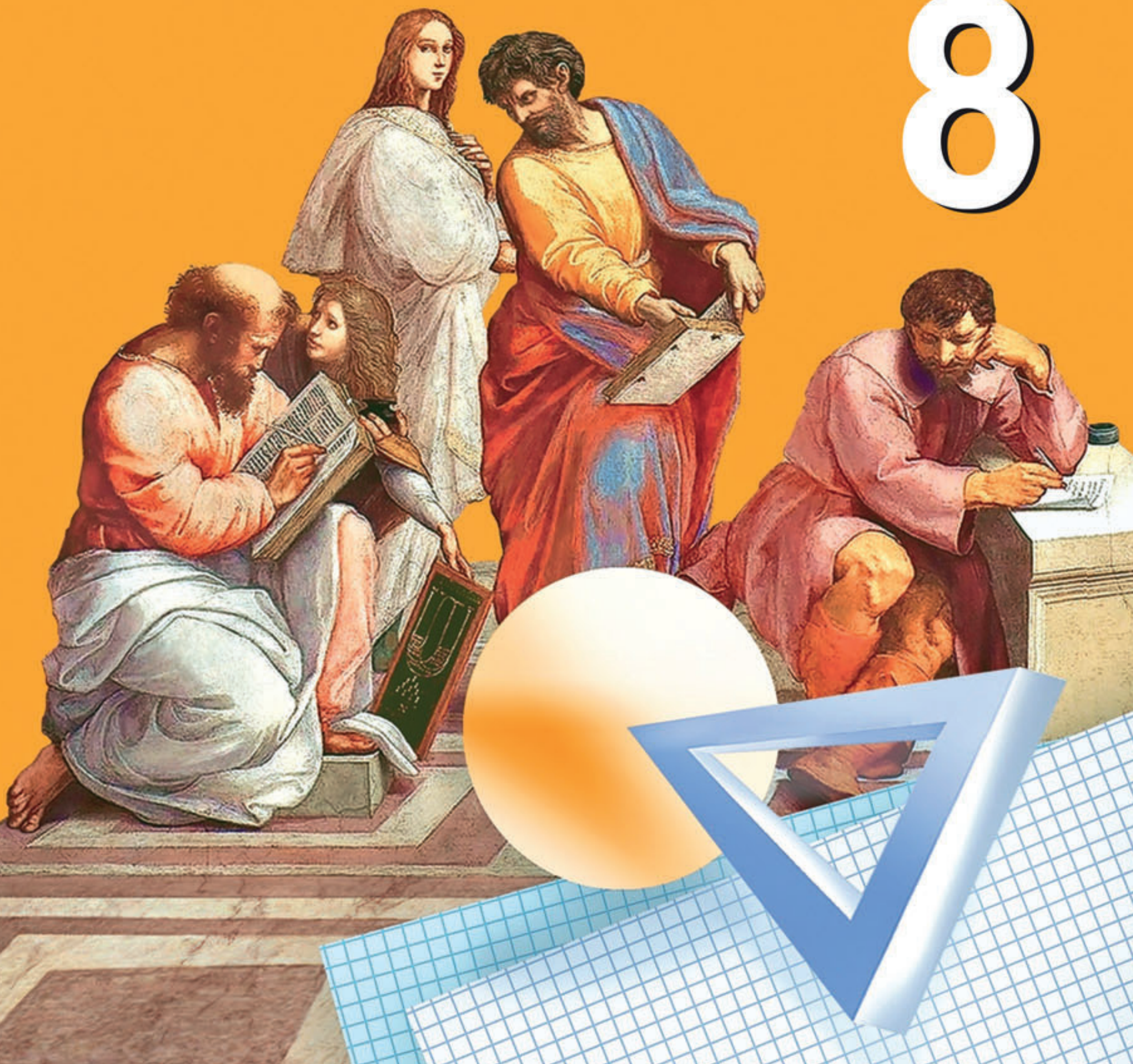
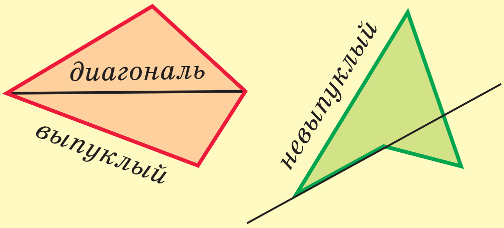
В. В. Казаков

ГЕОМЕТРИЯ

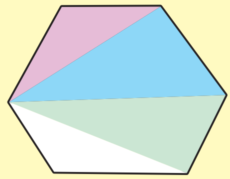
8



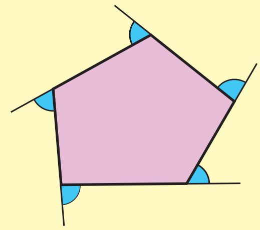
Многоугольники



СУММА УГЛОВ

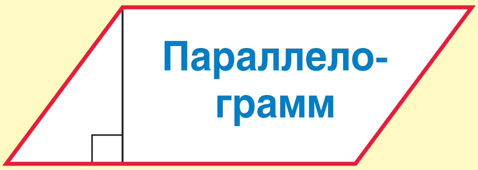


$180° (n - 2)$

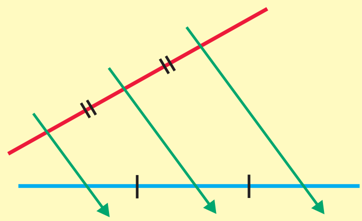


сумма внешних 360°

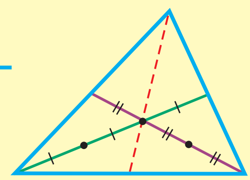
4-угольники



ФАЛЕС (VI в. до н. э.)



МЕДИАНЫ 2 : 1



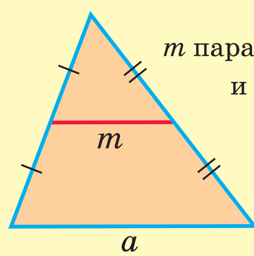
СВОЙСТВА

1. Сумма соседних углов 180°.
2. Диагональ делит на два равных тр-ка.
3. Противоположные стороны равны.
4. Противоположные углы равны.
5. Диагонали делятся пополам.

ПРИЗНАКИ

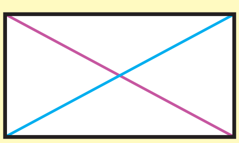
1. Если две стороны 4-ка равны и параллельны…
2. Если противоположные стороны 4-ка равны…
3. Если диагонали 4-ка делятся пополам…

Средняя линия



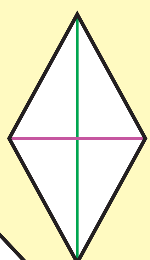
m параллельна a
и $m = \frac{a}{2}$

ПРЯМОУГОЛЬНИК



диагонали равны

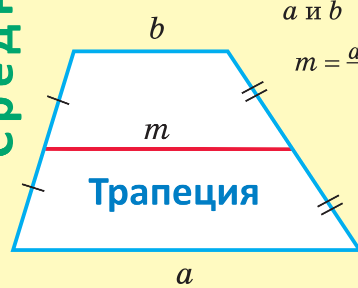
РОМБ



диагонали
1) $\perp$
2) бис.

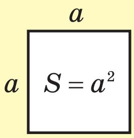
m параллельна
a и b

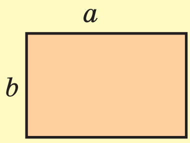
$m = \frac{a+b}{2}$



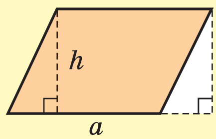
1. Выпуклые мн-ки. Диагональ. Периметр.
2. Сумма углов выпуклого многоугольника.
3*. Сумма внешних углов выпуклого мн-ка.
4. Параллелограмм.
5. Свойства параллелограмма.
6. Признаки параллелограмма.
7. Прямоугольник. Свойство диагоналей.
8*. Признак прямоугольника.
9. Ромб. Свойство диагоналей ромба. Признаки ромба.
10. Квадрат. Свойства квадрата.
11. Теорема Фалеса. Деление отрезка на равные части.
12. Свойство медиан треугольника.
13. Свойство средней линии треугольника.
14. Трапеция. Свойство средней линии.
15. Свойство углов и диагоналей равнобедренной трапеции.
16*. Признаки равнобедренной трапеции.

Площади

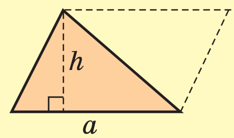




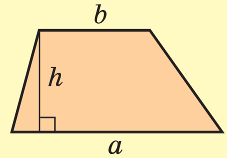
$S = ab$



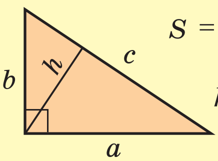
$S = a \cdot h$



$S = \frac{1}{2} a \cdot h$

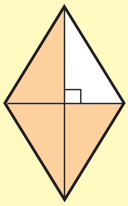


$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = mh$



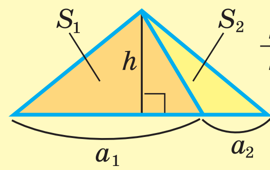
$S = \frac{ab}{2}$

$h = \frac{ab}{c}$



$S = \frac{d_1 d_2}{2}$

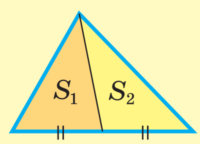
Общая высота



$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2}$

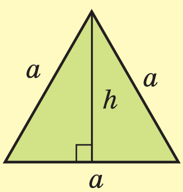
площади относятся как основания

$S_1 = S_2$

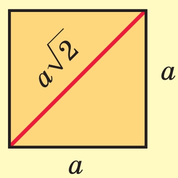


медиана делит на два равновеликих

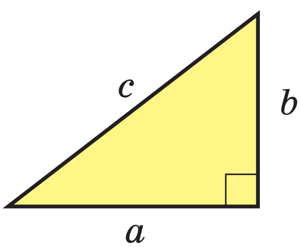
Равносторонний



$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



диагональ квадрата



ПИФАГОР

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Обратная

Пифагоровы тройки:

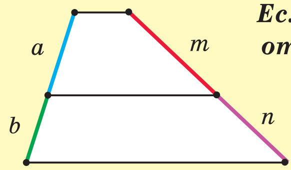
(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17)

1. Площадь квадрата.
2. Площадь прямоугольника.
3. Площадь параллелограмма.
4. Площадь треугольника.
5. **Площадь трапеции.**
6. Площадь ромба.
7. Площадь прямоугольного треугольника.
8. **Высота, проведенная к гипотенузе.**
9. Треугольники с общей высотой.
10. Свойства медианы для площадей.
11. **Теорема Пифагора.**
12. S и h равностороннего треугольника.
13. Диагональ квадрата.
14. Обратная теорема Пифагора.
15. **Пифагоровы тройки.**

Подобные треугольники

Теорема Фалеса (обобщ.)

1. Углы — *равны.*
2. Стороны — *пропорциональны.*

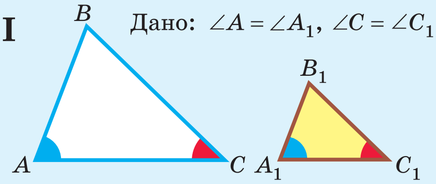


Если на одной стороне угла отложить…

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

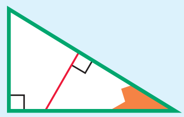
Признаки подобия

I Дано: $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$

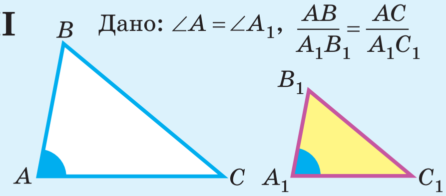


ПО ДВУМ УГЛАМ

Прямоугольные подобны по острому углу

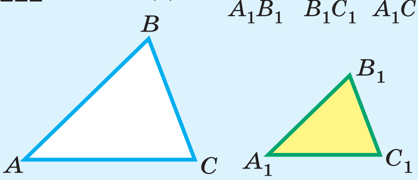


II Дано: $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$



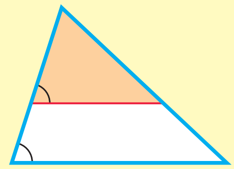
ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

III Дано: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

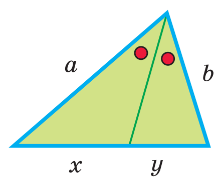


ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному



Свойство биссектрисы треугольника



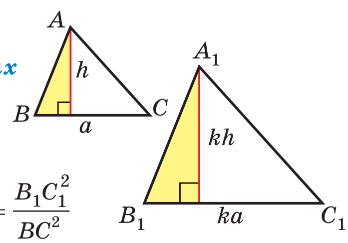
Биссектриса делит…

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

…пропорциональные прилежащим сторонам

Площади подобных треугольников

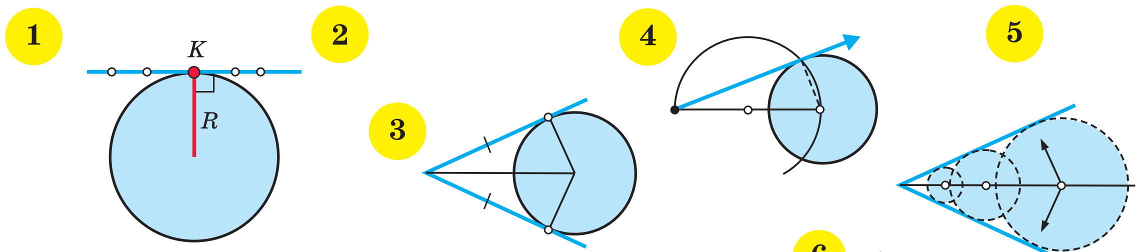
…как квадраты соответствующих сторон



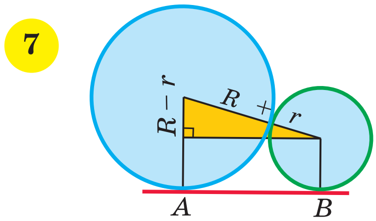
$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}\cdot ka\cdot kh}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h} = k^2 = \frac{B_1C_1^2}{BC^2}$$

1. **Теорема Фалеса (обобщенная).**
2. Деление отрезка в отношении $m : n$.
3. Определение подобных треугольников.
4. Свойство прямой, параллельной стороне тр-ка.
5. **1-й признак подобия. Следствие.**
6. **2-й признак подобия.**
7. **3-й признак подобия.**
8. Свойство биссектрисы треугольника.
9. Отношение площадей подобных треугольников.

