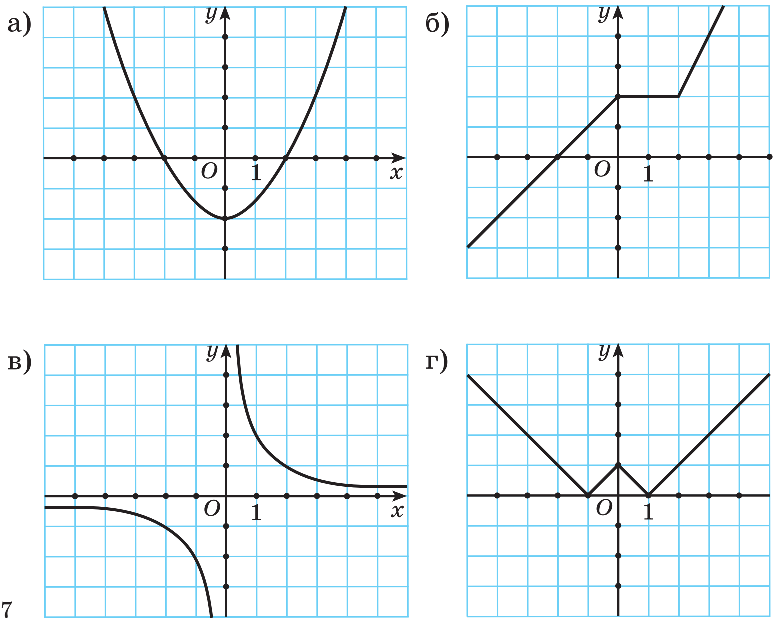


Рис. 107

239. Найдите координаты центра и радиус окружности:

а) $(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 36$; б) $(x - 7)^2 + y^2 = 32$.

240. В одной системе координат постройте окружности, заданные уравнениями

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4 \quad \text{и} \quad (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49.$$

241. Запишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $B(-1;\ 3)$.

242. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы на отрезке $[-7;\ 6]$ графиками (рис. 108). Найдите все значения x, при которых верно неравенство $f(x) < g(x)$.

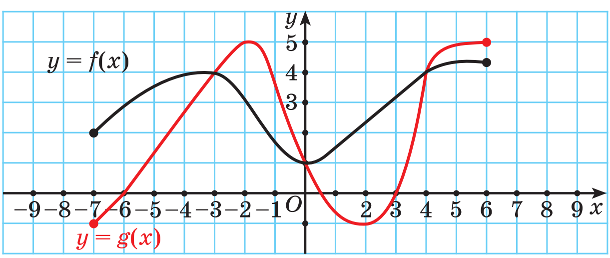


Рис. 108

Уравнения, неравенства, системы

243. Из уравнений:

1) $2x = 0$; 2) $3 - x = 5 - x - 2$;

3) $7x - 2 = 6x + 3$; 4) $\frac{1}{2}x - 5 = 0,5 + 2$;

5) $9x = 9x + 4$; 6) $\frac{1}{4}x + 2 = 2 + 0,25x$ —

выпишите уравнения:

а) имеющие один корень;
б) не имеющие корней;
в) у которых корень — любое число.

244. Решите уравнение:

а) $23 - 3(x - 3) = 4x - 3$;

б) $10x - 5(4x + 3) = 3x - 2(7x - 2)$;

в) $\frac{3x+6}{2} - \frac{7x-14}{3} = \frac{x+1}{9}$;

г) $\frac{3+3x}{4} - \frac{x+6}{4} - 1 = \frac{8x-3}{6}$.

245. Решите неравенство:

а) $7x - 3 > 11$;

б) $2(x + 3) < 3 - x$;

в) $(x - 1)(2x - 2) \leqslant (2x - 1)(x + 2)$;

г) $(x - 3)(x + 2) - (x - 3)^2 \geqslant 15x - 10$.

246. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x-2}{5} - \frac{3x+2}{6} \leqslant \frac{2}{3} - x.$$

247. Найдите, при каких значениях переменной значение дроби $\frac{3y-5}{6}$ не больше значения разности дробей $\frac{3-y}{9}$ и $\frac{6y-7}{15}$.

248. Найдите нули функции:

а) $f(x) = 5x - 10$; б) $f(x) = -x + 2$; в) $f(x) = -2x + 4$.

249. Найдите значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения:

а) $y = 2x - 7$; б) $y = -6x + 2$; в) $y = (x - 1)^2 - (x + 2)^2$.

250. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x - 12 \geqslant 11x, \\ 1 - 5x > 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5 - \frac{x-1}{2} \geqslant 3, \\ 1 + \frac{4x}{3} < 7. \end{cases}$

251. Решите двойное неравенство:

а) $-1 \leqslant 5 - 2x < 3;$ б) $2 < \frac{5x+1}{3} \leqslant 10.$

252. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 4x - 7 \leqslant 5x - 1, \\ 5x + 4 \leqslant 2x + 10; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{3} > 2 - x, \\ 7x - 15 > 0. \end{array}\right.$

253. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} y = x - 1, \\ 5x + 2y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 6x - y = 7. \end{cases}$

254. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7y - 5x = 6, \\ 7y + 2x = 76. \end{cases}$

255. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3(x + y) = 6, \\ 6 - 5(x - y) = 8x - 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3(2y + 1) = 15, \\ 3(x + y) + 3y = 2y - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2x-y}{6} + \frac{2x+y}{9} = 3, \\ \frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{4} = 4. \end{cases}$

256. Решите неполное квадратное уравнение:

а) $4x^2 - 5x = 0;$ б) $3x^2 - 27 = 0;$ в) $\frac{1}{6}x^2 + 2x = 0;$

г) $x^2 = 7;$ д) $x^2 + 8 = 8 - 3x;$ е) $28 + x^2 = 12.$

257. Воспользуйтесь формулой корней квадратного уравнения и решите уравнение:

а) $x^2 - 10x + 16 = 0;$ б) $3x^2 + 4x + 1 = 0;$

в) $9x^2 + 6x + 1 = 0;$ г) $8x^2 - 5x + 1 = 0.$

258. Решите уравнение:

а) $(x + 6)(x + 1) = -6;$

б) $(3x - 1)(x + 2) = 6;$

в) $(2x-3)(2x+3)-(x-2)^2-1=5x$;

г) $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(2-x)^2}{4}=\dfrac{1-x}{2}$.

259. Найдите значение выражения $10(x_1x_2-x_1-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $4x^2-x-13=0$.

260. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4-10x^2+9=0$; б) $6x^4+5x^2-1=0$.

261. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $(x^2-5)^4-(x^2-5)^2=12$;

б) $(x^2+5x)(x^2+5x-8)-20=0$.

262. Решите квадратное неравенство:

а) $4x-x^2>0$; б) $6x^2\geqslant -x$;

в) $9x^2<25$; г) $x^2-14x+49>0$;

д) $9x^2-30x+25<0$; е) $36x^2+12x+1\geqslant 0$;

ж) $x^2\leqslant x-\dfrac{1}{4}$; з) $x^2-10x+12<0$;

и) $0{,}5x^2+2x-2{,}5\leqslant 0$.

263. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}x^2-2x-8>0,\\0{,}8x+2\leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{49}\leqslant 1,\\9x-x^2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x-3)^2>-4x+8,\\(7-x)(x+7)>-x^2+40.\end{cases}$

264. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{5-x}-\frac{5}{\sqrt{10-x^2+3x}}.$$

265. Решите двойное неравенство $6-x<x^2\leqslant 16$.

266. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3<0,\\x\geqslant 3;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2-6x>0,\\x\leqslant 5.\end{array}\right.$

267. Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\dfrac{x^2+2x}{x+4}=\dfrac{8}{x+4}$; б) $\dfrac{x^2-8x}{5-x}=\dfrac{15}{x-5}$;

в) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}=0$; г) $1-\dfrac{2x^2-x-6}{2-x}=0$;

д) $\frac{3}{x+2}+1=\frac{4}{x^2+4x+4}$; е) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x+1}{x+2}=0$;

ж) $\frac{2x^2+x-1}{x+1}=3x+1$; з) $\frac{3x+1}{x}+\frac{5}{x-2}=\frac{6x-2}{x^2-2x}$.

268. Решите неравенство методом интервалов:

а) $\frac{x-4}{x+6}\leqslant 0$; б) $\frac{(x-3)(x-5)}{x+6}\leqslant 0$;

в) $\frac{2-x-x^2}{2x+3}\geqslant 0$; г) $\frac{x^2-13x+30}{x^2+7x+10}<0$;

д) $\frac{16-x^4}{x+1}\leqslant 0$; е) $\frac{(x-4)^2}{2-x}\geqslant 0$;

ж) $\frac{x-8}{(x-10)^2}\geqslant 0$; з) $\frac{(x-1)^2}{(x-3)(x-4)}>0$.

269. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{x}<2$; б) $\frac{2}{x-2}<1$; в) $\frac{1}{3x+5}\leqslant\frac{x}{3x+5}$;

г) $\frac{x}{x^2-16}\geqslant\frac{3}{16-x^2}$; д) $\frac{x^2+11}{x+5}\leqslant 2$; е) $\frac{4}{(x-1)^2}\geqslant 1$.

270. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{\frac{x-10}{3-x}}$; б) $y=\sqrt{\frac{x^2-5x+12}{3+2x-x^2}}$;

в) $y=\sqrt{\frac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$; г) $y=\sqrt{\frac{1-x}{x^2-4x+4}}+\sqrt{x^2-x}$.

271*. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{30}$; б) $\frac{x^2+x-10}{2}-\frac{3}{2x^2+2x-20}=1$.

272. Найдите число корней уравнения:

а) $5-2(x+1)=1-3x$; б) $5-2(x-1)=1-2x$;

в) $5-2(1-x)=2x+3$.

273. Решите уравнение:

а) $9x-5(x+2)=18-2x$; б) $7(2x-1)-3(x+4)=6(11-x)$;

в) $\frac{5x-6}{4}-\frac{x+11}{3}=\frac{7+4x}{2}$; г) $\frac{x-5}{2}+\frac{6-x}{3}=\frac{x-7}{6}-\frac{2+x}{4}$.

274. Решите неравенство:

а) $4x + 7 < 11$;

б) $3(x - 2) > x - 12$;

в) $(x - 3)(2x - 1) \leqslant (2x + 1)(x + 2)$;

г) $(x - 5)(x + 2) - (x + 3)^2 \geqslant 7 - 14x$.

275. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x}{4} + \frac{2x - 1}{9} \leqslant \frac{x - 9}{6} + 2.$$

276. Найдите, при каких значениях переменной значение дроби $\frac{2y + 5}{18}$ не меньше значения суммы дробей $\frac{7y - 3}{6}$ и $\frac{2 - 5y}{4}$.

277. Найдите нули функции:

а) $f(x) = 2x + 4$; б) $f(x) = -x + 10$; в) $f(x) = -5x + 3$.

278. Найдите значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения:

а) $y = x - 6$; б) $y = -3x + 1$; в) $y = (x - 3)^2 - (x + 1)^2$.

279. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 7y < 4y + 9, \\ 4 - y \geqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x + 1}{5} < 3, \\ \frac{x}{10} - 1 \geqslant \frac{x}{2}. \end{cases}$

280. Решите двойное неравенство:

а) $-7 < 1 - 3x \leqslant 5$; б) $4 \leqslant \frac{3x - 2}{7} < 9$.

281. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 7 - 9x \leqslant 5 - 8x, \\ 7 - 3x \leqslant 6 - 4x; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{5} \leqslant x + 8, \\ 5x + 7 < 7. \end{array}\right.$

282. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 5x + 2y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ 6x - 5y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = 4, \\ \frac{4}{5}x - 3y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2x + 3y}{4} = \frac{3x + 4y}{7}, \\ \frac{5y - 6x}{10} = \frac{12 - 4x}{2}. \end{cases}$

283. Решите неполное квадратное уравнение:

а) $7x^2 + 3x = 0$; б) $5x^2 - 20 = 0$;

в) $\frac{1}{7}x^2 - 5x = 0$; г) $x^2 = 10$;

д) $x^2 - 6 = 4x - 6$; е) $33 + x^2 = 10$.

284. Воспользуйтесь формулой корней квадратного уравнения и решите уравнение:

а) $x^2 + 5x + 4 = 0$; б) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

в) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; г) $7x^2 - 2x + 1 = 0$.

285. Решите уравнение:

а) $x(x + 1) = 6$; б) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$;

в) $\frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}$.

286. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; б) $5x^4 + 4x^2 - 1 = 0$.

287. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $(x^2 - 1)^4 - 2(x^2 - 1)^2 = 8$;

б) $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) - 18 = 0$.

288. Решите квадратное неравенство:

а) $7x + x^2 < 0$; б) $4x^2 \geqslant 49$;

в) $x^2 - 10x + 25 \leqslant 0$; г) $8x^2 - 3x + 12 > 0$;

д) $3x^2 - x - 4 \geqslant 0$; е) $x^2 + 0{,}8x + 0{,}2 < 0$.

289. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - x^2 - 1 < 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1 + x)^2 \geqslant 16, \\ (2x - 7)^2 < 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(x - 1) \leqslant 20, \\ x - 4 < -4 - x. \end{cases}$

290. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - 6x - 7} - \frac{1}{\sqrt{2 - 3x}}.$$

291. Решите двойное неравенство $12 - x < x^2 \leqslant 25$.

292. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 + 6x - 7 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 0. \end{array}\right.$

293. Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{x^2-6}{x-3}=\frac{x}{x-3}$; б) $\frac{20}{x}=9-x$;

в) $\frac{x-4}{x}=\frac{2x+10}{x+4}$; г) $\frac{x^2-12}{x-3}=\frac{x}{3-x}$;

д) $\frac{2x^2-5x+2}{x-2}=4x+1$; е) $\frac{2x-3}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{4x-6}{x^2+2x}$;

ж) $\frac{3x^2+2x-1}{x+1}=5$; з) $\frac{x}{x-4}-\frac{2}{x+4}=\frac{32}{x^2-16}$.

294. Решите неравенство:

а) $\frac{(x+3)(7x-2)}{x-5}\geqslant 0$; б) $\frac{\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)}{x+\sqrt{7}}\leqslant 0$;

в) $\frac{(x+7)^2}{x^2-36}\leqslant 0$; г) $\frac{(x-8)(x-3)^2}{x-2}\geqslant 0$.

295. Решите неравенство:

а) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{1-x}<1$; б) $\frac{3x^2+20x+26}{x^2+6x+5}<2$.

296. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2+7x+12}{3-2x-x^2}}.$$

297. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2-6x+5\geqslant 0, \\ \frac{(x+4)(x+2)}{x-1}\leqslant 0. \end{cases}$

Текстовые задачи

298. В первом вагоне метро пассажиров в 3 раза больше, чем во втором. Когда из первого вагона вышли 32 человека, а во второй зашли 12 человек, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров было в каждом вагоне первоначально?

299. Велосипедист предполагал преодолеть путь за 2 ч, но увеличил намеченную скорость на 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и затратил на этот путь 1 ч 36 мин. Найдите длину пути.

300. В научно-практической конференции приняли участие 6 % первокурсников и 10 % второкурсников университета, что вместе составило 134 человека. Сколько первокурсников и сколько второкурсников в университете, если всего на двух курсах учится 1700 человек?

301. Среднее арифметическое двух чисел равно 28, а $\frac{3}{4}$ их разности равны 12. Найдите эти числа.

302. Фермеру необходимо огородить сеткой прямоугольный участок земли, одна сторона которого на 5 м меньше другой, а площадь равна 300 м^2. Найдите, сколько метров сетки нужно купить, зная, что к расчетному количеству нужно добавить 5 % сетки, идущей в отходы.

303. В период учений спасателей МЧС было организовано несколько полевых лагерей, каждый из которых имел линию связи со всеми остальными. Сколько полевых лагерей было организовано, если количество линий связи равно 21?

304. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 89. Найдите эти числа.

305. При патрулировании катер инспекторов природоохраны прошел 21 км против течения реки и 8 км по течению, затратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера составляет 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

306. Фермеру необходимо было за определенное время вспахать поле площадью 180 га. Поскольку прогноз погоды был неблагоприятным, то ежедневно он вспахивал на 2 га больше, чем планировал, и закончил работу на 1 день раньше срока. За сколько дней фермер вспахал поле?

307. Произведение двух натуральных чисел равно 165, а их разность равна 4. Найдите эти числа.

308. Протяженность шоссе между пунктами A и B составляет 16 км. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Одновременно с велосипедистом навстречу ему из пункта B вышел пешеход. Они встретились через 1 ч. Найдите скорость велосипедиста, если пешеход прибыл в пункт A на $2\frac{2}{3}$ ч позже, чем велосипедист в пункт B.

309. Две производственные линии могут выполнить заказ, работая вместе, за 6 ч. За сколько часов может выполнить этот заказ каждая линия, работая отдельно, если одной из них для выполнения 40 % заказа необходимо на 4 ч больше, чем другой для выполнения 20 % заказа?

310. Бассейн можно наполнять водой через два крана. Если первый кран открыть на 10 мин, а второй — на 20 мин, то весь бассейн будет наполнен. Если первый кран открыть на 5 мин, а второй — на 15 мин, то наполнится 60 % бассейна. За какое время через каждый кран в отдельности может наполниться весь бассейн?

311. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

312. Цена входного билета на стадион составляла 2 р. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25 %, а выручка возросла на 12,5 %. Сколько стал стоить входной билет после снижения цены?

313. В первом выставочном зале экспонатов было в 2 раза больше, чем во втором. Из первого зала 36 экспонатов перенесли во второй зал, после чего в двух залах экспонатов стало поровну. Сколько экспонатов было первоначально в каждом зале?

314. Автомобиль проезжает путь из города A в город B за 4 ч. Если бы он ехал со скоростью на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше, то затратил бы на этот же путь 3 ч. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

315. В мае в школе училось 650 человек. Летом были сданы в эксплуатацию новостройки, и в начале учебного года в школе стало 750 учащихся, причем число девочек в школе увеличилось на 10 %, а мальчиков — на 20 %. Сколько девочек стало в школе в сентябре?

316. Среднее арифметическое двух чисел равно 36, а $\frac{1}{3}$ их разности равна 4. Найдите эти числа.

317. Хватит ли 90 м сетки, чтобы огородить прямоугольный вольер для животных площадью 600 м^2, одна сторона которого на 10 м меньше другой?

318. Найдите два последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 313.

319. Туристический теплоход прошел 24 км против течения реки и 16 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки составляет 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

320. Фирма по производству окон получила заказ на изготовление 160 окон для новой школы к определенному сроку. Учитывая важность заказа, ежедневно изготавливалось на 4 окна больше, чем планировалось, поэтому весь заказ был выполнен на 2 дня раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?

321. Произведение двух натуральных чисел равно 108, а их разность равна 3. Найдите эти числа.

322. Протяженность шоссе между пунктами A и B составляет 18 км. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 2 ч. Найдите скорости пешеходов, если один из них пришел в пункт B на 0,9 ч позже, чем другой в пункт A.

323. Две студенческие бригады могут выполнить задание, работая вместе, за 2 дня. За сколько дней может выполнить это задание каждая бригада, работая самостоятельно, если одной из них для выполнения $\frac{1}{3}$ задания необходимо на 3 дня меньше, чем другой для выполнения $\frac{2}{3}$ задания.

324. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько нужно взять стали с содержанием никеля 5 %, чтобы после смешивания стали обоих сортов получилось 140 т стали с содержанием никеля 30 %?

325. Картофель подешевел на 20 %. Сколько килограммов картофеля можно купить на ту же сумму, на которую раньше покупали 10 кг?

Ответы

Повторение курса алгебры 7—8-х классов

1. а) 27; б) 1; в) 144; г) $\frac{1}{25}$; д) 81; е) 1000; ж) 32; з) 16; и) 100; к) 8.

2. а) $\frac{1}{3}$; б) 0,01; в) 1; г) 7; д) $\frac{1}{36}$; е) $\frac{1}{16}$.

3. а) 25; б) 1000; в) 10 000; г) 0,008; д) 32; е) $\frac{1}{4}$; ж) $\frac{1}{6}$; з) $\frac{1}{49}$.

4. а) $-b^2 + a$; б) $5m^2 + 4$; в) $-10b + 34$; г) $12c - 25$.

5. а) $5(2a - 7b)$; б) $x(5 + y)$; в) $2a(b - 2c)$; г) $3a(a + 4b)$; д) $b^2(2b^2 - 1)$; е) $3ab(7a + 1)$.

6. а) $(a - 5)(a + 5)$; б) $(4 - 3x)(4 + 3x)$; в) $(2m - 7n^2)(2m + 7n^2)$; г) $(ab - 1)(ab + 1)$.

7. а) $(a + 3)(a + b)$; б) $(3m - n)(m + 5)$.

8. а) $(a + 2)^2$; б) $(3b - 1)^2$; в) $(m - 9n)^2$; г) $(x^2 + y)^2$.

9. а) $(x - 9)(x + 1)$; б) $(x - 1)(6x - 1)$; в) $(x + 6)(1 - x)$; г) $(x + 2)(5x + 1)$.

10. а) $4a(2b - c)$; б) $3xy(2x - 1)$; в) $(m - 6)(m + 6)$; г) $(5 - 2y)(5 + 2y)$; д) $(a - 4)(a + b)$; е) $(x - 1)(x^2 + 1)$.

11. а) $(x - 5)^2$; б) $(2a + b)^2$.

12. а) $(x - 4)(x + 2)$; б) $(5x + 1)(x + 1)$.

13. а) $8\frac{1}{3}$; б) 14; в) -8; г) 14; д) 4,5; е) 40; ж) $\frac{1}{150}$; з) 15.

14. а) $65\sqrt{2}$ — иррациональное число; б) -3 — рациональное число; в) 34 — рациональное число; г) 4 — рациональное число.

15. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5} + 1$; г) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$.

16. а) 6,75; б) -12; в) 5,6; г) 4; д) 0; е) 15; ж) -2; з) 11.

17. а) 5; б) 30; в) 5; г) 1.

18. а) $x \in (-\infty;\ 1)$; б) $x \in \left[-\frac{7}{29}; +\infty\right)$.

20. а) $D = (-\infty;\ +\infty)$; б) $E = (-\infty;\ +\infty)$; в) $x = 7$; г) $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 7)$; $y < 0$ при $x \in (7;\ +\infty)$; д) $k = -5$; е) $(0;\ 35)$.

21. а) $-1{,}2$; б) $1\frac{2}{7}$; в) -3.

22. а) $x \in (-5; +\infty)$; б) $x \in [-3; +\infty)$.

24. а) -2; 10; б) -1; $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) нет корней; д) $\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{10}$.

25. а) -4; -2; б) 0; 1; в) 1; 5.

26. а) $x \in (-\infty;\ -2] \cup [4;\ +\infty)$; б) $x \in (1;\ 3)$; в) $x \in \{3\}$; г) $x \in \varnothing$; д) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$; е) $x \in [-7;\ 7]$.

28. а) $D = (-\infty;\ +\infty)$; б) $(2;\ -3)$; в) $E = [-3;\ +\infty)$; г) $x = 2$; д) $x = 1$; $x = 3$; е) $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (1;\ 3)$; ж) функция возрастает на промежутке $[2;\ +\infty)$; функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 2]$; з) $(0;\ 9)$.

29. а) $\frac{1}{3}$; 3; б) -4; 4.

30. а) $x \in (1;\ 4)$; б) $x \in \left(-\infty; -2\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; г) $x \in [0;\ 6]$.

Глава 1. Рациональные выражения

1.19. а) -6; б) 0.

1.20. а) $\frac{1}{17}$; б) $-2\frac{5}{7}$.

1.21. а) $-1\frac{5}{8}$; б) -13.

1.23. а) $(-\infty;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (-0{,}5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 8) \cup (8;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; ж) $(-\infty;\ -4) \cup (-4;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$; з) $\left(-\infty;\ -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};\ +\infty\right)$; и) $(-\infty;\ +\infty)$; к) $(-\infty;\ +\infty)$; л) $(-\infty;\ +\infty)$; м) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

1.24. а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0{,}2) \cup (0{,}2; +\infty)$; д) $(-\infty; -6) \cup (-6; 0) \cup (0; 8) \cup (8; +\infty)$; е) $(-\infty;\ -6) \cup (-6;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$.

1.25*. а) Невозможно; б) $-\frac{1}{15}$; в) невозможно; г) невозможно.

1.62. а) $\frac{3}{a} = \frac{12}{4a}$; $\frac{3}{a} = \frac{3a}{a^2}$; $\frac{3}{a} = \frac{-3}{-a}$; $\frac{3}{a} = \frac{3b}{ab}$;

б) $\frac{x+y}{x} = \frac{-5x-5y}{-5x}$; $\frac{x+y}{x} = \frac{x^2+xy}{x^2}$; $\frac{x+y}{x} = \frac{-x-y}{-x}$; $\frac{x+y}{x} = \frac{xy+y^2}{xy}$;

в) $\frac{b+3}{b-3} = \frac{2b+6}{2b-6}$; $\frac{b+3}{b-3} = \frac{b^2+3b}{b^2-3b}$; $\frac{b+3}{b-3} = \frac{-b-3}{3-b}$; $\frac{b+3}{b-3} = \frac{b^2-9}{(b-3)^2}$; $\frac{b+3}{b-3} = \frac{(b+3)^2}{b^2-9}$.

1.64. а) 5; б) $6m^4$; в) $3mn$; г) m^3n^4k.

1.65. а) $8b$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{7d}{3}$; г) $-\frac{y}{2x}$; д) $\frac{a}{c}$; е) $\frac{3}{m^2n^2}$; ж) $\frac{y}{3x}$; з) ab^3; и) $\frac{d}{b}$; к) $\frac{7xz}{y}$; л) $3abc$; м) $\frac{1}{3xy^2}$.

1.66. а) $\frac{a+b}{3b}$; б) $\frac{x}{3(x-2y)}$; в) $\frac{2c+2d}{c}$; г) $\frac{bc}{b-c}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{3}{x+4}$; ж) $\frac{1}{m}$; з) $\frac{1}{a-2}$; и) $3x - 2y$.

1.67. а) $-2{,}5$; б) 400.

1.68. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{2}{a}$; в) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{b+5}{3}$; д) $\frac{m}{m+6}$; е) $\frac{a+4}{3}$; ж) $\frac{x+1}{x-1}$; з) $\frac{3b+1}{3b-1}$; и) $\frac{2a+3b}{2a-3b}$.

1.69. а) $\frac{2-x}{x+3}$; б) $\frac{a+6}{a-3}$; в) $\frac{m+5}{m-3}$; г) $\frac{4-b}{4b}$.

1.70. а) $-\frac{n-m}{n-k}$ или $-\frac{m-n}{k-n}$; б) $-\frac{a+b}{c-d}$ или $-\frac{-a-b}{d-c}$; в) $-\frac{y-x}{x+z}$ или $-\frac{x-y}{-x-z}$.

1.71. а) $-\frac{1}{6}$; б) $-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{x}{4}$; г) $-a$; д) $-\frac{c+7}{2}$; е) $-\frac{2b}{b+4}$; ж) $\frac{5}{2-x}$; з) $\frac{6-m}{m+6}$; и) $\frac{3x+3}{1-x}$.

1.72. а) 100; б) $-5\frac{3}{7}$.

1.73. а) $\frac{a-5}{6}$; б) $-\frac{a+7}{7}$; в) $\frac{b+1}{b-1}$; г) $-\frac{c+2}{c+1}$; д) $\frac{3-n}{m-b}$; е) $\frac{x-y}{x-3}$.

1.74. а) $\frac{x+3}{x-1}$; б) $\frac{x+3}{x-5}$; в) $x+2$; г) $\frac{x-1}{2-5x}$; д) $-\frac{x+6}{x+5}$; е) $a(a+3)$.

1.75. а) 16; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{9x-9y}{x+y}$; г) $\frac{2a+b}{18a-9b}$.

1.78*. $\frac{a}{2a-2b}$.

1.79*. $\frac{x^2-3}{x+2}$.

1.129. а) $\frac{m+n}{7}$; б) $\frac{2a}{b}$; в) $\frac{5x+3}{y^2}$; г) $\frac{2c^2}{ab}$; д) $\frac{mn+cd}{3k}$; е) $-\frac{2x^2}{a^4}$.

1.130. а) $\frac{8x+2}{7}$; $\frac{2x+2}{7}$; б) $\frac{4a+1}{4}$; $\frac{2a-3}{4}$; в) $\frac{m}{3a}$; $\frac{n}{3a}$; г) $\frac{4}{x}$; $\frac{2y-4}{3xy}$.

1.131. а) 5; б) 1; в) $\frac{2x}{x+1}$; г) -1.

1.132. а) $\frac{1}{a-3}$; б) $x+4$; в) $\frac{5}{m-n}$; г) $-\frac{2}{b+3}$; д) $\frac{a+3b}{a-3b}$; е) $\frac{y+1}{y-1}$; ж) $a+6$; з) $\frac{x+1}{x-3}$.

1.133. 61.

1.134. а) $\frac{b+2}{b-2}$; б) 7; в) 6; г) $7x+y$; д) $\frac{m+2}{5}$; е) $3c-1$.

1.135. 2.

1.136. $\frac{15}{a-2}$.

1.137. а) $\frac{a+4}{4-a}$; б) $\frac{1}{3x-1}$.

1.139. а) $\frac{12a-b}{3}$; б) $\frac{26x}{35}$; в) $\frac{3m-2n}{30}$; г) $\frac{5x+9y}{xy}$; д) $\frac{2a^2-9b^2}{15ab}$; е) $\frac{7c+5a}{7d}$; ж) $\frac{8an-1}{20mn}$; з) $\frac{xz+3y}{y^2z^2}$; и) $\frac{5x-3y}{15x^2}$.

1.140. а) $\frac{5a+5}{18}$; б) $\frac{7x-28}{15x}$; в) $\frac{m-n}{mn}$; г) $\frac{b-d}{bd}$; д) $\frac{y+3}{y^2}$; е) $\frac{3}{a^3}$; ж) $\frac{1-m^2}{m^9}$; з) $\frac{5x^2+1}{x^2y}$.

1.141. а) $\frac{2mn-m^2}{n(n-m)}$; $-\frac{m^2}{n(n-m)}$; б) $\frac{5a^2+8a+8}{a(a+2)}$; $\frac{5a^2-8}{a(a+2)}$.

1.142. а) $\frac{x^2+y}{x}$; б) $\frac{a-2b}{b}$; в) $\frac{6+m^2}{m}$; г) $-\frac{c}{d}$; д) $\frac{2y}{x}$; е) $\frac{7n}{1-n}$; ж) $\frac{8x}{x+y}$; з) $-\frac{8b+1}{5b+1}$.

1.143. а) $\frac{m^2+49}{m^2-49}$; б) $\frac{x-20}{x^2-16}$; в) $\frac{15-7a}{(4a-3)(3a+1)}$.

1.144. а) $\frac{5x-5}{x(x+3)}$; б) $\frac{1}{a(a-1)}$; в) $\frac{3m}{28(n-1)}$; г) $\frac{8y+1}{30(y+2)}$; д) $\frac{5}{ab}$; е) $-\frac{9}{(c+1)(c+5)(c-4)}$.

1.145. а) $-\frac{2}{a+9}$; б) $-\frac{2}{3x-21}$; в) $\frac{b+3}{b}$; г) $\frac{5m+1}{12m-24}$; д) $-\frac{5}{xy}$; е) $\frac{m-6}{4m}$.

1.146. $\frac{1}{a}$.

1.147. а) $\frac{4x}{16-x^2}$; б) $\frac{b+11}{b^2-9}$; в) $\frac{1}{1-9y^2}$; г) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

1.148. –14.

1.149. а) $\frac{6c}{(c+6)^2}$; б) $\frac{2x}{(x-2)^2}$.

1.150. а) $\frac{14}{(n+3)(m-6)}$; б) $\frac{2y}{(2x-3)(x+y)}$.

1.151. а) $\frac{y-8}{(y-1)(y-2)(y-5)}$; б) $\frac{4}{(a-3)(a-5)}$; в) $-\frac{3}{(a-1)^2}$.

1.153*. $\frac{1}{30}$.

1.188. а) $\frac{12}{b^2}$; б) $\frac{5a^3}{b^2}$; в) $\frac{1}{c^6}$; г) $\frac{5}{(y+2)^2}$.

1.189. а) $\frac{m^8}{n^4}$; б) $\frac{32}{x^{10}y^5}$; в) $\frac{1000a^3b^6}{c^{12}d^3}$; г) $\frac{(a-b)^3}{d^3}$; д) $\frac{x^4}{(x^2-5)^4}$;

е) $\frac{(3m+n)^6}{(m^2-7)^6}$.