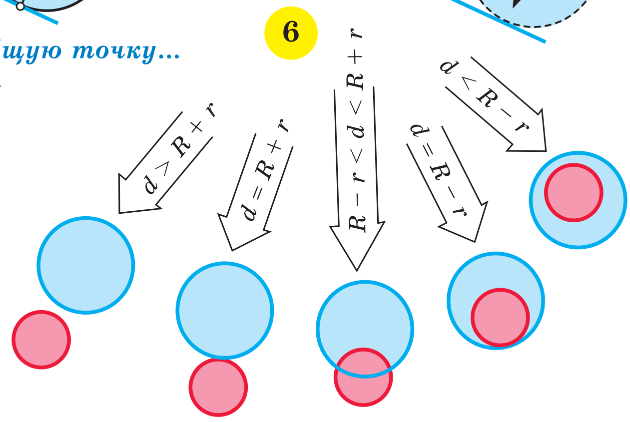
Окружности



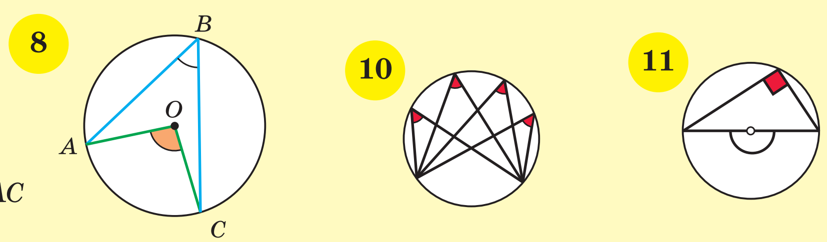
Касательная имеет единственную общую точку…
Радиус перпендикулярен касательной



$$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

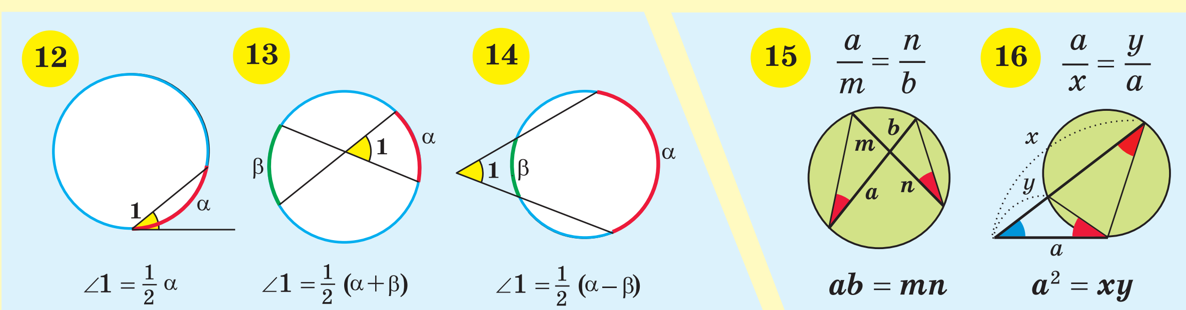


Вписанный – половине центрального угла!



9

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile AC$$



$\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$ $\angle 1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ $\angle 1 = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\frac{a}{m} = \frac{n}{b}$ $ab = mn$

$\frac{a}{x} = \frac{y}{a}$ $a^2 = xy$

1. Касательная. Признак касательной.
2. **Свойство касательной.**
3. **Свойство касательных, проведенных из одной точки.**
4. Построение касательной.
5. Свойство окружностей, вписанных в угол.
6. Взаимное расположение окружностей.
7. Длина отрезка общей внешней касательной.
8. Центральный угол. Градусная мера дуги. Вписанный угол.
9. **Свойство вписанного угла.**
10. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.
11. Вп. угол, опирающийся на диаметр.
12. **Угол между касательной и хордой.**
13. Угол между хордами.
14. Угол между секущими.
15. Свойство пересекающихся хорд.
16. **Свойство касательной и секущей.**

В. В. Казаков

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 8 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

Минск «Народная асвета» 2018

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
К14

В оформлении обложки использован фрагмент фрески
Рафаэля Санти «Афинская школа»

Рецензенты:
кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики
механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(кандидат физико-математических наук, старший преподаватель *Г. О Кукрак*);
учитель математики высшей квалификационной категории
государственного учреждения образования «Несвижская гимназия»
П. М. Романчук

Казаков, В. В.
К14 Геометрия : учебное пособие для 8-го класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В. В. Казаков. — Минск : Народная асвета, 2018. — 199 с. : ил.
ISBN 978-985-03-2939-4.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-2939-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Ребята! В 8-м классе вы продолжите изучение геометрии. Вы уже знаете, что геометрия рассматривает геометрические фигуры и их свойства. Ниже мы вспомним, какие фигуры вы изучили в 7-м классе. А пока посмотрите вокруг себя. Окна, двери, стены зданий — все они имеют прямоугольную форму. Прямоугольник — самая распространенная рукотворная геометрическая форма. Солнце, Луна, планеты, в том числе и наша Земля, срез ствола дерева, форма яблока или апельсина — все это говорит о том, что для природы характерны округлые формы.

В 8-м классе мы изучим и прямоугольники, и окружности.

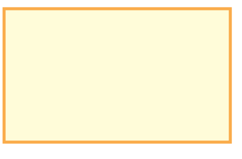
Панорама геометрии 8-го класса

Вам предстоит познакомиться с двумя важными видами четырехугольников: *параллелограммом* и *трапецией*.

Посмотрите на параллелограмм, изображенный на рисунке, и подумайте, почему эта фигура так называется.

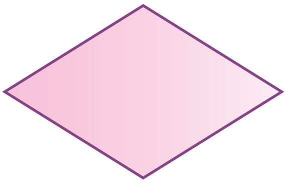
Упомянутый нами *прямоугольник* является частным видом параллелограмма. Прямоугольник — это параллелограмм с прямыми углами. А *квадрат* — частный случай прямоугольника. Это прямоугольник с равными сторонами.

параллелограмм

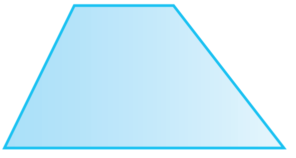


прямоугольник

квадрат

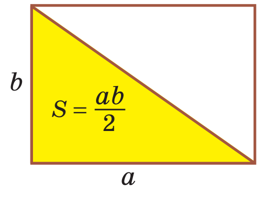


ромб

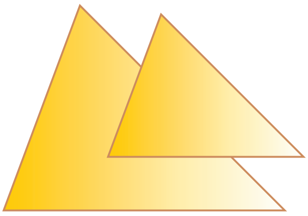


трапеция

Еще одним частным случаем параллелограмма является *ромб* — параллелограмм с равными сторонами. *Трапеция*, в отличие от параллелограмма, имеет только две параллельные стороны.



Во второй главе будут выведены *формулы площадей* некоторых плоских фигур: параллелограмма, треугольника, трапеции. В частности, вы узнаете, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, т. е. $S = \frac{ab}{2}$. Это легко объясняется, например, тем, что прямоугольник со сторонами a и b, площадь которого $S = ab$, разбивается диагональю на два равных прямоугольных треугольника с катетами a и b.



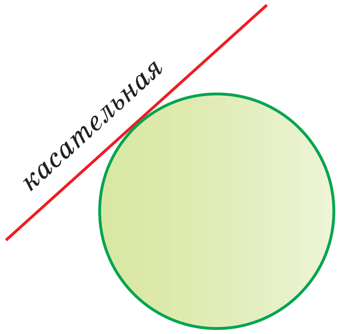
подобные

Далее вы узнаете, какие треугольники называют *подобными*. Это треугольник и его увеличенная или уменьшенная копия.

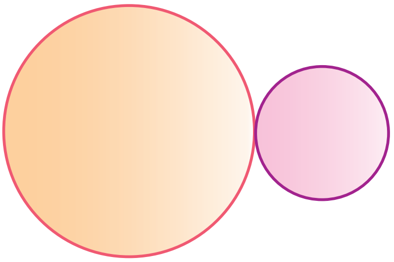
У равных треугольников соответствующие стороны и углы равны. У подобных же треугольников соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны.

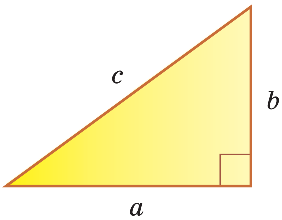
Например, каждая сторона одного из подобных треугольников может быть в 2 раза больше соответствующей стороны другого треугольника.

Завершит курс геометрии 8-го класса глава «Окружность». Древние греки считали окружность самой совершенной фигурой, душой геометрии. Вы узнаете о *касательной* к окружности, о *касающихся* окружностях, о *вписанных* и *центральных* углах окружности, познакомитесь с некоторыми другими свойствами окружностей.



касающиеся окружности





$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Без сомнения, главным событием в геометрии 8-го класса будет ваше знакомство со знаменитой ТЕОРЕМОЙ ПИФАГОРА о свойстве сторон прямоугольного треугольника, которая звучит так: *«Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы»*.

Итак, в учебном пособии «Геометрия, 8 класс» четыре главы. В каждой главе несколько параграфов, каждый из которых содержит:

а) теоретический материал: определения, теоремы и следствия из них;

б) ключевые задачи;

в) задачи для самостоятельного решения.

Ключевые задачи являются образцами, где показаны приемы решения и варианты оформления задач. Поэтому они разбираются учителем вместе с классом. Кроме того, в ключевых задачах рассмотрены дополнительные свойства геометрических фигур.

Все свойства, доказанные в ключевых задачах, относятся к теоретической части. При решении задач можно ссылаться на эти свойства как на известные геометрические факты.

В начале каждой главы приводится *карта главы*, где изображены фигуры, изучаемые в данной главе. Все главы содержат дополнительный материал под рубриками: «**Реальная геометрия**», «**Моделирование**», «**Геометрия 3D**», с которыми вы уже знакомы из курса геометрии 7-го класса.

Внимание!

Задачи для самостоятельного решения в разделе «Решаем самостоятельно», которые не имеют знака (*), представлены во всех пяти уровнях усвоения учебного материала. Они достаточны для оценки результатов учебной деятельности учащихся при осуществлении поурочного контроля с использованием десятибалльной шкалы.

Задачи, отмеченные знаком (*), являются задачами повышенной сложности, многие из них носят олимпиадный и исследовательский характер. Они могут предлагаться учащимся, проявляющим интерес к математике. Сказанное относится и к материалу § 12*, 16*, 24*.

Три секрета успеха в геометрии

Секрет 1. Знание ВСЕХ теорем (в 8-м классе их 39).

Секрет 2. Знание ДОКАЗАТЕЛЬСТВ теорем, указанных в программе по математике (список в конце учебного пособия).

Секрет 3. Умение решить любую КЛЮЧЕВУЮ задачу пособия.

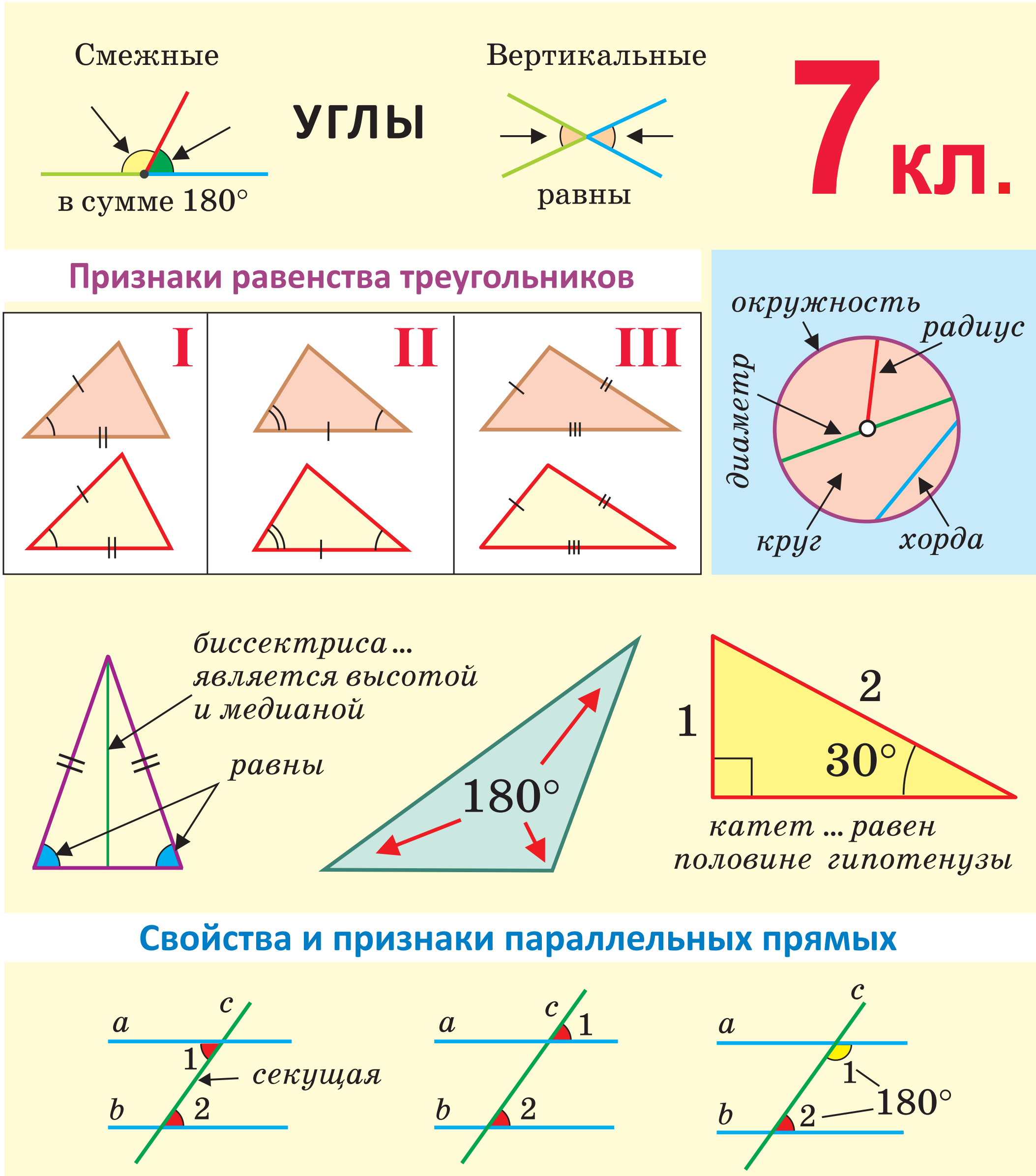
На обложке учебного пособия изображен фрагмент фрески великого итальянского художника эпохи Возрождения Рафаэля Санти «Афинская школа». При помощи **Интернета** выясните, кто изображен на этом фрагменте, как звали стоящую на картине девушку и чем она знаменита.

Желаем вам успехов в освоении геометрии в 8-м классе.

Повторение курса геометрии 7-го класса

В 7-м классе мы познакомились с простейшими геометрическими фигурами и их свойствами. Вспомним некоторые из них.

1) Свойство смежных и свойство вертикальных углов.
2) Признаки равенства треугольников.
3) Свойства и признаки равнобедренного треугольника.
4) Теорема о сумме углов треугольника.
5) Свойства и признаки параллельных прямых.
6) Окружность, радиус, хорда, диаметр, круг.
7) Свойство катета прямоугольного треугольника с углом, равным 30°.



А теперь вы можете проверить уровень своих геометрических знаний, полученных в 7-м классе, решив за 30 минут тест из 10 задач. Выпишите номера выбранных вами ответов, сравните их с ответами одноклассников. Посчитайте набранное вами число баллов: каждая задача оценивается в 10 баллов. Если вы набрали 60 баллов, то ваша отметка «6» баллов, если 100 баллов, то — «10» баллов. Успешного выполнения теста!

Тест по геометрии за 7-й класс

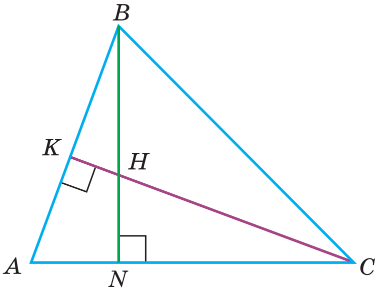
№	Условия задач	Ответы на выбор
1	Один из смежных углов равен 30°. Найдите градусную меру другого угла.	1) 30°; 2) 130°; 3) 150°; 4) 170°.
2	Сумма двух вертикальных углов равна 100°. Найдите величину одного из этих углов.	1) 80°; 2) 50°; 3) 40°; 4) 100°.
3	Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 8 см. Найдите периметр треугольника.	1) 28 см; 2) 20 см; 3) 30 см; 4) 32 см.
4	Два угла треугольника равны 30° и 50°. Найдите третий угол.	1) 90°; 2) 130°; 3) 80°; 4) 100°.
5	Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40°. Найдите угол при основании.	1) 55°; 2) 85°; 3) 70°; 4) 140°.
6	Углы 1 и 2 — накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c. Известно, что $\angle 1 + \angle 2 = 130°$. Найдите величину $\angle 1$.	1) 65°; 2) 70°; 3) 50°; 4) 25°.
7	Внешние углы при двух вершинах треугольника равны 100° и 125°. Найдите внешний угол при третьей вершине.	1) 225°; 2) 45°; 3) 145°; 4) 135°.
8	Из вершины развернутого угла AOB в одну полуплоскость относительно прямой AB проведены лучи OC и OD, луч OC проходит внутри угла AOD, $\angle COD = 70°$. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOD.	1) 60°; 2) 55°; 3) 110°; 4) 125°.
9	Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC, у которого $\angle B = 30°$, $AB = 36$ см, проведена высота CH. Найдите длину отрезка HB.	1) 27 см; 2) 24 см; 3) 18 см; 4) 30 см.
10	На отрезке AB отмечена точка C, где $AC > BC$. Расстояние между серединой отрезка AB и серединой отрезка BC равно 24 см. Найдите длину отрезка AC.	1) 42 см; 2) 36 см; 3) 48 см; 4) нельзя найти.

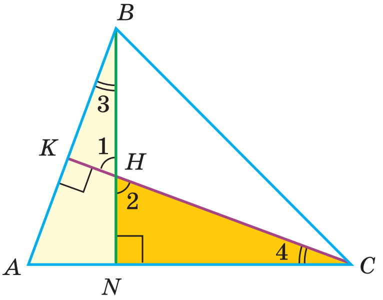
Сейчас ответим на вопрос: КАК РЕШАТЬ СЛОЖНУЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ? Для примера рассмотрим задачу 229* из учебного пособия «Геометрия, 7 класс» и проанализируем, как может происходить поиск решения такой задачи.

Задача 229* (7-й класс). В остроугольном треугольнике ABC высоты BN и CK пересекаются в точке H. Найдите угол ACB треугольника ABC, если $CH = AB$.

Дано: $\triangle ABC$, BN и CK — высоты, $CH = AB$.

Найти: $\angle ACB$.





Анализ поиска решения задачи.

При решении геометрической задачи полезно найти величины всех возможных углов и всех возможных отрезков, а также установить равенство каких-то углов и каких-то отрезков, которое не дано непосредственно в условии задачи. Обратимся к нашей задаче.

1) Самое простое, что можно отметить, так это равенство вертикальных углов 1 и 2. Из прямоугольных треугольников BKH и CNH следует, что $\angle 3 = \angle 4$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$).

2) Снова вернемся к условию задачи и подумаем, как объединить условия: $AB = CH$ и $\angle 3 = \angle 4$. Можно прийти к идее рассмотрения прямоугольных треугольников ANB и HNC. У них равны острые углы 3 и 4 и равны гипотенузы AB и CH. Значит, $\triangle ANB = \triangle HNC$ по гипотенузе и острому углу (признак равенства прямоугольных треугольников).

3) После доказательства равенства треугольников обычно записывают, что следует из этого равенства. В нашем случае: $AN = HN$ и $BN = CN$.

4) Обратимся к тому, что следует найти: $\angle ACB$. Как этот угол связан со сторонами BN и NC? Очевидно, следует рассмотреть $\triangle BNC$. Он равнобедренный ($BN = CN$) и прямоугольный (BN — высота). Тогда $\angle NCB = \angle NBC = 45°$ (углы при основании равнобедренного треугольника равны).

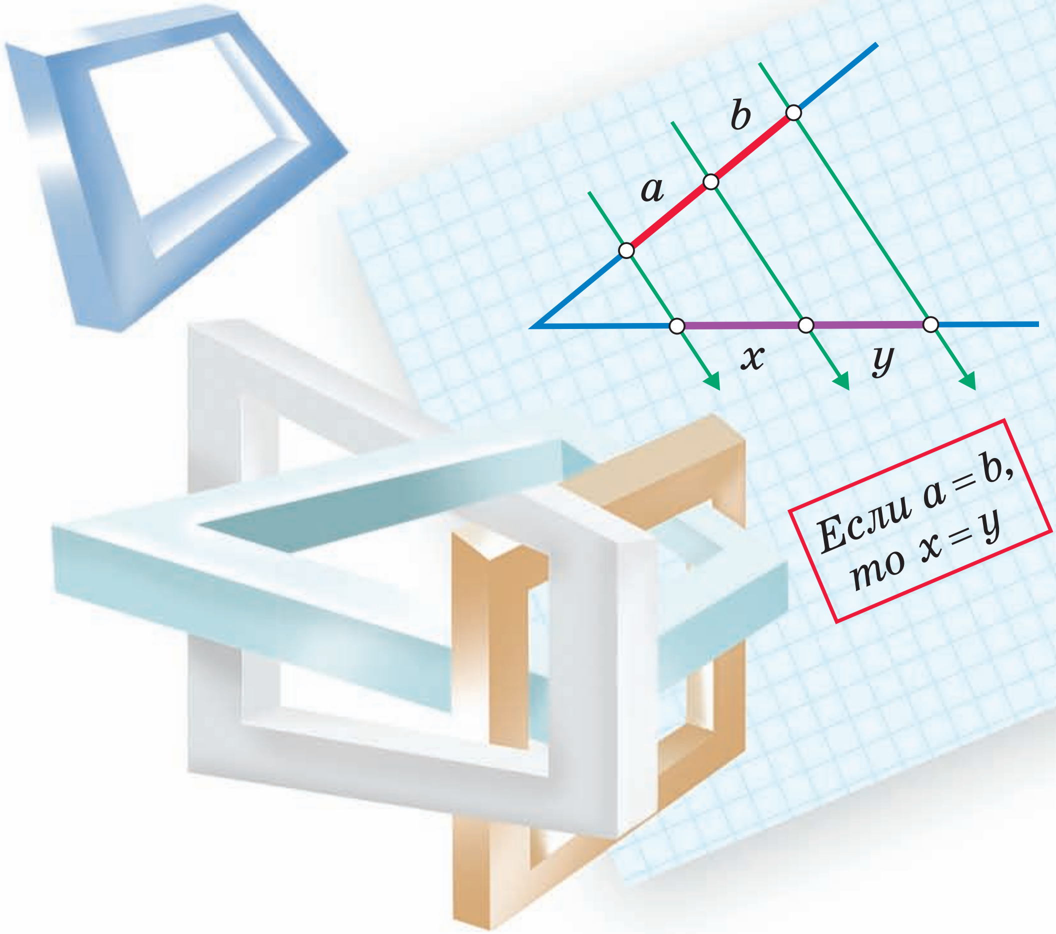
Ответ: $\angle ACB = 45°$.