1.190. а) $\frac{n^2}{15}$; б) $\frac{x^4}{y^2}$; в) $\frac{a^4}{b}$; г) $\frac{c}{(d+5)^2}$.

1.191. а) 4; б) $\frac{1}{5y}$; в) $\frac{a^3d}{c}$; г) $\frac{9}{28mn}$; д) $\frac{a^3c}{4}$; е) $\frac{75yz^2}{x}$.

1.192. а) $\frac{64a^6}{b^2}$; б) $-\frac{x^3y^3}{z^{24}}$; в) $\frac{81c^4}{a^8b^4}$; г) $-\frac{32m^5n^{10}}{k^{30}}$.

1.193. а) $a-3b$; б) $\frac{1}{3d}$; в) $\frac{1}{x^2}$; г) $-\frac{5}{2m}$.

1.194. а) $\frac{n}{m}$; б) $\frac{y^3}{x^2}$; в) $\frac{1}{2bc^2}$; г) $-3a$.

1.195. а) $a-6$; б) $\frac{m(m+n)}{5}$; в) $\frac{x^2}{x+2}$; г) $\frac{6c}{c+d}$; д) $-\frac{a(a+3)}{2}$;

е) $-\frac{(y-5)(y+1)}{2}$.

1.196. 30 100.

1.198. а) a; б) $\frac{x+y}{2}$; в) $\frac{b-3}{3b+1}$; г) $-\frac{1}{m(m+1)}$; д) $-\frac{5}{a+2b}$; е) $\frac{2c+1}{8(2c-1)}$.

1.199. $\frac{4a^2(a-1)}{a+1}$.

1.200. а) $2x-6$; б) $\frac{3y-1}{2}$; в) $\frac{n(n-2)}{5}$; г) $x+1$; д) $\frac{a-8}{a-7}$; е) $\frac{1}{y+3}$;

ж) $\frac{d}{2d-c}$; з) $\frac{1}{2(3x-1)(x+5)}$.

1.201. а) $\left(\frac{7a^4}{bc^5}\right)^2$; б) $\left(\frac{(m-n)^2}{c^3d^4}\right)^3$; в) $\left(\frac{a^2b^3}{(a+b)^4}\right)^4$.

1.202. а) $\frac{3x(x-1)}{(x-a)(x+2)}$; б) $\frac{(x-4)(x+1)}{x}$.

1.203. а) $\frac{3}{2a+1}$; б) $\frac{b+3}{2-4b}$; в) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x+1)}$; г) $4m^2-m$.

1.204*. $\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$.

1.205*. $a-c$.

1.241. а) $\frac{27}{2m}$; б) $\frac{1}{a+b}$.

1.242. а) $\frac{x-2y}{x+2y}$; б) $\frac{n}{m+3n}$; в) $\frac{4b-a}{2ab}$; г) $\frac{7b-28}{b+2}$.

1.243. а) $-\frac{1}{a+1}$; б) $m+4$; в) $\frac{2}{x(x+2)}$.

1.244. 9,1.

1.246. 1.

1.247. а) $\frac{4-c}{4}$; б) $a-1$.

1.249. а) –2; б) 0,5.

1.250. а) $\frac{a+b}{ab}$; б) xy.

1.251. $\frac{y}{6y-4x}$.

1.252. а) $\frac{\sqrt{b}-5}{2}$; б) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}-5}$; в) $\frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}}$; г) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$.

1.253. $3\sqrt{a}$.

1.254. а) $\frac{m+n}{n-m}$; б) $\frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

1.255. а) $\frac{\sqrt{ab}+b}{ab}$; б) $-\sqrt{ab}$; в) $1-x$; г) $\sqrt{a}$.

1.257*. а) $\frac{1}{4-m}$; б) $\frac{t-1}{t-3}$.

Я проверяю свои знания

1. а) $3{,}6x^2y$; $2x-\frac{y^4}{5}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{a^2+ac}{5}$;

б) $\frac{3}{8m+n}$; $\frac{3a}{8b^3}$; $\frac{a}{b}+14$; $\frac{x^2-x+7}{3x}$; $\frac{a+1}{a-7}$.

2. в); д)

3. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 6,3.

4. а) $\frac{a}{x-3}=\frac{-a}{3-x}$; б) $\frac{a}{x-3}=\frac{ax}{x^2-3x}$; в) $\frac{a}{x-3}=\frac{a(x+3)}{x^2-9}$;

г) $\frac{a}{x-3}=\frac{a(x-3)}{x^2-6x+9}$.

5. а) $\frac{3m}{4n}$; б) $-\frac{p+5q}{2}$; в) $\frac{3y}{y+8}$; г) $\frac{3-a}{a+3}$; д) $\frac{a+b}{b}$; е) $\frac{1}{x+1}$.

6. а) $\frac{c+1}{c-1}$; б) $\frac{a+3}{a-1}$; в) $\frac{4}{m-1}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{5}{b^2-1}$; е) $\frac{2c}{(c-2)^2}$; ж) $\frac{16}{(y+5)(x-9)}$;

з) $\frac{2d-1}{(d-1)(d-4)}$.

7. а) $\dfrac{4a^2x}{5y}$; б) $2x$; в) $\dfrac{a^{15}b^{10}}{2c}$; г) $\dfrac{x}{3y}$; д) $\dfrac{c(c+1)}{4(c-1)}$; е) $3a+1$; ж) $-\dfrac{(a+1)(a+2b)}{12}$;

з) $\dfrac{m}{m+x}$.

8. а) $\dfrac{x+3}{x-3}$; б) $\dfrac{a(5-a)}{a+5}$; в) $-a$; г) $\dfrac{1}{3}$.

Глава 2. Функции

2.25. а) 5; б) $3\frac{1}{8}$; в) 3,98; г) 13.

2.27. а) Нет; б) да.

2.28. а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{2}{3}$.

2.29. а) 0; 1; б) –2; 3; в) –3; 4.

2.31. а) 6; 0; –2; б) –6; –3; 7; 9; –7; –2; 5; в) $[-9; 9]$; г) $[-4; 6]$.

2.32. а) $D=[-5; 5]$; $E=[-3; 7]$; б) $D=[-5; -3)\cup(-3; 5]$; $E=[-3; 4)\cup(4; 7]$.

2.34. а) $(-\infty; 3)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)\cup(0; 6)\cup(6; +\infty)$; в) $(-\infty; -5)\cup(-5; +\infty)$; г) $(-\infty; -9)\cup(-9; 9)\cup(9; +\infty)$; д) $(-\infty; -2)\cup(-2; 4)\cup(4; +\infty)$; е) $\left(-\infty; -\sqrt{10}\right)\cup\left(-\sqrt{10}; 0\right)\cup\left(0; \sqrt{10}\right)\cup\left(\sqrt{10}; +\infty\right)$; ж) $(-\infty; 2)\cup(2; 3)\cup(3; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$.

2.35. а) $[4; +\infty)$; б) $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right)$; в) $(-\infty; -2{,}5]\cup[0; +\infty)$; г) $(2; 4)$.

2.36. а) $[-1; 4]$; б) $\left[-\frac{2}{3}; 6\right)$; в) $(-\infty; -5]\cup[1; 6]$; г) $(2; 3]$.

2.37. а) $[-7; +\infty)$; б) $[6; +\infty)$; в) $[-3; +\infty)$; г) $(-\infty; 20]$.

2.68. а) 1) –6; 3; 8; 2) $y>0$ при $x\in[-9; -6)\cup(3; 8)$; $y<0$ при $x\in(-6; 3)\cup(8; 9]$; 3) функция возрастает на промежутке $[0; 6]$; функция убывает на промежутках $[-9; 0]$; $[6; 9]$; б) 1) –8; –1; 7; 2) $y>0$ при $x\in[-9; -8)\cup(-1; 7)\cup(7; 9]$; $y<0$ при $x\in(-8; -1)$; 3) функция возрастает на промежутках $[-5; 2]$; $[7; 9]$; функция убывает на промежутках $[-9; -5]$; $[2; 7]$.

2.69. а) –6; –1; 4; 6; б) $(-\infty; -6)\cup(-1; 4)\cup(6; +\infty)$; в) $[-6; -1]\cup[4; 6]$.

2.70. а) 1,4; б) –7; 7; в) $\frac{1}{7}$; 1; г) –3; –1; 1; 3.

2.71. б); в); г).

2.73. а) $f(x)>0$ при $x\in\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; $f(x)<0$ при $x\in\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$;
б) $g(x)>0$ при $x\in(-\infty; -2)\cup(0; +\infty)$; $g(x)<0$ при $x\in(-2; 0)$;
в) $h(x)>0$ при $x\in(1; 2)$; $h(x)<0$ при $x\in(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$;
г) $p(x)>0$ при $x\in(-\infty; +\infty)$.

2.74. а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)$.

2.75. $q(2)$; $q(0)$; $q(-5)$.

2.108. а) Да; б) да; в) нет; г) да.
2.109. б).
2.110. г).
2.112. 5.
2.113. а) 1; –1; б) –1; 1.
2.114. а) –1; б) 1.
2.115. Шесть корней. $f(x) > 0$ при $x \in (-6; -4) \cup (-1{,}5; 1{,}5) \cup (4; 6)$.
2.119. а) $[-4; 4]$; б) $-6; -4; -1; 1; 4; 6$; в) $y > 0$ при $x \in (-6; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; 6)$; $y < 0$ при $x \in [-7; -6) \cup (-4; -1) \cup (1; 4) \cup (6; 7]$; г) функция возрастает на промежутках $[-7; -5]$; $[-3; 0]$; $[3; 5]$; функция убывает на промежутках $[-5; -3]$; $[0; 3]$; $[5; 7]$.
2.120*. а) Отрицательные; б) положительные.
2.154. г).
2.155. в).
2.156. а) $y = (x - 2)^3$; б) $y = x^3 - 3$; в) $y = x^3 + 5$; г) $y = (x + 9)^3$; д) $y = (x + 3)^3 + 5$; е) $y = (x - 6)^3 - 7$.
2.157. в).
2.159. $y = -\dfrac{2}{x + 3} - 5$.
2.160. в).
2.167*. –69.
2.168*. 4; 8.
2.169*. а) $[0; 8]$; б) $[-5; 3]$; в) $[9; 17]$; г) $[-1; 7]$.
2.170*. Да.

Я проверяю свои знания

1. а) –1; б) –5; в) 0,25; г) 3.
2. в); г).
3. в).
4. 8.
5. а) $f(x) > 0$ при $x \in (1{,}8; +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 1{,}8)$;
б) $g(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 5) \cup (6; +\infty)$; $g(x) < 0$ при $x \in (5; 6)$;
в) $h(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$; $h(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.
6. а) $[-6; 9]$; б) $[-4; 4]$; в) $-5; -1; 5; 8$;
г) $y > 0$ при $x \in (-5; -1) \cup (5; 8)$; $y < 0$ при $x \in [-6; -5) \cup (-1; 5) \cup (8; 9]$;
д) функция возрастает на промежутках $[-6; -3]$; $[2; 7]$; функция убывает на промежутках $[-3; 2]$; $[7; 9]$.
7. а) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup (-5; -1) \cup (-1; +\infty)$; в) $(-\infty; 900)$;
г) $[0; 8]$; д) $[-4; 4)$; е) $(7; +\infty)$.
8. а) $[-6; +\infty)$; б) $[9; +\infty)$; в) $[-8; +\infty)$; г) $(-\infty; 28]$.
10. $a \in \left(-\dfrac{5}{9}; 0\right)$.

Глава 3. Дробно-рациональные уравнения и неравенства

3.35. а) 2,5; б) –2; в) нет корней; г) 0,25; д) 2; е) 5.

3.37. а) $1\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{13}$; в) –2; 2; г) –3; 3.

3.38. $\frac{13}{16}$.

3.39. –6; –2.

3.40. а) –7; б) 0; в) 1; г) 8.

3.41. 7.

3.42. а) –1; 4; б) –1; в) –27; –1; г) –0,2.

3.43. 5.

3.44. а) –3; 7; б) –1; 18; в) –3; 6; г) 5.

3.45. а) –1; б) 4; 15.

3.46. а) 20; б) 15; в) 1 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; г) 12 ч, 24 ч.

3.47. а) –3; б) –4; в) 0; г) 2.

3.48. а) 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; б) 30 м^3, 40 м^3.

3.49. а) –6; –1; б) 6; в) –1; 1.

3.50. 6 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.51. а) $3\frac{1}{7}$; б) –2; в) –2; г) 8.

3.52*. 5,4.

3.53*. а) –4; 4; б) –1,5; –1; 2; 3; в) –2; 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; г) –2; –1; 0; 1; д) $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$; е) $-2 \pm \sqrt{5}$.

3.54*. 4.

3.94. а) (5; 10); (–4; 1); б) (1; 2); (–5; –4); в) (1; 0); (–0,5; –1,5); г) (3; 6); (6; 3).

3.95. а) (2; –4); (–4; –16); б) (–2; 26); (2; 26); в) (0; 1); (2; –3); г) (4,5; 0); (3,5; –2).

3.96. а) 2; б) 2; в) 3.

3.97. а) (–2; –4); (2; 4); б) (3; 9); (–2; 4).

3.98. 12; 15.

3.99. 200 м; 300 м.

3.100. 43.

3.101. а) (1; 2); (–2; –1); б) (4; 8); (8; 4).

3.102. а) 12 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, 30 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; б) 18 ч.

3.103. а) (9; 2); (–2; –9); б) (6; 4); (8; 3); в) (5; –1); г) (4; 2); (–2; –4).

3.104. а) (0; 0); (–1; 3); б) (1; 2); (2; 1); в) (–2; 3); (–3; 1); г) (1; –1).

3.105. 3.

3.106. а) (2; 10); (–3; 20); б) (2; –1); (1; –2).
3.107. а) (–2; –2); (2; –2); (–2; 2); (2; 2); б) (1; 0); (1; –1); (–2; 0); (–2; –1).
3.108*. а) (1; 3); (–1; –3); б) $\left(3+\sqrt{13};\ -3+\sqrt{13}\right)$; $\left(3-\sqrt{13};\ -3-\sqrt{13}\right)$; $\left(2+\sqrt{10};\ -2+\sqrt{10}\right)$; $\left(2-\sqrt{10};\ -2-\sqrt{10}\right)$.

3.141. а) 13; б) $\sqrt{61}$.
3.142. а) $2\sqrt{13}$; б) $\sqrt{2}$; в) 4.
3.143. а) 4; б) 3; в) 5; г) $\sqrt{2}$.
3.144. а) (–2; 1); $R = 3$; б) (0; 5); $R = 7$; в) (–4; 0); $R = 3\sqrt{2}$; г) (0; 0); $R = \sqrt{19}$.
3.145. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет.
3.146. а); в).
3.147. а) $(x-6)^2+(y-3)^2=49$; б) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$; в) $(x+3)^2+y^2=2$; г) $x^2+y^2=45$.
3.148. а) $(x-5)^2+(y+3)^2=16$; б) $(x-5)^2+(y-3)^2=4$; в) $(x+5)^2+(y+3)^2=144$.
3.149. $x^2+(y+2)^2=29$.
3.150. Нет.
3.151. б).
3.152. а) (2; 0); (0; 2); б) (0; –3); (0; 3).
3.153. а) 4; б) 2.
3.193. а) $(-\infty;\ -5) \cup (-1;\ 4)$; б) $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ 5] \cup [5{,}5;\ +\infty)$; в) $[-8;\ 0{,}75] \cup [1;\ +\infty)$; г) $(1{,}5;\ 2{,}25) \cup (8;\ +\infty)$.
3.194. а) (3; 7); б) $(-\infty;\ -5) \cup (9;\ +\infty)$; в) $[-8{,}5;\ -3)$; г) $(-\infty;\ -0{,}4) \cup [0;\ +\infty)$.
3.195. а) $(-2;\ 3) \cup (5;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -9) \cup (-7{,}5;\ 1)$; в) $\left[0;\ \frac{1}{9}\right] \cup (5;\ +\infty)$; г) $[-6;\ 8] \cup (11;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -5) \cup \left(0;\ \frac{1}{3}\right) \cup (2;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ -7) \cup \left[\frac{1}{6};\ 3\right] \cup (3{,}5;\ +\infty)$.

3.196. а) $(-\infty;\ 2) \cup (8;\ +\infty)$; б) $[-3;\ 9]$; в) $(-5;\ 2)$; г) $(-\infty;\ 0] \cup [3{,}5;\ +\infty)$.
3.197. $(-\infty;\ -7) \cup (1;\ 2)$.
3.198. $(-\infty;\ 0) \cup (3;\ +\infty)$.
3.199. а) $(-\infty;\ -3] \cup \{5\}$; б) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 9)$; в) $(-\infty;\ -6] \cup \{7\} \cup [9;\ +\infty)$; г) $\left[-2\frac{1}{3};\ 8\right]$.
3.200. а) $(-\infty;\ 4) \cup \{6\}$; б) $[8;\ 10) \cup (10;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 5) \cup (5;\ 8) \cup (9;\ +\infty)$; г) $\{6\} \cup \left(-2;\ 2\frac{1}{3}\right)$.
3.201. $(-\infty;\ -2] \cup [3;\ 8) \cup (8;\ +\infty)$.
3.202. а) $(-\infty;\ -7)$; –8; б) $(-\infty;\ -6] \cup \{-0{,}5\} \cup [6;\ +\infty)$; –6.
3.203. $[-6;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$.

3.204. а) $(-5;\ 0] \cup (5;\ +\infty)$; б) $(-3;\ 3)$.
3.205. а) $[-3;\ 2] \cup [5;\ +\infty)$; б) $[-7;\ -3) \cup (2;\ 7]$.
3.206. а) $(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup (0;\ 7)$; б) $\{-4\} \cup [2;\ 9)$.
3.207. а) $(-\infty;\ 0) \cup (0{,}25;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -5) \cup (7;\ +\infty)$; в) $\left(-3;\ \frac{1}{3}\right) \cup (2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -3] \cup (-2;\ 3]$.
3.208. $(-\infty;\ -5] \cup \{6\} \cup (10;\ +\infty)$.
3.209. $(-\infty;\ -3] \cup (-1;\ 0) \cup [2;\ +\infty)$.
3.210. Не меньше 27 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
3.211. $\{-1\} \cup (8;\ +\infty)$.
3.212*. $(-\infty;\ 0{,}75] \cup (2;\ +\infty)$.
3.213*. -11.
3.214*. 10.

Я проверяю свои знания

1. б).
2. г).
3. а) -5; б) -6; в) 2; г) нет корней.
4. 2 и 4.
5. а) $(-2{,}5;\ 3) \cup (8;\ +\infty)$; б) $\left(-\frac{1}{6};\ 3\right] \cup [5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -5) \cup (-5;\ -2) \cup (2;\ 3)$; г) $(-\infty;\ -2] \cup \{0\} \cup [1;\ 3)$; д) $(-5;\ -3] \cup \{-1\} \cup [3;\ 5)$.
6. а) $-1\frac{2}{3}$; 3; б) -7; в) -6; 0; г) $1\frac{2}{3}$.
7. а) $(5;\ 0)$; $(0;\ -5)$; б) $(0{,}25;\ 7{,}75)$; $(-2;\ 1)$; в) $(1;\ 0)$; $(-2;\ 15)$.
8. а) $(-5;\ 0) \cup [11;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -6) \cup \{0\} \cup [5;\ +\infty)$.
9. а) 10; б) 4.
10. -4; 4.

Глава 4. Прогрессии

4.22. $a_1 = 1$; $a_5 = 9$; $a_{20} = 39$; $a_{100} = 199$.
4.23. а) -6; -5; -4; -3; б) 7; 13; 19; 25; в) 2; -1; -6; -13; г) 2; 4; 8; 16.
4.24. а) -15; -64; б) 20; 6; в) 45; 500; г) -4; 11.
4.25. $c_1 = 7$; $c_5 = 39$; $c_{10} = 79$; $c_{2m} = 16m - 1$; $c_{m-4} = 8m - 33$.
4.26. а) $a_n = -2n - 1$; $a_7 = -15$; б) $a_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}$; $a_7 = 81$.
4.27. $a_n = 150n$; 450 м; 750 м.
4.28. -14.
4.29. а) Нет; б) да; в) нет; г) да.
4.30. 42.
4.31. 13.

4.32. 14.

4.33*. От первого до седьмого.

4.34*. а) 3; 14; 69; 344; б) 3; 12; 156; 24 492.

4.83. а) $d = 5$; б) $d = -1$; в) $d = 0$; г) $d = -2\sqrt{2}$.

4.84. а) 4; б) –4; в) 1,5; г) $-4\frac{2}{7}$.

4.85. а) $a_{18} = a_1 + 17d$; б) $a_{18} = a_{17} + d$; в) $a_{18} = a_{29} - 11d$; г) $a_{18} = a_3 + 15d$.

4.86. а) $a_n = 5 - 2n$; $a_6 = -7$; $a_{12} = -19$; $a_{51} = -97$; б) $a_n = 8n - 15$; $a_6 = 33$; $a_{12} = 81$; $a_{51} = 393$; в) $a_n = 0{,}25n + 3{,}75$; $a_6 = 5{,}25$; $a_{12} = 6{,}75$; $a_{51} = 16{,}5$; г) $a_n = -5\sqrt{2}n + 4\sqrt{2}$; $a_6 = -26\sqrt{2}$; $a_{12} = -56\sqrt{2}$; $a_{51} = -251\sqrt{2}$.

4.87. $d = -7$; $a_{10} = -50$.

4.88. а) Нет; б) да.

4.89. 160 р.; 220 р.; 7 сут; не более 6 сут.

4.90. 71.

4.91. –3.