Глава I

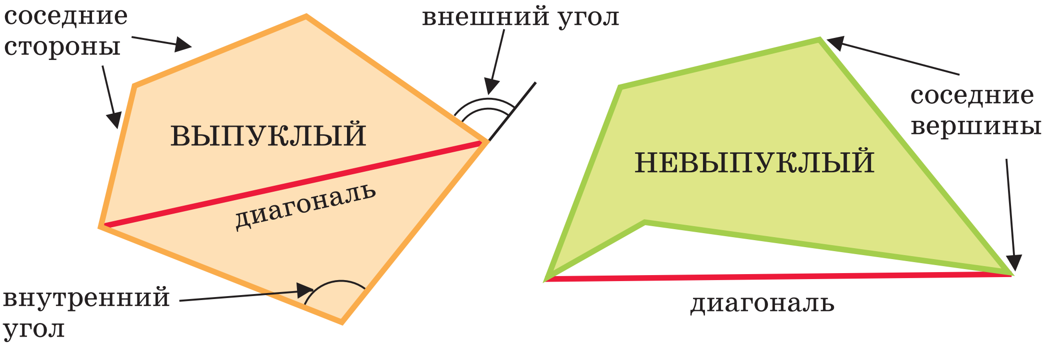
Четырехугольники

В этой главе вы узнаете:

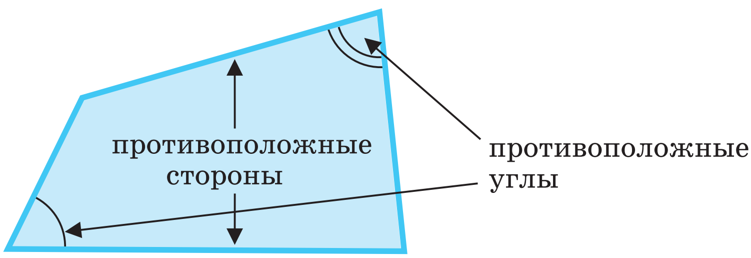
- Виды многоугольников
- Свойства параллелограмма и трапеции
- О чем говорит теорема Фале́са

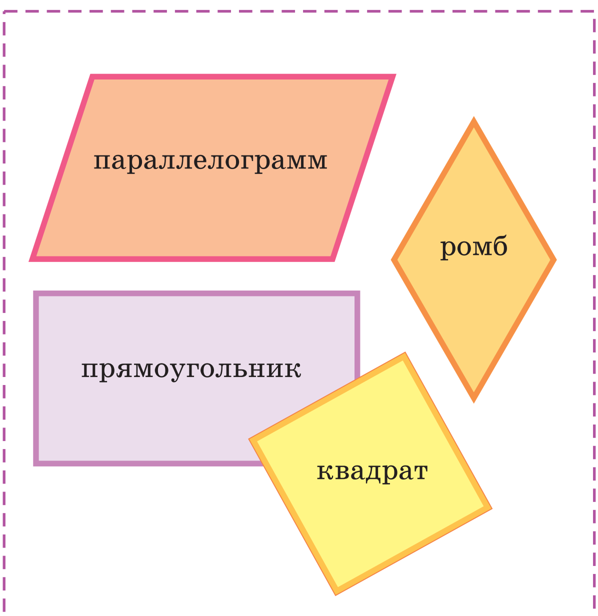


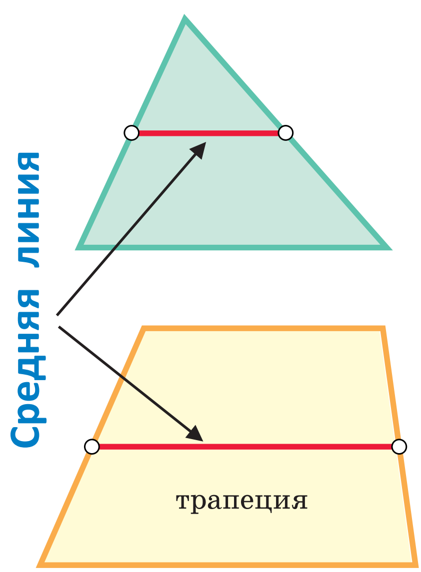
Многоугольники



Четырехугольники







§ 1. Многоугольник

Определение. **Многоугольником** называется простая замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает.

Вершины этой ломаной называются *вершинами многоугольника*, ее звенья — *сторонами многоугольника*. *Периметром многоугольника* называется сумма длин его сторон. По свойству ломаной длина любой стороны многоугольника меньше суммы длин оставшихся сторон.

Определение. Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону. В противном случае он называется невыпуклым.

На рисунке 1, *а*) изображен выпуклый пятиугольник $ABCDE$, на рисунке 1, *б*) — невыпуклый четырехугольник $ABCD$ (вершины A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD). Фигура, изображенная на рисунке 1, *в*), не является многоугольником, так как ломаная $ABCDE$ непростая.

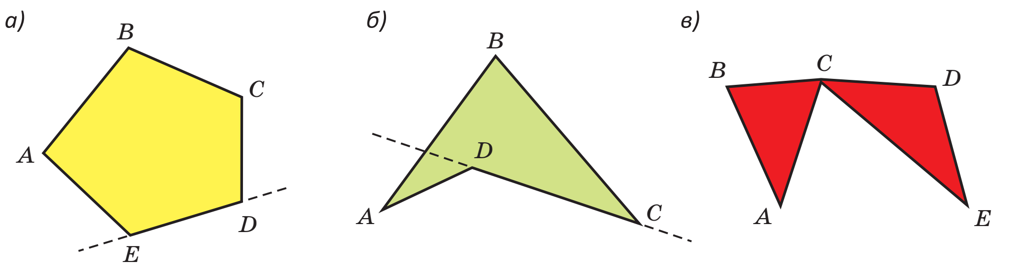


Рис. 1

Стороны многоугольника, имеющие общую вершину, называются *соседними сторонами*; вершины, являющиеся концами одной стороны, — *соседними вершинами*, а углы при этих вершинах — *соседними углами* многоугольника. При этом *углом выпуклого многоугольника* (иногда говорят *внутренним углом*) называется угол между соседними сторонами, содержащий этот многоугольник.

Например, на рисунке 1, *а*) стороны AB и BC — соседние, вершины A и B — соседние, $\angle A$ и $\angle B$ — соседние углы.

Каждый угол выпуклого многоугольника меньше $180°$. Невыпуклый многоугольник имеет, по крайней мере, один угол, больший $180°$.

Определение. **Диагональю** многоугольника называется отрезок, который соединяет две несоседние вершины многоугольника.

У любого четырехугольника четыре стороны, четыре вершины, четыре внутренних угла, две диагонали. Две несоседние стороны называются *противоположными* (или *противолежащими*) сторонами, две несоседние вершины — *противоположными вершинами*, а углы при этих вершинах — *противоположными углами* четырехугольника.

У четырехугольника $ABCD$ (рис. 2, *а*) стороны AB и CD, AD и BC — противоположные, вершины A и C, B и D, а также углы при этих вершинах — противоположные. Отрезки AC и BD — диагонали четырехугольника $ABCD$. Диагональ AC разбивает четырехугольник $ABCD$ на два треугольника ABC и ADC (рис. 2, *б*).

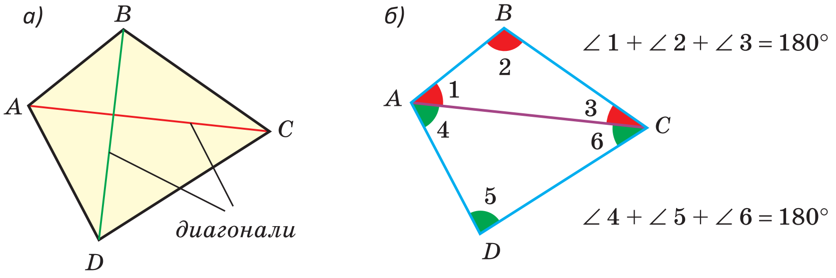


Рис. 2

Сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна сумме углов этих треугольников. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то *сумма углов четырехугольника равна* $180° \cdot 2$, то есть 360°.

Многоугольник, у которого n сторон, имеет n вершин, n углов и называется n-угольником. Выведем формулу, позволяющую находить сумму углов любого выпуклого n-угольника.

Теорема (о сумме углов n-угольника).
Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$.

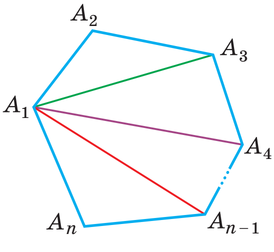


Рис. 3

Дано: $A_1A_2...A_n$ — выпуклый n-угольник.
Доказать: $\angle A_1 + \angle A_2 + ... + \angle A_n = 180°(n - 2)$.
Доказательство. Проведем из вершины A_1 диагонали A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1} (рис. 3). Наш n-угольник разобьется на $n - 2$ треугольника (без учета сторон A_1A_2 и A_1A_n останется $n - 2$ стороны, и на каждую придется по одному треугольнику). В каждом треугольнике сумма углов равна 180°. Сумма всех углов

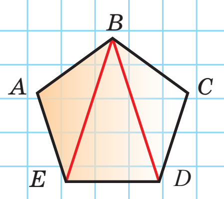
полученных треугольников равна сумме углов данного n-угольника, т. е. $\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots + \angle A_n = 180°(n - 2)$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема справедлива и для невыпуклого многоугольника.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2.**

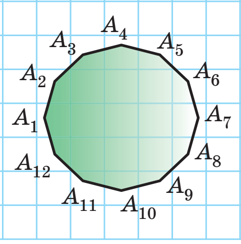
Тест 1

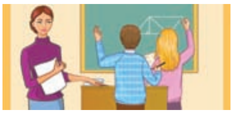
Найдите сумму углов 5-угольника, используя разбиение его на треугольники.



Тест 2

Найдите сумму углов 12-угольника при помощи формулы суммы углов n-угольника.





Задания к § 1

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Сумма углов выпуклого n-угольника равна 3600°. Найти число сторон этого многоугольника* (рис. 4).

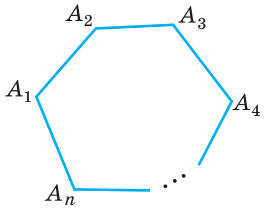


Рис. 4

Решение. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$, где n — число его сторон. По условию $180°(n - 2) = 3600°$, откуда $n - 2 = \frac{3600}{180}$, $n - 2 = 20$, $n = 22$.

Ответ: 22.

Задача 2. *Найти число диагоналей шестиугольника.*

Решение. Пусть $ABCDEF$ — некоторый шестиугольник. Из вершины A можно провести 3 диагонали (рис. 5). Из вершины B также можно провести 3 диагонали. Так как из каждой из шести вершин можно провести по 3 диагонали, то получим $6 \cdot 3 = 18$ «выходящих» диагоналей. При этом каждая диагональ шестиугольника учитывается дважды: вначале для одной, а затем для другой вершины. Поэтому всего диагоналей в 2 раза меньше, то есть $18 : 2 = 9$.

Ответ: 9.

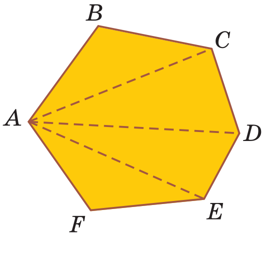


Рис. 5

Замечание. Рассуждая аналогично, можно вывести формулу числа диагоналей n-угольника. Из каждой вершины n-угольника будет выходить $(n - 3)$ диагонали (из данной вершины в нее саму и в две соседние вершины диагонали провести нельзя). Поскольку всего вершин n, то число диагоналей $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$.

Задача 3. *Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с его внутренним углом. Доказать свойство:* ***«Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°».***

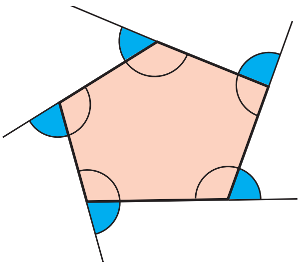


Рис. 6

Доказательство. Чтобы найти сумму внешних (закрашенных) углов выпуклого n-угольника (рис. 6), нужно от суммы развернутых углов, взятых по одному при каждой вершине, отнять сумму его внутренних углов. Получим:

$180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot n - 180° \cdot n + 360° = 360°$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найдите сумму углов выпуклого:

а) шестиугольника; б) десятиугольника; в) семнадцатиугольника.

2. Решите следующие задачи:

а) Найдите $\angle D$ четырехугольника $ABCD$ (рис. 7, *а*);
б) Найдите $\angle C$ пятиугольника $ABCDE$ (рис. 7, *б*);
в) Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$, если у шестиугольника $ABCDEF$ все внутренние углы равны между собой (рис. 7, *в*).