4.92. $a_1 = 49$; $a_7 = 37$; $a_{25} = 1$.

4.93. $a_1 = 1{,}5$; $d = -0{,}8$; $a_{13} = -8{,}1$; $a_{21} = -14{,}5$.

4.94. $a_1 = -51$; $d = 4$; $a_{32} = 73$.

4.95. 28.

4.96. $a_{25} = 0{,}1$.

4.97. $d = \frac{12\sqrt{5}}{7}$.

4.98. $a_{15} = -36$; $d = 7{,}6$.

4.99. –0,4.

4.101*. а) $a_1 = 1$; $d = 3$; б) $a_1 = -6$; $d = 9$.

4.102*. 10.

4.103*. Да.

4.144. а) 253; б) –198; в) $1891\sqrt{2}$.

4.145. а) 1216; б) –23,2; в) $203\frac{5}{9}$; г) $-368\sqrt{5}$.

4.146. Нет.

4.147. 122,5.

4.148. $-58\frac{2}{3}$.

4.149. а) 2550; б) 1188.

4.150. а) 4905; б) 98 550.

4.151. а) 270; б) 2695.

4.152. 79; 4.

4.153. 52.

4.154. 18; –45.

4.155. $7\frac{1}{3}$; $1\frac{7}{12}$.

4.156. 1816.

4.157. 690.

4.158. 33,6.

4.159. 2268.

4.160. 3276.

4.161*. 9; 4.

4.162*. –5.

4.208. а) 4; б) –1; в) 4,8; г) $-3\frac{1}{35}$.

4.209. а) 5; –3125; б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; в) –1; 3; г) $\sqrt{3}$; 27.

4.210. а) 3; б) $-\frac{1}{4}$; в) 2; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

4.212. а) $b_{12}=b_1q^{11}$; б) $b_{12}=b_{11}q$; в) $b_{12}=\frac{b_{15}}{q^3}$; г) $b_{12}=b_7q^5$.

4.213. а) $b_n=5\cdot 2^{n-1}$; $b_4=40$; $b_7=320$; б) $b_n=-1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $b_4=-\frac{1}{27}$; $b_7=-\frac{1}{729}$; в) $b_n=16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $b_4=-2$; $b_7=\frac{1}{4}$; г) $b_n=9\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$; $b_4=81$; $b_7=243\sqrt{3}$.

4.214. 324.

4.215. $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{9}$.

4.216. Нет.

4.217. –4.

4.218. Да.

4.219. 6.

4.220. Да.

4.221. В мае.

4.222. 2; 6 или –2; –6.

4.223. 160; 80; 40; 20; 10; 5.

4.224. 10; 5 или –10; –5.

4.225. а) –1; 3; б) –7; 2.

4.227*. 7; –2 или $1\frac{5}{9}$; –3.

4.228*. а) Да; б) да.

4.229*. 10^{11}.

4.260. а) 2295; б) 61.

4.261. а) 1785; б) 0; в) $780\left(\sqrt{5}+1\right)$.

4.262. За 4.

4.264. $20\frac{2}{9}$.

4.265. а) 205,9; б) 1079,5.

4.266. $-\frac{16}{81}$; $-\frac{55}{81}$.
4.267. 50.
4.268. 3.
4.269. –85.
4.270. 5100.
4.271*. 10.
4.272*. –176.
4.273*. 8; 10; 12 или 17; 10; 3.
4.295. а) 90; б) –28,8.
4.296. а) $156\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{9}$; в) 13,5.
4.297. 2.
4.298. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{17}{33}$; в) $3\frac{26}{99}$; г) $17\frac{172}{495}$.
4.299. $-\frac{1}{3}$.
4.300. 2.
4.301. –32.
4.302*. $\pm\frac{1}{3}$.

Я проверяю свои знания

1. Арифметические прогрессии: б); д). Геометрические прогрессии: а); б); в); г); е). Бесконечно убывающие геометрические прогрессии: в); г).
2. б).
3. а) $a_n = 3{,}2 - 0{,}8n$; $a_{11} = -5{,}6$; б) $b = 3^{n-1}$; $b_6 = 243$.
4. а) 44; б) ±5.
5. а) $a_1 = 22$; $d = -4$; б) –4; 1; –0,25 или 4; 1; 0,25.
6. а) 125; б) 8.
7. а) 77; б) 6.
8. а) $9\frac{1}{3}$; б) $6\frac{361}{495}$.
9. а) 250; б) 2; 4.
10. $2+\sqrt{3}$.

Итоговое повторение

1. а) –20; б) –72; в) $-1\frac{9}{19}$; г) $-\frac{3}{40}$.
2. а) 0,596; б) 9,2; в) 6,6; г) –19,5.
3. а) 3,75; б) 6; в) 25; г) 0,159.
4. а) 11,3243; б) $-\frac{11}{15}$.

5. 2; 5; 11.

6. а) 122 175; 941 220; 977 895; б) 122 175; 188 154; 941 220; 977 895; в) 122 175; 941 220; 977 895; г) 291 523; 510 577.

7. 15.

8. 840.

9. а) Две; б) пять; в) две; г) пятнадцать.

10. $3\frac{1}{6}$.

11. $1\frac{11}{12}$ ч; $1\frac{8}{15}$ ч; $1\frac{11}{20}$ ч.

12. –22.

13. 200 т.

14. 225,5 т.

15. 5 человек;

16. 1,56 т.

17. 24 см^2.

18. 27.

19. $\frac{7}{18}$.

20. 4 дня.

21. 26.

22. а) 0,25; б) $\frac{7}{9}$; в) 4.

23. 324.

24. 68.

25. а) $-2\cdot(-3)^2<1$; б) $-(-2)^{-3}\cdot(-1)^{-4}<1$; в) $\left(\frac{1}{6^{-2}}\right)^{-3}<1$; г) $(-2{,}4)^0=1$.

26. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{128}$; в) –1; г) 25; д) 16; е) 49; ж) 0,2; з) 64; и) $-\frac{64}{729}$; к) 0,2.

27. 9; –12; 15; –1.

28. $3{,}02\cdot10^{-4}$; $3{,}687\cdot10^{12}$; $3{,}4\cdot10^{-10}$; $5{,}7\cdot10^{8}$; $1{,}42833\cdot10^{-4}$; $6{,}50123\cdot10^{7}$.

29. $8\frac{11}{17}$; 3,(2); 5,2.

30. а) 10; б) $-\frac{1}{3}$; в) –0,4.

31. а) –26; б) 4,25.

32. 4; $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$.

33. а).

34. а) Иррациональным; б) рациональным; в) рациональным; г) иррациональным; д) рациональным; е) рациональным.

35. а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$; в) $\frac{5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$.

36. а) $\sqrt{75}$; б) $-\sqrt{20}$ в) $\sqrt{2a^2}$; г) $-\sqrt{7b^2}$; д) $\sqrt{y^3}$; е) $\sqrt{-d^3}$.

37*. $-3ak^2\sqrt{-a}$.

38*. а) 8; б) 2.

39*. а), б).

40*. 12.

41*. $\sqrt{5}-2$.

42. а) –15; б) –54; в) $-1\frac{10}{21}$; г) $-\frac{1}{14}$.

43. а) 0,492; б) 97; в) 7,4; г) –27,5.

44. а) 4; б) 25; в) 0,167.

45. 12; 27; 91; 102.

46. 66.

47. $\left(7-6\frac{5}{6}\right)\cdot\left(6-4\frac{4}{5}\right)<7\cdot 6\frac{5}{6}-6\cdot 4\frac{4}{5}$.

48. $2\frac{5}{6}$.

49. 175.

50. 18 р. 15 к.

51. Дешевле.

52. 29.

53. $\frac{1}{10}$.

54. 4 дня.

55. 34.

56. а) 4; б) 0,04; в) –1,5.

57. а) $\frac{1}{27}$; б) 0,2; в) –1; г) 9; д) 81; е) $\frac{1}{81}$; ж) 0,25; з) 27; и) $-\frac{9}{16}$; к) 0,5.

58. $1{,}230005\cdot 10^7$; $1{,}7\cdot 10^1$; $1{,}58\cdot 10^{-4}$; $9\cdot 10^6$; $7{,}586258\cdot 10^3$; $1{,}32046\cdot 10^1$; $1{,}25\cdot 10^{-1}$; $6{,}9\cdot 10^6$.

59. $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; π.

60. а) 57; б) $-\frac{1}{12}$; в) $-\frac{13}{15}$.

61. а) 21; б) $4\frac{13}{16}$.

62. а) Иррациональным; б) рациональным; в) рациональным; г) иррациональным; д) рациональным; е) рациональным.

63. а) $\frac{\sqrt{15}}{3}$; б) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; в) $3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

64. а) $\sqrt{98}$; б) $-\sqrt{1{,}5}$; в) $\sqrt{5a^2}$; г) $-\sqrt{7b^2}$.

65. а), б), в).

72. –24.

73. $-2a^3b^7$.

74. $3x^2+6x$.

75. а) $-24a^7b^7$; б) $-2m^{14}n^2$.

76. а) $-a^2-3a+10$; б) $15x^2-13x+2$.

77. а) $(x-2)(x-5)$; б) $(2x-1)(x-2)$.

78. $(c-5)(c+5)$.

79. $-40ab^2$.

80. а) $8a^2(b-3c)(b+3c)$; б) $(a+2b)(2-b)$; в) $(2a-b)(2a+b+1)$;
г) $(y-2)^2(y+2)^2$.

81. а) $\frac{y^2}{9}-0{,}25x^2$; б) $9a^2+49y^2$; в) $-ab-11b^2$; г) $-6n+13$.

83. а) $x=-7$; б) $n=0$; $n=4$.

84. а) $-\frac{2b}{5}$; б) $\frac{4n^3}{m^4}$; в) $\frac{2x}{y^4z^3}$; г) $\frac{81x^8y^{16}}{m^{12}}$;

85. $\frac{6a}{(a-b)^2(a+b)}$ и $\frac{-6b}{(a-b)^2(a+b)}$.

86. Верно; получится дробь $\frac{x-3y}{x+3y}$.

87. а) $\frac{1+x}{5}$; б) $\frac{a-3b}{a+3b}$.

88. 1.

89. $\frac{x-2}{x+12}$.

90. а) $\frac{12x}{x-3}$; б) 1; в) $-\frac{x+3}{2x}$.

91. $2x-1$.

92. а) $\frac{2x}{x+y}$; б) $\frac{-10x+2}{3x-1}$; в) $\frac{1}{x-1}$; г) $a-1$.

94. $\frac{1}{5c+1}$.

95. а) $x+9y$; б) $\sqrt{a}$.

96. $\frac{\sqrt{6}+a}{\sqrt{6}-a}$.

97. $1{,}6x$.

98. $-6n^4m^3\sqrt{2}$.

99*. $-\sqrt{-2a^3}$.

100*. 2^{10n+7}.

102*. 0,6.

103*. а) $(3x-a)(y+2)^2$; б) $xy(x+y)(x-y)$; в) $2(a-5b-1)(a-5b+1)$;
г) $(b-4)^2(b+4)^2$; д) $(5-x+a)(5+x-a)$.

104*. 16^n.

105*. а) $-x$; б) $-y$.

106*. а) $-\sqrt{-\dfrac{3}{x}}$; б) $-\sqrt{\dfrac{(n-m)^3}{7}}$.

107*. $\dfrac{x}{x-\sqrt{2}}$.

108*. 2^{4n+2}.

111*. -5.

112*. $x=-0{,}5$; $y=-1$.

113*. а) $(9n^2-6n+2)(9n^2+6n+2)$; б) $(x+2)^2(x^2+6x+4)$.

114*. 0,64.

115*. $\dfrac{2}{3}$.

116*. 2.

117*. $\dfrac{4}{a(a+8)}$.

118*. $10x$.

119*. 4.

120*. $\sqrt{x-1}+5$.

121*. $\sqrt{n+1}-1$.

128. -7.

129. $-1{,}2a^5b^5$.

130. $-5y^2+4$.

131. а) $-54m^4n^8$; б) $-3a^{13}b^2$.

132. а) $-x^2+x+6$; б) $18a^2-15a+2$.

133. а) $(x-2)(x-8)$; б) $3x^2-10x+3$.

134. $(d-6)(d+6)$.

135. а) $y=-5$; б) $m=0$; $m=5$.

136. а) $\dfrac{2n}{7}$; б) $\dfrac{10b^2}{a^3}$; в) $\dfrac{2m^4}{n^2k^4}$; г) $\dfrac{64x^{18}y^{12}}{a^{24}}$.

137. $\dfrac{2x}{y(x^2-y^2)}$ и $\dfrac{2}{x^2-y^2}$.

138. а) $4a^{-10}b^{12}$; б) $14{,}4a^7b^2$; в) $-\dfrac{2x^4}{9a}$; г) $-1{,}5x^4y^{11}$.

139. а) $\dfrac{y^6}{2x^5}$; б) $\dfrac{27x^5}{5y^3}$; в) $-\dfrac{40p}{63}$; г) $\dfrac{18y^3}{x^2}$.

140. $-30bc^2$.

141. а) $5m^2(n-4y)(n+4y)$; б) $(m-2n)(3+n)$; в) $(a+3b)(a-3b+1)$;
г) $(x-3)^2(x+3)^2$.

142. а) $\dfrac{a^2}{49}-0{,}16b^2$; б) $25a^2+49b^2$; в) $-33mn-13n^2$; г) $4m+13$.

144. $\dfrac{y+7}{y-1}$.

145. а) $\dfrac{2x}{x-1}$; б) 1; в) $-\dfrac{x(5+x)}{3}$.

146. а) $4x+y$; б) $-2\sqrt{b}$.

147. 7.

148. а) $-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{-10x+11}{2x+3}$; в) $\dfrac{1}{x+5}$; г) $-b-4$.

150. -4.

151. $\dfrac{\sqrt{3}-m}{\sqrt{3}+m}$.

152. $1{,}5y$.

153. $-5a^2b^5\sqrt{2}$.

154. $-\sqrt{-5b^3}$.

155*. 5^{5n+9}.

157*. 3.

158*. а) $(2a-3b)(x+3)^2$; б) $ab(a+b)(a-b)$; в) $3(n+2m-2)(n+2m+2)$; г) $(a-1)^2(a+1)^2$; д) $(4-b+y)(4+b-y)$.

159*. 49^n.

160*. а) $-5a+b$; б) $a-4b$.

161*. а) $-\sqrt{-\dfrac{1}{2x}}$; б) $-\sqrt{\dfrac{(b-a)^3}{5}}$.

162*. $\dfrac{x}{x+\sqrt{3}}$.

163*. 3^{6m+1}.

166*. 5.

167*. $x=-1$; $y=-2$.

168*. а) $(n^2-6n+18)(n^2+6n+18)$; б) $(x^2+5x+8)(x+4)(x+2)$.

169*. 0,16.

170*. -3.

171*. -11.

172*. $\dfrac{4}{b(b+12)}$.

173*. $\dfrac{4a}{3a-12}$.

174*. 8.

175*. $\sqrt{x-2}+2$.

176*. $\dfrac{\sqrt{5n+1}-1}{5}$.

177. г).
178. г).
179. в).
180. A; B; C.
181. а) 0; б) –7; в) –4; г) невозможно.
182. а) –0,6; б) –1; 10; в) $\frac{1}{2}$; г) 102.
183. $y = 2x - 5$.
184. г).
185. а) $D = \boldsymbol{R}$; б) $D = (-\infty;\ 8) \cup (8;\ +\infty)$; в) $D = \left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right]$; г) $D = \left(-\frac{1}{9};\ +\infty\right)$;
д) $D = \left(\frac{1}{8}; 5\right]$; е) $D = (-5;\ 6)$; ж) $D = [0;\ 4)$.
186. а) $E = [-3;\ 3]$; б) $E = [-2;\ 3]$.
187. а) –3,5; б) нет нулей; в) нет нулей; г) –2,5; 2,5; д) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$;
е) 4; ж) нет нулей.
188. а) $y > 0$ при $x \in (3{,}5;\ +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty;\ 3{,}5)$;
б) $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 1) \cup (6;\ +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (1;\ 6)$;
в) $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ -5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-5;\ 0{,}5)$.
189. г).
190. г).
191. 2.
192. –3.
193*. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
195. а) (–3,5; –13,25); б) (3; 7); в) (3; 23); г) (0; 5).
196. а) $E = [0;\ +\infty)$; б) $E = [-3;\ +\infty)$; в) $E = (-\infty;\ 0]$; г) $E = (-\infty;\ 4]$;
д) $E = (-\infty;\ 0]$; е) $E = (-\infty;\ 16]$.
197. $x_в = -\sqrt{3}$.
198. а) $x = -\frac{1}{2}$; б) $x = 4$; в) $x = 0$.
199. а) $[-3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 3]$; в) $[-1{,}25;\ +\infty)$.
200. а) $[-4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0]$; в) $[1{,}25;\ +\infty)$.
201. а) $\frac{1}{3}$; 3; б) 2; 12; в) $\frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$; г) $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$.
202. (2; 0).
203. 1.
204. а) –6; б) –14; в) 16.
205. –140.
207. (5; 48); (–1; 0).
208. б).
209. в).

210. а).

211. а) Нечетная; б) нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) четная; д)* четная.

212. 8.

213. а) $(3;\ -4)$; $R = 6$; б) $(0;\ -7)$; $R = 3\sqrt{2}$.

214. 10.

215. $(x-3)^2 + (y+16)^2 = 25$.

216. а) $(-4;\ 3)$; $(-4;\ -3)$; б) $\left(2\sqrt{6};\ 1\right)$; $\left(-2\sqrt{6};\ 1\right)$.

217. $[-4;\ -1] \cup [1;\ 6]$.

218. а).

219. г).

220. в).

221. а) 16; б) -21; в) невозможно; г) 2,4.

222. а) 4; б) -1; 25; в) $-\frac{2}{5}$; г) 625.

223. а) $D = (-\infty;\ -5) \cup (-5;\ +\infty)$; б) $D = (-\infty;\ 6)$; в) $D = (-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$; г) $D = [5;\ +\infty)$.

224. а) -1; б) 1; в) -2; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 2; г) 6.

225. а) $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 1{,}8)$; $y < 0$ при $x \in (1{,}8;\ +\infty)$;
б) $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1{,}5;\ +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (1;\ 1{,}5)$;
в) $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2;\ 3)$.

227. 30.

228. 2.

229. ± 3.

231. а) $(3;\ 4{,}5)$; б) $(-5;\ -8)$; в) $(-2{,}5;\ 19{,}75)$; г) $(0;\ 1)$.

232. а) $E = [1;\ +\infty)$; б) $E = (-\infty;\ 6]$; в) $E = [9;\ +\infty)$; г) $E = (-\infty;\ 0]$.

233. а) $x = -\frac{5}{6}$; б) $x = -2$; в) $x = 0$.

234. а) Функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 2]$; функция убывает на промежутке $[2;\ +\infty)$; б) функция возрастает на промежутке $[7;\ +\infty)$; функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 7]$; в) функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0{,}5]$; функция убывает на промежутке $[0{,}5;\ +\infty)$.

235. а) 2; 4; б) нет нулей; в) -7; 3; г) $-\frac{1}{3}$; 0.

236. а) -16; б) 8; в) -4.

238. в).

239. а) $(-6;\ 4)$; $R = 6$; б) $(7;\ 0)$; $R = 4\sqrt{2}$.

241. $x^2 + y^2 = 10$.

242. $(-3;\ 0) \cup (4;\ 6]$.

243. а) 1); 3); б) 4); 5); в) 2); 6).

244. а) 5; б) 19; в) 8; г) $-1{,}5$.

245. а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $\left[\frac{4}{7}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; -0{,}5]$.

246. 2.

247. $y \in \left(-\infty; 1\frac{8}{13}\right]$.

248. а) 2; б) 2; в) 2.

249. а) $x \in (-\infty; 3{,}5)$; б) $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $(-0{,}5; +\infty)$.

250. а) $x \in (-\infty; -2{,}4)$; б) $x \in (-\infty; 4{,}5)$.

251. а) $x \in (1; 3]$; б) $x \in (1; 5{,}8]$.

252. а) $x \in (-\infty; +\infty)$; б) $x \in (1{,}5; +\infty)$.

253. а) $(2; 1)$; б) $(2; 5)$.

254. а) $(2; 1)$; б) $(10; 8)$.

255. а) $(1; 1)$; б) $\left(2\frac{4}{13}; -2\frac{3}{13}\right)$; в) $(13; 11)$; г) $(6; 6)$.

256. а) 0; 1,25; б) -3; 3; в) -12; 0; г) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; д) -3; 0; е) нет корней.

257. а) 2; 8; б) -1; $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) нет корней.

258. а) -4; -3; б) $-2\frac{2}{3}$; 1; в) -2; $2\frac{1}{3}$; г) 1; 5.

259. -35.

260. а) -3; -1; 1; 3; б) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

261. а) $-\sqrt{7}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; б) $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{65}}{2}$.

262. а) $(0; 4)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup [0; +\infty)$; в) $\left(-1\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$; г) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$;
д) $\varnothing$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $\{0{,}5\}$; з) $\left(5-\sqrt{13}; 5+\sqrt{13}\right)$; и) $[-5; 1]$.

263. а) $(-\infty; -2{,}5]$; б) $(0; 7]$; в) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

264. $(-2; 5)$.

265. $[-4; -3) \cup (2; 4]$.

266. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 5] \cup (6; +\infty)$.

267. а) 2; б) 3; в) 1; г) -2; д) -6; -1; е) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; ж) -2; з) нет корней.

268. а) $(-6; 4]$; б) $(-\infty; -6) \cup [3; 5]$; в) $(-\infty; -2] \cup (-1{,}5; 1]$;
г) $(-5; -2) \cup (3; 10)$; д) $[-2; -1) \cup [2; +\infty)$; е) $(-\infty; 2) \cup \{4\}$;
ж) $[8; 10) \cup (10; +\infty)$; з) $(-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$.