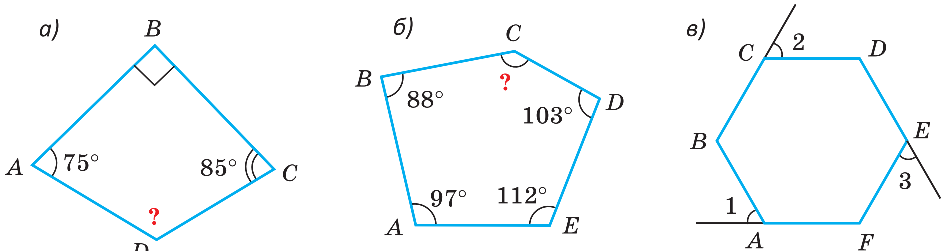


Рис. 7

3. Нарисуйте выпуклый пятиугольник $ABCDE$ и проведите все его диагонали. При помощи формулы $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$ найдите число диагоналей пятиугольника и сравните его с числом диагоналей, проведенных вами.

4. Сумма углов n-угольника равна 900°. Все его стороны равны по 6 см. Найдите периметр этого n-угольника.

5. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, если у него все углы равны и каждый угол содержит:

а) $60°$; б) $108°$; в) $120°$.

6. Найдите углы четырехугольника $MNPK$, если известно, что $\angle M : \angle N : \angle P : \angle K = 2 : 7 : 3 : 8$. Используя транспортир, изобразите такой четырехугольник.

7. а) У четырехугольника два противоположных угла прямые, третий угол на $20°$ меньше четвертого угла. Найдите больший угол четырехугольника.

б) У четырехугольника три угла равны, а четвертый в 2 раза больше каждого из этих углов. Найдите углы четырехугольника.

8. а) Периметр четырехугольника равен 6 м. Одна из сторон равна 120 см, а три оставшиеся стороны равны между собой. Найдите неизвестные стороны четырехугольника в сантиметрах.

б) Периметр четырехугольника равен 78 см, две соседние его стороны относятся как $1 : 3$, третья сторона равна 24 см, а четвертая составляет 75 % третьей стороны. Найдите меньшую сторону четырехугольника.

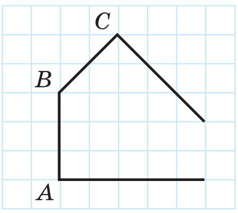


Рис. 8

9. Вершины A, B и C некоторого четырехугольника находятся в узлах тетрадной сетки (рис. 8). Найдите двумя способами величину угла при четвертой вершине четырехугольника, которая недоступна.

10. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше:

а) суммы длин двух его противоположных сторон;
б) его полупериметра.

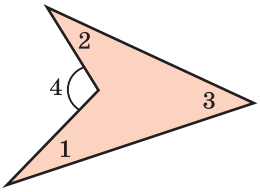


Рис. 9

11. Дан невыпуклый четырехугольник (рис. 9). Докажите, что $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

12. У некоторого выпуклого многоугольника число диагоналей равно числу его сторон. Найдите сумму углов этого многоугольника.

13*. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $\angle A = 80°$, $\angle D = 70°$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C, обращенный к стороне BC.

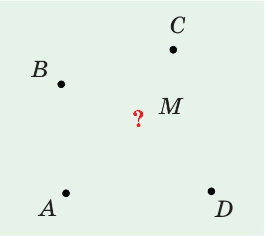


Рис. 10

14*. В точках A, B, C и D расположены магазины (рис. 10). Найдите положение точки M, в которой следует разместить склад, чтобы сумма расстояний от склада до магазинов была наименьшей.

15*. Длины сторон пятиугольника $ABCDE$ выражены целыми числами. Известно, что $AB = 1$ см, $BC = 3$ см, $CD = 5$ см, $DE = 10$ см. Какую наибольшую и какую наименьшую длину может иметь сторона AE?

16*. Определите, какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник.

Реальная геометрия

На рисунке 11 изображена карта с улицами. Улицы Тенистая и Виноградная пересекаются под прямым углом, улица Абрикосовая пересекается с улицей Виноградной под углом 74°, а с улицей Вишневой — под углом 80°.

Задача. Определите, какой угол составляют улицы:

а) Вишневая и Тенистая;

б) Тенистая и Абрикосовая;

в) Виноградная и Вишневая.

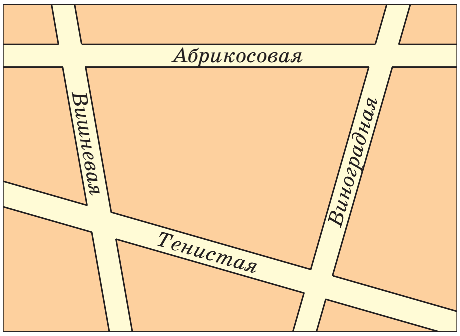


Рис. 11

Три совета: *Как научиться решать задачи по геометрии*

Совет 1. Приступая к решению задачи, желательно прочесть ее условие несколько раз, чтобы ясно понимать, что в задаче дано, а что требуется найти (доказать). Далее следует сделать чертеж (если он не прилагается), как можно более точно соответствующий условию задачи. При этом, если сказано, что дан четырехугольник, не стоит чертить прямоугольник, а если дан произвольный треугольник, то построенные вами равнобедренный или равносторонний треугольники могут привести к неправильным рассуждениям. Следует быть готовым к тому, что придется построить несколько чертежей, чтобы выбрать наиболее подходящий.

Совет 2. Если сразу не удается составить план решения задачи, нужно получить все дополнительные данные, вытекающие из условия. Первым делом необходимо найти величины всех углов и всех отрезков, которые только можно. Затем следует еще раз прочитать, что требуется найти или доказать.

Совет 3. Древние греки говорили: «Чтобы научиться плавать, нужно лезть в воду». Аналогично можно сказать: «Чтобы научиться решать задачи по геометрии, нужно их решать». В учебном пособии число простых задач ограничено объемом пособия. Дополнительные задачи, а также развивающие вопросы размещены в пособии «Наглядная геометрия. 8 кл.» (автор *В. В. Казаков*). Решение большого количества простых и средних по сложности задач на готовых чертежах — лучший способ научиться решать более сложные задачи.

§ 2. Параллелограмм и его свойства

Определение. **Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

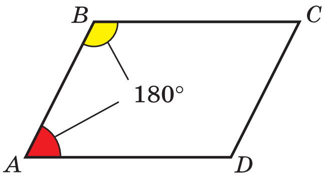
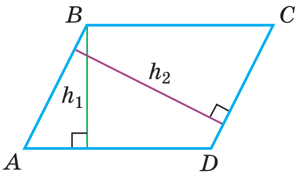


Рис. 12

На рисунке 12 изображен параллелограмм $ABCD$, у него $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

По свойству односторонних углов при параллельных прямых и секущей $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Справедливо свойство: «***Сумма соседних углов параллелограмма равна* 180°**».

Определение. **Высотой параллелограмма** называется перпендикуляр, проведенный из точки прямой, содержащей одну из сторон параллелограмма, к прямой, содержащей противоположную сторону (*основание параллелограмма*).



h_1, h_2 — высоты параллелограмма

Рис. 13

Высотой параллелограмма также называется *длина* указанного перпендикуляра. Все высоты параллелограмма, проведенные к данному основанию, равны между собой как расстояния между параллельными прямыми.

На рисунке 13 высота h_1 параллелограмма $ABCD$ проведена к основанию AD, высота h_2 — к основанию DC. Из свойств параллельных прямых следует, что $h_1 \perp BC$, $h_2 \perp AB$.

Теорема (свойство сторон и углов параллелограмма).
У параллелограмма противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

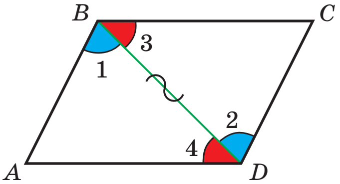


Рис. 14

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 14).
Доказать: $AB = CD$, $BC = AD$; $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
Доказательство. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Проведем диагональ BD. Получим два треугольника ABD и CDB, которые равны по 2-му признаку равенства треугольников (сторона BD — общая, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD). Из равенства

этих треугольников следует, что $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle A = \angle C$. Углы B и D параллелограмма равны как суммы равных углов: $\angle B = \angle 1 + \angle 3$, $\angle D = \angle 2 + \angle 4$. Теорема доказана.

Следствие.

Периметр параллелограмма со сторонами a и b находится по формуле $P = 2(a + b)$.

При доказательстве теоремы получено еще одно свойство параллелограмма: ***«Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника»***.

Теорема (свойство диагоналей параллелограмма).
Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

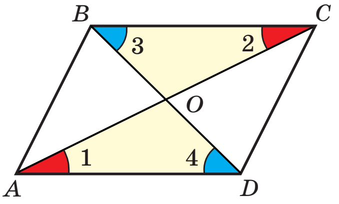


Рис. 15

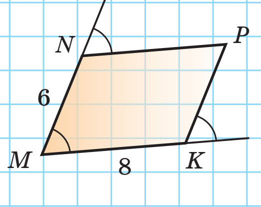
Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 15).
Доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.
Доказательство. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Треугольники AOD и COB равны по 2-му признаку равенства треугольников ($\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD, $AD = BC$ как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства этих треугольников следует, что $AO = OC$, $BO = OD$. Теорема доказана.

Замечание. Точка пересечения диагоналей параллелограмма называется *центром параллелограмма*.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

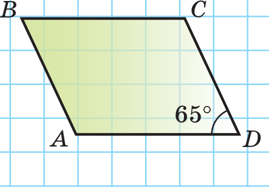
Тест 1

Найдите периметр четырехугольника $MNPK$.



Тест 2

Найдите углы A, B и C параллелограмма $ABCD$.



Внимание!

Если на рисунке к задаче и в ее условии не указана размерность (например, как в **Тесте 1**), то подразумевается, что длины отрезков выражены в одних и тех же единицах. Ответ для этой задачи приводится без размерности.

Задания к § 2

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *ABCD — параллелограмм, BK и BM — его высоты,* $\angle KBM = 60°$, $AK = 3$ *см,* $KD = 7$ *см. Найти:* $\angle ABK$, $\angle A$, *сторону AB, периметр параллелограмма ABCD* (рис. 16).

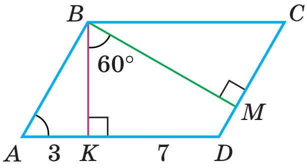


Рис. 16

Решение. Так как $BM \perp AB$, то $\angle ABM = 90°$, $\angle ABK = 90° - 60° = 30°$. В прямоугольном треугольнике ABK $\angle A = 90° - 30° = 60°$. Поскольку в треугольнике ABK катет AK лежит против угла в 30°, то он равен половине гипотенузы. Отсюда гипотенуза $AB = 2AK = 6$ см. Так как $AD = AK + KD = 10$ см, то $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(6 + 10) = 32$ (см).

Ответ: 30°; 60°; 6 см; 32 см.

Замечание. Так как $\angle A$ и $\angle KBM$ дополняют $\angle ABK$ до 90°, то $\angle A = \angle KBM$. Полезно запомнить свойство: ***«Угол между высотами параллелограмма, проведенными из его вершины, равен углу при соседней вершине»***.

Задача 2. *Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K,* $AD = 12$ *см,* $AB = 10$ *см. Найти длину отрезка KC* (рис. 17).

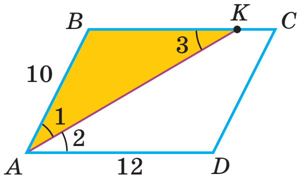


Рис. 17

Решение.

1) $\angle 1 = \angle 2$ (AK — биссектриса);

2) $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей AK);

3) $\angle 1 = \angle 3$, $\triangle ABK$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника);

4) $AB = BK = 10$ см (как боковые стороны равнобедренного треугольника);

5) $BC = AD = 12$ см (как противоположные стороны параллелограмма);

6) $KC = BC - BK = 12 - 10 = 2$ (см).

Ответ: 2 см.

Замечание. По ходу решения задачи доказано свойство: ***«Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник»***.

Задача 3. *Доказать, что любой отрезок с концами на сторонах параллелограмма и проходящий через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой пополам.*

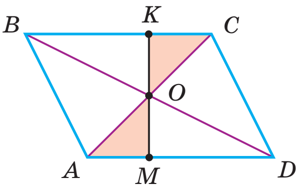


Рис. 18

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, KM — указанный отрезок (рис. 18). Докажем, что $OK = OM$. Рассмотрим $\triangle AOM$ и $\triangle COK$. У них $AO = OC$ (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам), $\angle OAM = \angle OCK$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC), $\angle AOM = \angle COK$ (как вертикальные). Значит, $\triangle AOM = \triangle COK$ (по 2-му признаку равенства треугольников). Из равенства треугольников следует, что $OM = OK$. Утверждение доказано.