269. а) $(-\infty; 0) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \cup [1; +\infty)$;
г) $(-4; -3] \cup (4; +\infty)$; д) $(-\infty; -5) \cup \{1\}$; е) $[-1; 1) \cup (1; 3]$.

270. а) $(3; 10]$; б) $(-1; 3)$; в) $(-\infty; -3) \cup [-2; 0) \cup (0; 3) \cup [5; +\infty)$;
г) $(-\infty; 0] \cup \{1\}$.

271*. а) $-1 \pm \sqrt{6}$; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{53}}{2}$.

272. а) Один корень; б) нет корней; в) бесконечно много корней.

273. а) $4\frac{2}{3}$; б) 5; в) –8; г) $-4\frac{2}{3}$.

274. а) $(-\infty;\ 1)$; б) $(-3;\ +\infty)$; в) $\left[\frac{1}{12}; +\infty\right)$; г) $[5{,}2;\ +\infty)$.

275. 2.

276. $\left[-1\frac{3}{7};\ +\infty\right)$.

277. а) –2; б) 10; в) 0,6.

278. а) $(6;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$; в) $(-\infty;\ 1)$.

279. а) $(-\infty;\ -1]$; б) $(-\infty;\ -2{,}5]$.

280. а) $\left[-1\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{3}\right)$; б) $\left[10;\ 21\frac{2}{3}\right)$.

281. а) $(-\infty;\ -1] \cup [2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$.

282. а) (2; 3); б) (8; 9); в) (20; 3); г) (5; –2).

283. а) $-\frac{3}{7}$; 0; б) –2; 2; в) 0; 35; г) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; д) 0; 4; е) нет корней.

284. а) –4; –1; б) $\frac{1}{5}$; 1; в) $-\frac{1}{5}$; г) нет корней.

285. а) –3; 2; б) 0; 2; в) 2; $2\frac{1}{3}$.

286. а) –4; –1; 1; 4; б) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

287. а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; б) $1 \pm \sqrt{7}$.

288. а) $(-7;\ 0)$; б) $(-\infty;\ -3{,}5] \cup [3{,}5;\ +\infty)$; в) $\{5\}$; г) $(-\infty;\ -\infty)$;
д) $(-\infty; -1] \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; е) нет решений.

289. а) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ 1{,}5]$; б) $[3;\ 5)$; в) $[-4;\ 0)$.

290. $(-\infty;\ -1]$.

291. $[-5;\ -4) \cup (3;\ 5]$.

292. $(-\infty;\ -7) \cup [1;\ +\infty)$.

293. а) –2; б) 4; 5; в) –8; –2; г) –4; д) –1; е) 2; ж) 2; з) –6.

294. а) $\left[-3;\ \frac{2}{7}\right] \cup (5;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ -\sqrt{7}\right) \cup \left[-\sqrt{5};\ \sqrt{6}\right]$; в) $(-6;\ 6) \cup \{7\}$;
г) $(-\infty;\ 2) \cup \{3\} \cup [8;\ +\infty)$.

295. а) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; б) $(-5;\ -4) \cup (-4;\ -1)$.

296. $[-4;\ -3) \cup (-3;\ 1)$.

297. $(-\infty;\ -4] \cup [-2;\ 1)$.

298. 22; 66.

299. 24 км.

300. 900 и 800.

301. 36 и 20.

302. 73,5 м.
303. 7.
304. 10 и 11.
305. 1 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
306. 9 дней.
307. 15 и 11.
308. 12 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
309. 15 ч; 10 ч.
310. $\frac{50}{3}$ мин, 50 мин.
311. 1,5 кг.
312. 1,8 р.
313. 144 и 72.
314. 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
315. 330.
316. 42 и 30.
317. Нет.
318. 12 и 13.
319. 14 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
320. 8 дней.
321. 12 и 9.
322. 5 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
323. 3 дня, 6 дней.
324. Нужно взять 40 т стали с содержанием никеля 5 %.
325. 12,5 кг.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4
Прогрессии

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Арефьева Ирина Глебовна
Пирютко Ольга Николаевна

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*. Разработка макета оформления издания *Н. В. Кузьменковой*. Художественные редакторы *Е. А. Ждановская*, *Е. А. Проволович*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*. Корректоры *В. С. Бабеня, О. С. Козицкая, Е. П. Тхир, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 12.04.2019. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,5 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 15,66 + 0,34 форз. Тираж 116 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

Рациональные выражения

$$\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A}{B}$$

$$\frac{4a^3}{2ab}=\frac{2a^2\cdot 2a}{b\cdot 2a}=\frac{2a^2}{b}$$

$$\frac{a^2-10a+25}{a^2-25}=\frac{(a-5)^2}{(a-5)(a+5)}=\frac{a-5}{a+5}$$

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

$$\frac{5c}{ab}+\frac{c}{ab}=\frac{5c+c}{ab}=\frac{6c}{ab}$$

$$\frac{4a}{a+2}+\frac{8}{a+2}=\frac{4a+8}{a+2}=\frac{4(a+2)}{a+2}=4$$

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

$$\frac{5b}{3a^2}-\frac{2b}{3a^2}=\frac{3b}{3a^2}=\frac{b}{a^2}$$

$$\frac{a}{a-3}-\frac{a+1}{a-3}=\frac{a-a-1}{a-3}=-\frac{1}{a-3}=\frac{1}{3-a}$$

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

$$\frac{3x}{5y}\cdot\frac{m}{4n}=\frac{3x\cdot m}{5y\cdot 4n}=\frac{3mx}{20ny}$$

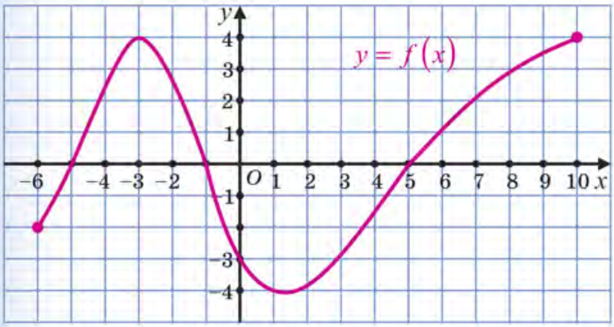
$$\frac{a+1}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2-1}=\frac{(a+1)\cdot b^2}{b(a+1)(a-1)}=\frac{b}{a-1}$$

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

$$\frac{a^2}{c}:\frac{a}{c^2}=\frac{a^2}{c}\cdot\frac{c^2}{a}=\frac{a^2\cdot c^2}{c\cdot a}=ac$$

$$\frac{t+1}{t^2}:\frac{5}{t}=\frac{t+1}{t^2}\cdot\frac{t}{5}=\frac{(t+1)\cdot t}{t^2\cdot 5}=\frac{t+1}{5t}$$

Функции



1) Область определения

$D = [-6; 10]$.

2) Множество значений

$E = [-4; 4]$.

3) Нули функции:

$x = -5; -1; 5$.

4) Промежутки знакопостоянства:

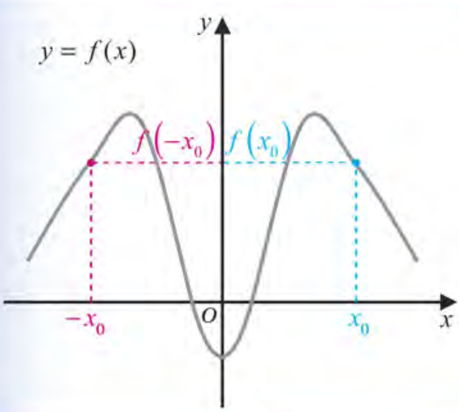
$y > 0$ при $x \in (-5; -1) \cup (5; 10]$; $y < 0$ при $x \in [-6; -5) \cup (-1; 5)$.

5) Функция возрастает на промежутках $[-6; -3]$; $[1,5; 10]$.

Функция убывает на промежутке $[-3; 1,5]$.

6) График функции пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$.

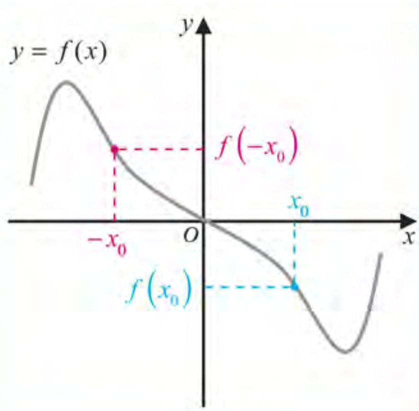
Четная функция



$f(-x) = f(x)$

График четной функции симметричен относительно оси ординат

Нечетная функция



$f(-x) = -f(x)$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат

Дробно-рациональные уравнения и неравенства

Чтобы решить дробно-рациональное уравнение, нужно:

① Перенести все слагаемые из правой части уравнения в левую.

② Преобразовать левую часть уравнения к рациональной дроби.

③ Применить условие равенства дроби нулю.

④ Записать ответ.

Решите уравнение $\dfrac{9x^2-4}{x-1}=\dfrac{5-10x}{1-x}$.

① $\dfrac{9x^2-4}{x-1}-\dfrac{5-10x}{1-x}=0.$

② $\dfrac{9x^2-4}{x-1}+\dfrac{5-10x}{x-1}=0;\ \dfrac{9x^2-4+5-10x}{x-1}=0;$

$\dfrac{9x^2-10x+1}{x-1}=0.$

③ $\begin{cases}9x^2-10x+1=0,\\ x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{9},\\ x=1,\end{array}\right.\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}.$

④ *Ответ*: $\dfrac{1}{9}$.

Чтобы решить рациональное неравенство методом интервалов, нужно:

① Привести неравенство к виду $f(x)>0$ ($f(x)<0,\ f(x)\geq 0,\ f(x)\leq 0$).

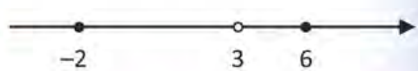
② Найти и отметить на оси абсцисс нули функции и те значения переменной, при которых значения функции не существуют.

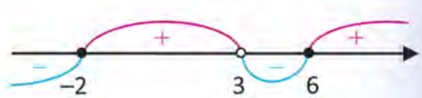
③ Построить схему графика функции.

④ Записать ответ в соответствии со знаком неравенства.

Решите неравенство $\dfrac{(x+2)(x-6)}{x-3}\leq 0.$

① Неравенство имеет вид $f(x)\leq 0$, где $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-6)}{x-3}$.

②


③


④ *Ответ*: $x\in(-\infty;-2]\cup(3;6]$.

Прогрессии

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Формула *n*-го члена	$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при $n \geq 2$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ при $n \geq 2$
Формула суммы *n* первых членов прогрессии	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$ $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n$	$S_n = \dfrac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ при $q \neq 1$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, где $|q| < 1$.

Натуральные степени чисел 2, 3, 4, 5, 6

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187			
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125					
6^n	6	36	216	1296						

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Единицы / *Десятки*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801