Следствие.

Так как точки K и M симметричны относительно точки пересечения диагоналей, то можно сделать вывод, что параллелограмм — центрально-симметричная фигура и центр параллелограмма является его центром симметрии (см. § 12*).

Гимнастика ума

Параллелограмм $ABCD$ разрезали по ломаной линии, соединяющей вершины B и D (рис. 19). Определите, периметр какой части параллелограмма больше: желтой или красной.

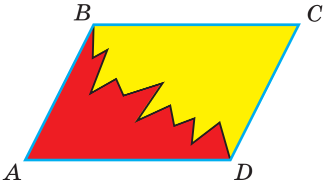


Рис. 19

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

17. Перенесите рисунок 20 в тетрадь. Постройте параллелограмм $ABCD$. Чему равна длина стороны BC? Чем является отрезок BH для параллелограмма $ABCD$? Проведите высоту CM к стороне AD. Почему из равенства $\triangle ABH$ и $\triangle DCM$ следует, что $AB \parallel CD$?

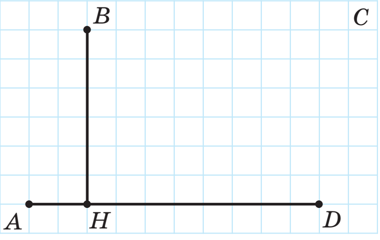


Рис. 20

18. По данным на рисунках 21, *а*)—*г*) докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

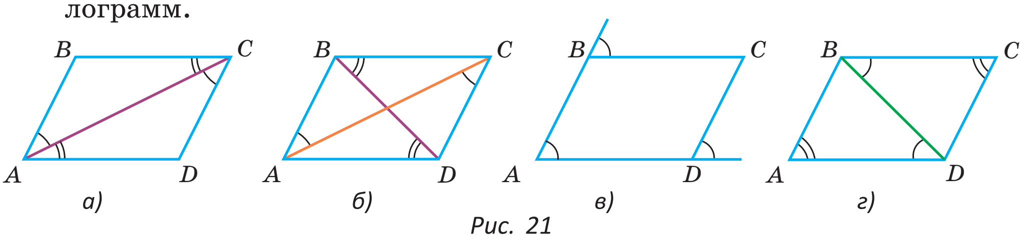


Рис. 21

19. Найдите неизвестные углы параллелограмма $ABCD$, если:

а) $\angle B = 130°$;
б) $\angle A + \angle C = 140°$;
в) угол A на $20°$ меньше угла B;
г) $\angle C : \angle B = 2 : 7$;
д) $\angle BAC = 35°$, $\angle DAC = 25°$.

20. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см. Найдите его стороны, если:
а) $CD = 10$ см;
б) сторона AD на 2 см больше стороны AB;
в) $AB : AD = 3 : 5$;
г) $AB + BC + CD = 32$ см;
д) $\angle BAC = \angle DAC$.

21. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 22). Найдите:
а) периметр треугольника AOB, если $AC = 20$ см, $BD = 16$ см, $CD = 10$ см;
б) периметр параллелограмма $ABCD$, если $AC = 14$ см, $BD = 12$ см, $P_{AOB} = 21$ см, $P_{ABD} = 33$ см.

22. В параллелограмме $ABCD$ $AN = 16$ см, $BP = 7$ см, $KD = 6$ см, $AM = 18$ см (рис. 23). Найдите периметр параллелограмма.

23. В параллелограмме $ABCD$ проведена высота CK, $\angle A = 120°$, $BC = 11$ см, $AK = 7$ см (рис. 24). Найдите периметр параллелограмма.

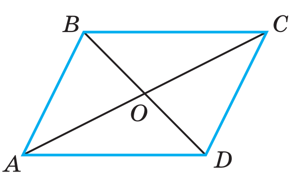


Рис. 22

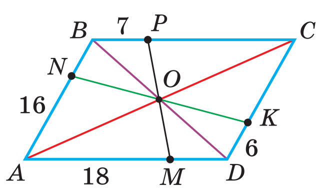


Рис. 23

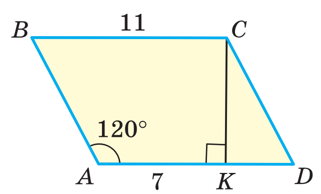


Рис. 24

24. а) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 36 см, периметр треугольника ABC равен 28 см, $\angle ACB = 30°$. Найдите: 1) сторону AC; 2) высоту CK, опущенную на сторону AD.
б) Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB, $P_{ABCD} = 30$ см, $\angle ADC = 120°$. Найдите стороны параллелограмма.

25. а) Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма $ABCD$ ($AD \neq AB$) параллельны между собой.
б) Докажите, что биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны.

26. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC на отрезки $BK = 6$ см, $KC = 4$ см. Найдите периметр параллелограмма.

27. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, которая принадлежит стороне AD. Найдите периметр параллелограмма, если $KD = 8$ см.

28. Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC = 12$ см (рис. 25). Найдите периметр параллелограмма $MBNK$.

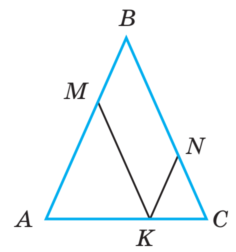


Рис. 25

29. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$, $\angle ABC = 104°$, $\angle BAM = 38°$. Найдите величину угла CDM.

30. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A, AH и AK — высоты, проведенные к сторонам BC и CD соответственно. Докажите, что $\angle HAK = \angle B$.

31*. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK, $KE \parallel AC$, $EH \parallel BC$ (рис. 26). По размерам на рисунке найдите длину отрезка HC.

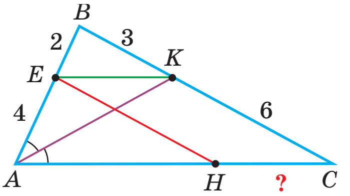


Рис. 26

32*. Найдите алгоритм построения с помощью циркуля и линейки параллелограмма:

а) по двум соседним сторонам и углу между ними;

б) по двум соседним сторонам и высоте, проведенной к одной из сторон.

33*. Сформулируйте какой-нибудь признак равенства параллелограммов и докажите его. (Фигуры равны, если их можно совместить наложением.)

34*. Дан угол A и точка M внутри него. Постройте при помощи циркуля и линейки отрезок с концами на сторонах угла A, проходящий через точку M, который делится точкой M пополам.

§ 3. Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

> Теорема (признак параллелограмма).
> **Если у четырехугольника две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.**

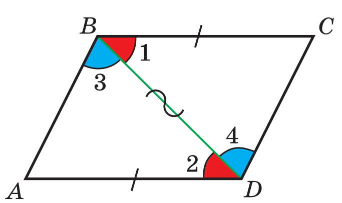


Рис. 27

Дано: четырехугольник $ABCD$,
$BC = AD$, $BC \parallel AD$.

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 27).

Доказательство. Проведем в четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD. Треугольники ABD и CDB равны по 1-му признаку равенства треугольников ($AD = BC$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и

AD и секущей BD, сторона BD — общая). *Из равенства треугольников следует, что* $\angle 3 = \angle 4$. А так как $\angle 3$ и $\angle 4$ по своему расположению — накрест лежащие углы при прямых AB и CD и секущей BD, то $AB \parallel CD$ (по признаку параллельности прямых). Таким образом, у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны параллельны. Поэтому $ABCD$ — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

Теорема (признак параллелограмма).
Если у четырехугольника противоположные стороны равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

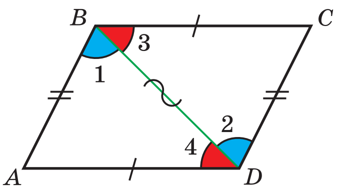


Рис. 28

Дано: четырехугольник $ABCD$,
$BC = AD$, $AB = CD$.
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 28).
Доказательство. Проведем диагональ BD. Треугольники ABD и CDB равны по трем сторонам ($AD = BC$, $AB = CD$ по условию, сторона BD — общая). *Из равенства треугольников следует*, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. А так как $\angle 3$ и $\angle 4$ — накрест лежащие углы при прямых BC и AD и секущей BD, то $BC \parallel AD$ (по признаку параллельности прямых). Аналогично, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы при прямых AB и CD и секущей BD, то $AB \parallel CD$. Поскольку у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны параллельны, то $ABCD$ — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

Теорема (признак параллелограмма).
Если у четырехугольника диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

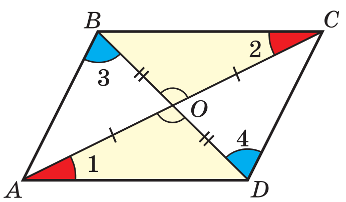


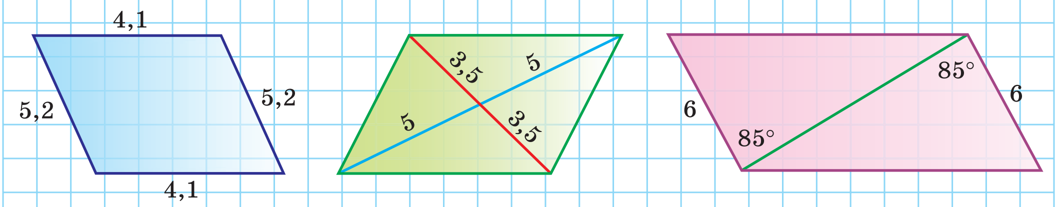
Рис. 29

Дано: четырехугольник $ABCD$,
$AO = OC$, $BO = OD$.
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 29).
Доказательство. Треугольники AOD и COB равны по 1-му признаку равенства треугольников ($\angle AOD = \angle COB$ как вертикальные, $AO = OC$, $BO = OD$ по условию). *Из равенства треугольников следует*, что $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей AC. По признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Аналогично, треугольники AOB и COD равны по 1-му признаку равенства треугольников, откуда $\angle 3 = \angle 4$, $AB \parallel CD$. Так как у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны параллельны, то он — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2.**

Тест 1

Объясните, почему каждый из изображенных на рисунках четырехугольников является параллелограммом.



Тест 2

Верно ли утверждение: «Если у четырехугольника две противоположные стороны равны, а две другие параллельны, то это параллелограмм»? Если ваш ответ «нет», то приведите *контрпример* (пример, опровергающий это утверждение).

Задания к § 3

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Дан параллелограмм ABCD. На его сторонах BC и AD отложены равные отрезки BK и DM. Доказать, что AKCM — параллелограмм.*

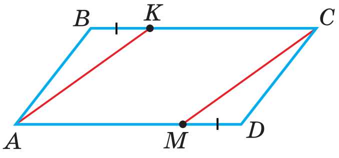


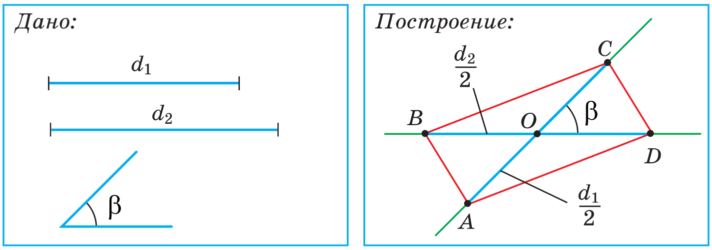
Рис. 30

Доказательство. У любого параллелограмма противоположные стороны равны и параллельны. Поэтому $AD = BC$ и $AD \parallel BC$ (рис. 30). Так как $KC = BC - BK$, $AM = AD - DM$ и по условию $BK = DM$, то $KC = AM$. Поскольку у четырехугольника $AKCM$ стороны KC и AM равны и параллельны, то он является параллелограммом по признаку параллелограмма.

Задача 2. *Построить при помощи циркуля и линейки параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.*

Решение. Пусть d_1 и d_2 — данные диагонали, β — угол между ними (рис. 31, *а*).

Построение. Делим каждую из диагоналей d_1 и d_2 пополам (вспомните, как это делается при помощи циркуля и линейки). Строим угол O,



а) *б)*

Рис. 31

равный углу β (вспомните алгоритм построения). На сторонах угла O и на их продолжениях откладываем отрезки $OC = OA = \frac{d_1}{2}$ и $OD = OB = \frac{d_2}{2}$ (рис. 31, *б*). Проводим отрезки AB, BC, CD и AD. Четырехугольник $ABCD$ — искомый параллелограмм.

Доказательство. У четырехугольника $ABCD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам (по построению), поэтому он параллелограмм (по признаку параллелограмма). Диагонали AC и BD равны d_1 и d_2, и угол AOB между диагоналями равен β (по построению).

Задача 3. *Доказать, что высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.*

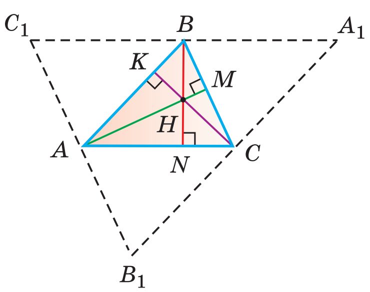


Рис. 32

Доказательство. Пусть AM, BN и CK — высоты треугольника ABC (рис. 32). Через вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные противолежащим сторонам. В их пересечении получим треугольник $A_1B_1C_1$. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, то ABA_1C — параллелограмм, откуда $BA_1 = AC$. Аналогично AC_1BC — параллелограмм и $C_1B = AC$. Тогда $C_1B = BA_1$. Значит, точка B — середина отрезка A_1C_1. Так как $AC \parallel A_1C_1$ и $BN \perp AC$, то $BN \perp A_1C_1$ (прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой). Прямая BN — серединный перпендикуляр к стороне A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что прямые AM и CK — серединные перпендикуляры к сторонам B_1C_1 и A_1B_1 соответственно. А мы знаем, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (7-й кл., с. 81, задача **2**). Следовательно, высоты AM, BN и CK (или их продолжения в случае тупоугольного треугольника) пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.

При помощи **Интернета** выясните, как в математике называется точка пересечения высот.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

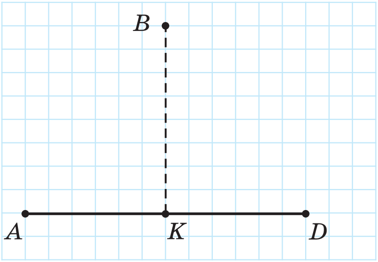


Рис. 33

35. Перенесите рисунок 33 в тетрадь. Проведите (вправо) отрезок BC, равный и параллельный отрезку AD. Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Найдите приближенно периметр параллелограмма $ABCD$ в сантиметрах.

36. Докажите, что на рисунках 34, *а)*—*г)* $ABCD$ — параллелограмм.

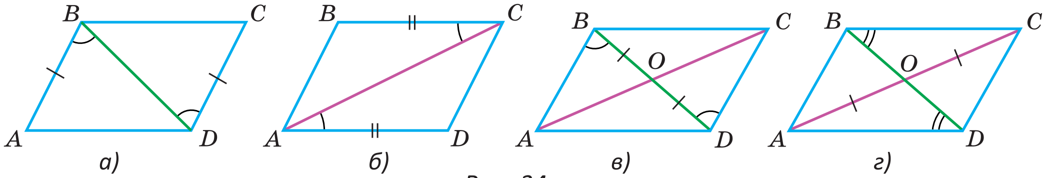


Рис. 34

37. Используя данные на рисунках 35, *а)*—*в)*, ответьте на следующие вопросы:

а) Почему на рисунке 35, *а)* $AD \parallel BC$?
б) Почему на рисунке 35, *б)* $\angle A = \angle C$?
в) Почему на рисунке 35, *в)* $\angle ADC + \angle DCB = 180°$?

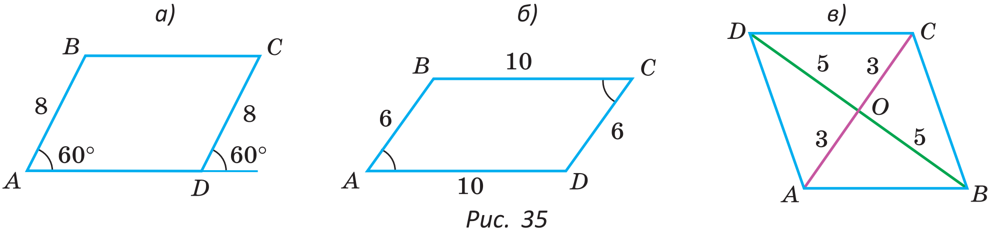


Рис. 35

38. По данным на рисунке 36 найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

39. Отрезки AC и BD (рис. 37) пересекаются в их серединах. Известно, что $\angle DAB = 126°$. Найдите $\angle ADC$.

40. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 38). На его диагонали BD отложены равные отрезки BG и DF. Докажите, что четырехугольник $AGCF$ — параллелограмм.

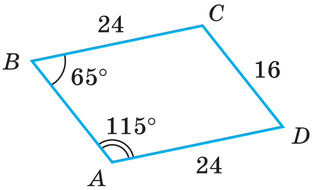


Рис. 36

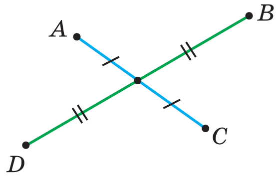


Рис. 37

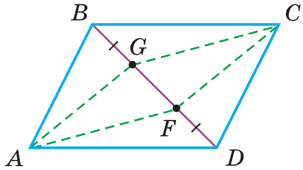


Рис. 38

41. $ABCD$ — параллелограмм, K — середина стороны AB, M — середина стороны DC. Докажите, что:
а) $AKMD$ — параллелограмм; б) $KBMD$ — параллелограмм.

42. $MNPK$ — четырехугольник, $MN = PK$, $NP = MK$, $\angle M = 72°$. Найдите:
а) градусные меры углов MKP и NPK;
б) угол между биссектрисой угла K и прямой NP.

43. У выпуклого четырехугольника $ABCD$ $AB = CD = 52$ см, $\angle ABD = \angle CDB$, диагонали пересекаются в точке O, $P_{ABO} = 138$ см, $P_{BOC} = 188$ см. Найдите периметр этого четырехугольника.

44. Докажите, что если у четырехугольника противоположные углы равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

45. Медиану BM треугольника ABC продолжили за точку M на отрезок MD, равный отрезку BM. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

46. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 39), $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$, $DD_1 = CD$, $AA_1 = DA$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

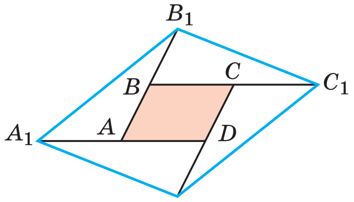


Рис. 39

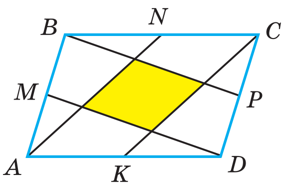


Рис. 40

47. Точки M, N, P, K — середины сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 40). Докажите, что закрашенный четырехугольник — параллелограмм.

48. Точки $P(-1; 1)$, $E(-3; 5)$, $K(4; 5)$ — вершины параллелограмма. Найдите координаты четвертой вершины G. Рассмотрите все варианты.

49*. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 10$ см, $AD = 16$ см. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, а биссектрисы углов C и D — в точке M. Точки K и M лежат внутри параллелограмма. Найдите длину отрезка MK.

50*. Найдите алгоритм построения циркулем и линейкой параллелограмма $ABCD$:
а) по двум диагоналям и стороне;
б) по двум диагоналям и высоте параллелограмма.

51*. В треугольнике ABC высоты BH и AF пересекаются в точке O. Из точки C к прямой AC в одну полуплоскость с точкой B восстановлен перпендикуляр CK, равный отрезку BO. Докажите, что $BK \perp AB$.

Моделирование

Известно, что если выпуклый четырехугольник разрезать по средним линиям (отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон четырехугольника), то из полученных частей всегда можно сложить параллелограмм.

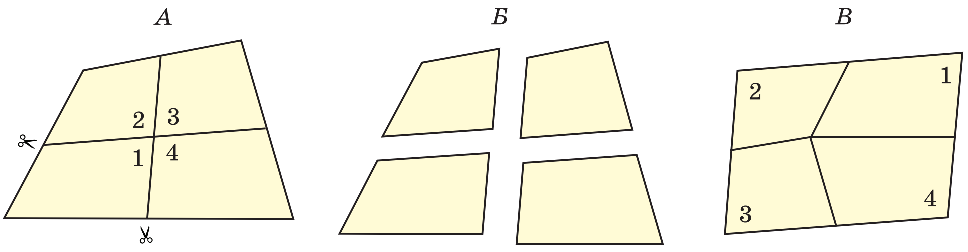


Рис. 41

Задание.

1. Вырежьте из листа бумаги произвольный выпуклый четырехугольник. Отметьте при помощи линейки середины его сторон. Соедините середины противоположных сторон отрезками (рис. 41, *А*).

2. Разрежьте четырехугольник при помощи ножниц по полученным средним линиям (рис. 41, *Б*).

3. Из полученных четырех частей четырехугольника сложите параллелограмм (рис. 41, *В*).

4*. Докажите, что из указанных частей любого выпуклого четырехугольника всегда можно сложить параллелограмм.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение параллелограмма.
2. Определение высоты параллелограмма.
3. Свойства параллелограмма.
4. Признаки параллелограмма.

Умеем

1. Доказывать свойства параллелограмма.
2. Доказывать признаки параллелограмма.

§ 4. Прямоугольник

Определение. **Прямоугольником** называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Заметим, что если у некоторого параллелограмма один угол прямой, то и остальные три угла будут прямыми, поскольку сумма соседних углов параллелограмма равна 180°. Таким образом, *параллелограмм, у которого есть прямой угол, является прямоугольником*.

Так как прямоугольник — частный случай параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Однако у прямоугольника есть и отличительное для него свойство. Сформулируем это свойство в виде теоремы.

Теорема (свойство диагоналей прямоугольника).
Диагонали прямоугольника равны.

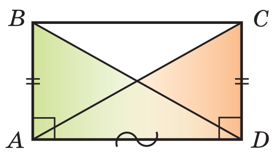


Рис. 42

Дано: $ABCD$ — прямоугольник (рис. 42).
Доказать: $AC = BD$.
Доказательство. Прямоугольные треугольники ABD и DCA равны по двум катетам: катеты AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, катет AD — общий. Отсюда $AC = BD$. Теорема доказана.

Теорема (признак прямоугольника).
Если у параллелограмма диагонали равны, то это прямоугольник.

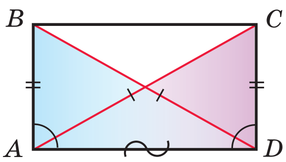


Рис. 43

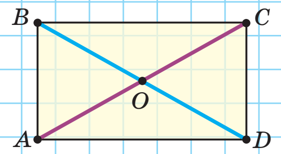
Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC = BD$.
Доказать: $ABCD$ — прямоугольник (рис. 43).
Доказательство. Треугольники ABD и DCA равны по трем сторонам: $AB = CD$ по свойству параллелограмма, $AC = BD$ по условию, сторона AD — общая. Отсюда $\angle BAD = \angle CDA$. Так как сумма соседних углов параллелограмма равна 180°, то $\angle BAD = \angle CDA = 90°$, $\angle ABC = \angle BCD = 90°$. У параллелограмма $ABCD$ все углы прямые, поэтому он — прямоугольник. Теорема доказана.

Замечание. Прямоугольники, в частности, равны, если равны их стороны, так как в этом случае прямоугольники можно совместить наложением.

А теперь выполните **Тест 1**, **Тест 2** и **Тест 3**.

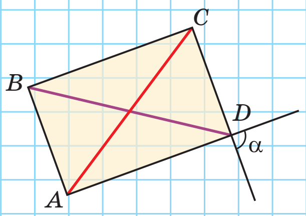
Тест 1

Если $ABCD$ — прямоугольник и $AO + BO + CO = 24$ см, то $BD = \ldots$



Тест 2

Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $\alpha = \ldots$



Тест 3

Верно ли утверждение: «Если у четырехугольника диагонали равны, то это прямоугольник»? Если нет, то приведите контрпример.

Гимнастика ума

1. В прямоугольнике провели два отрезка, перпендикулярные его сторонам (рис. 44). Какое максимальное число прямоугольников можно насчитать на рисунке?

2. В прямоугольнике $ABCD$ провели два отрезка (рис. 45), параллельные его сторонам. По указанной длине малых отрезков найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

3. Из четырех равных прямоугольников с периметром 24 см каждый сложили квадрат $ABCD$ (рис. 46). Найдите периметр квадрата $ABCD$.

Рис. 44

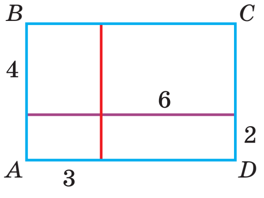


Рис. 45

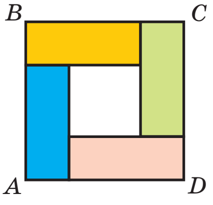


Рис. 46

Задания к § 4

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что если у четырехугольника все углы прямые, то он является прямоугольником.*

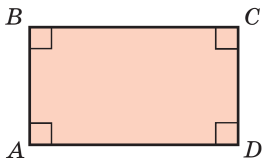


Рис. 47

Доказательство. Пусть у четырехугольника $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle D = \angle C = 90°$ (рис. 47). Так как $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle A + \angle D = 180°$, то $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$ по признаку параллельности прямых. Тогда $ABCD$ — параллелограмм по определению. А параллелограмм, у которого все углы прямые, — это прямоугольник.

Замечание. Итак, многоугольник является прямоугольником, если это:
1) параллелограмм, у которого все углы прямые;
2) параллелограмм, у которого есть прямой угол;
3) четырехугольник, у которого все углы прямые;
4) параллелограмм, у которого диагонали равны.

Задача 2. *Доказать теорему: **«Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы».***

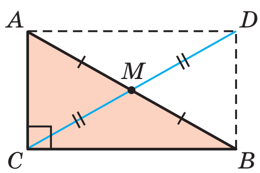


Рис. 48

Доказательство. Пусть CM — медиана $\triangle ACB$, где $\angle C = 90°$ (рис. 48). Продлим медиану CM за точку M на ее длину. Получим $CM = \frac{1}{2}CD$. Так как у четырехугольника $CADB$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, то это параллелограмм по признаку параллелограмма. Параллелограмм, у которого есть прямой угол, является прямоугольником. Поэтому $CADB$ — прямоугольник. Так как диагонали прямоугольника равны, то $CD = AB$ и $CM = \frac{1}{2}AB$. Что и требовалось доказать.

Докажите аналогичным способом обратную теорему: **«Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный».**

Задача 3. *Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон прямоугольника, разбивает этот прямоугольник на два равных прямоугольника.*

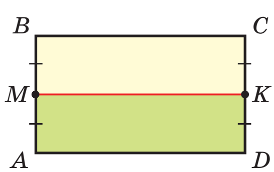


Рис. 49

Доказательство. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, M и K — середины сторон AB и CD (рис. 49). Отрезки MB и CK равны как половины равных сторон AB и CD и параллельны, так как $AB \parallel CD$. Поэтому четырехугольник $MBCK$ является параллелограммом по признаку параллелограмма. А так как $\angle B = 90°$, то $MBCK$ — прямоугольник. Аналогично доказываем, что $AMKD$ — прямоугольник. Поскольку у этих прямоугольников стороны равны, то они равны между собой.

Следствие.

Если прямоугольник $ABCD$ мысленно перегнуть по прямой MK, то в силу того, что $AB \perp MK$, $CD \perp MK$, $MB = MA$, $KC = KD$, точка B совпадет с точкой A, точка C — с точкой D, прямоугольник $MBCK$ совпадет с прямоугольником $AMKD$. Прямая MK будет являться осью симметрии прямоугольника $ABCD$ (см. § 12*).

Таким образом, у прямоугольника есть центр симметрии, как у любого параллелограмма (он находится в точке пересечения диагоналей), и имеются две оси симметрии, которые проходят через середины его противоположных сторон (рис. 50).

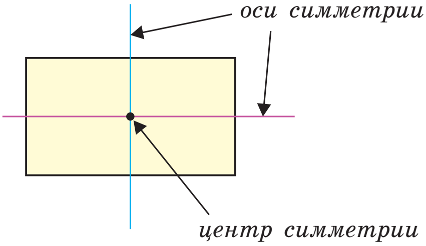


Рис. 50

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

52. Дан прямоугольник $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей. Найдите длину отрезка BO, если $AC = 8$ см.

53. $ABCD$ — прямоугольник, его диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOD, если $BC = 10$ см, $BD = 24$ см.

54. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если периметр треугольника ABD равен 30 см и $AC = 12$ см.

55. На рисунке 51 изображен параллелограмм $ABCD$, $\angle ABC = 90°$, $OD = 6$ см. Найдите длину диагонали AC.

56. По данным на рисунке 52 найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

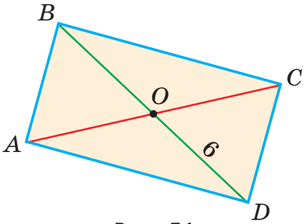


Рис. 51

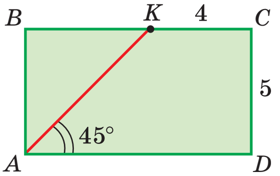


Рис. 52

57. Докажите следующие признаки прямоугольника:

а) «Если у четырехугольника три угла прямые, то это прямоугольник».
б) «Если у четырехугольника все углы равны, то это прямоугольник».

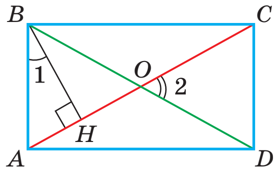


Рис. 53

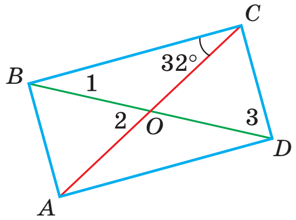


Рис. 54

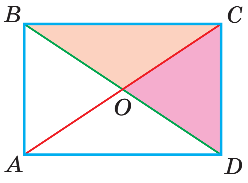


Рис. 55

58. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 53), $BH \perp AC$, $\angle 1 = 28°$. Найдите $\angle 2$.

59. У параллелограмма $ABCD$ $AC = BD$, $\angle ACB = 32°$ (рис. 54). Найдите углы 1, 2 и 3 и в ответе запишите их сумму.

60. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 55), $AB = 8$ см, разность периметра треугольника BOC и периметра треугольника COD равна 4 см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

61. В прямоугольнике $ABCD$ $AC = 12$ см, $\angle ADB = 15°$. Найдите расстояние от вершины A до прямой BD.

62. Докажите, что концы двух диаметров окружности являются вершинами прямоугольника.

63. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит сторону прямоугольника в отношении $2 : 1$. Найдите углы, которые диагональ прямоугольника образует с его сторонами.

64. На рисунке 56 $ME = EP$, $NE = EK$, $\angle NPM = \angle MKN$. Найдите $\angle MNP$.

65*. Прямоугольник разбили прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника (рис. 57).

а) Зная периметры трех прямоугольников: $P_1 = 8$ см, $P_2 = 14$ см, $P_3 = 24$ см, найдите периметр P_4 четвертого прямоугольника.
б) Докажите, что при любых значениях P_1, P_2, P_3, P_4 верно равенство $P_{ABCD} = P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.

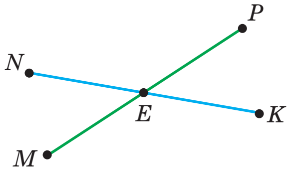


Рис. 56

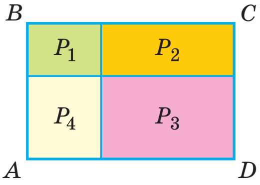


Рис. 57

66*. В параллелограмме $ABCD$ ($AD \neq AB$) провели биссектрисы его углов. Какую фигуру ограничивают четыре построенные биссектрисы? Докажите вашу гипотезу.

67*. Найдите алгоритм построения при помощи циркуля и линейки прямоугольника по следующим элементам:

а) по двум соседним сторонам a и b;
б) по стороне a и диагонали d;
в) по диагонали d и углу между диагоналями.

68*. На координатной плоскости изобразите четырехугольник $MNPK$, где $M(-1;\ -2)$, $N(-3;\ 4)$, $P(6;\ 7)$, $K(8;\ 1)$. Докажите, что $MNPK$: а) параллелограмм; б) прямоугольник.

69*. Невозмутимая кошка сидит на середине лестницы (рис. 58). Лестница начинает падать, скользя концами по полу и стене. По какой траектории будет двигаться кошка: а), б), в) или г)?

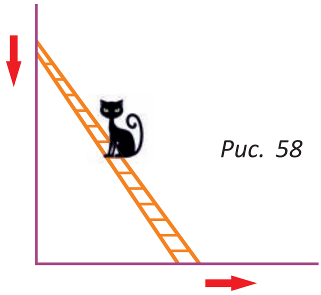
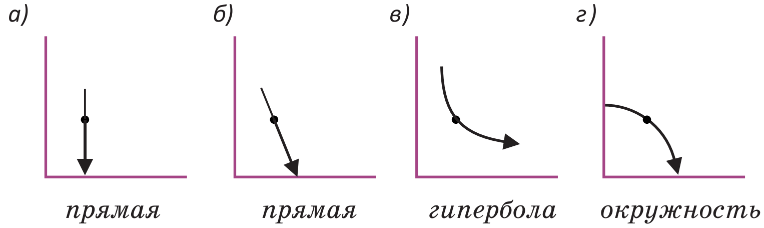


Рис. 58



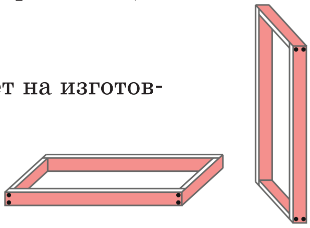
Моделирование

Отец и сын хотят сделать прямоугольную деревянную раму шириной 1 м и длиной 1 м 80 см. У них имеются доски длиной 2 м 20 см, шириной 12 см и толщиной 2 см каждая.

1. Составьте план изготовления такой рамы.

2. Как проверить, имеет ли сделанная по вашему плану рама форму прямоугольника, при помощи:
а) угольника;
б) рулетки?

3. Подсчитайте, сколько погонных метров доски пойдет на изготовление двух таких рам.



§ 5. Ромб

Определение. **Ромбом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

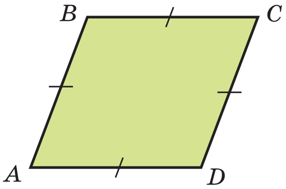


Рис. 59

На рисунке 59 изображен ромб $ABCD$. У него $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ и $AB = BC = CD = AD$. Как частный случай параллелограмма ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме этого, у него есть свойства, присущие именно ромбу. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема (свойство ромба).
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

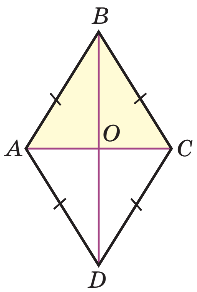


Рис. 60

Дано: $ABCD$ — ромб (рис. 60).
Доказать: $BD \perp AC$; BD — биссектриса угла ABC.
Доказательство. Так как у ромба все стороны равны, то $AB = BC$ и $\triangle ABC$ — равнобедренный. Диагонали любого параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = OC$ и BO — медиана $\triangle ABC$. А медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой. Отсюда $BD \perp AC$ и BD — биссектриса $\angle ABC$. Теорема доказана.

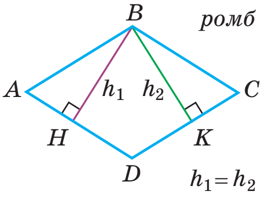


Рис. 61

Для ромба также справедливо свойство: **«Высоты ромба, проведенные к соседним сторонам, равны между собой»**. Доказательство следует из равенства прямоугольных треугольников ABH и CBK (рис. 61) по гипотенузе ($AB = BC$) и острому углу ($\angle A = \angle C$).

Сформулируйте и докажите утверждение, обратное данному.

Теорема (признаки ромба).
Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то это ромб.
Если одна из диагоналей параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это ромб.

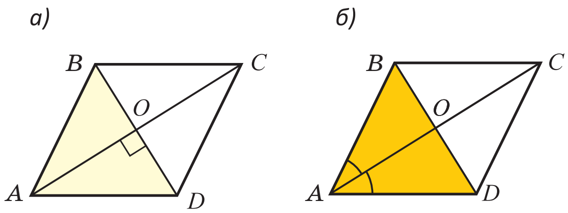


Рис. 62

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC \perp BD$ (рис. 62, *а*) или AC — биссектриса $\angle BAD$ (рис. 62, *б*).

Доказать: $ABCD$ — ромб.

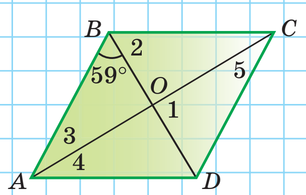
Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABD$. Так как диагонали любого параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $BO = OD$. Отсюда следует, что отрезок AO — медиана $\triangle ABD$. Если $AC \perp BD$, то в $\triangle ABD$ медиана AO является высотой. Если AC — биссектриса $\angle BAD$, то в $\triangle ABD$ медиана AO является биссектрисой. В обоих случаях следует, что $\triangle ABD$ — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Значит, $AB = AD$. Тогда у параллелограмма $ABCD$ все стороны равны. Следовательно, он — ромб. Теорема доказана.

Замечание. Если перегнуть ромб по диагонали AC, то вершина B совместится с вершиной D ($BO \perp AC$, $BO = OD$), а значит, $\triangle ABC$ совместится с $\triangle ADC$. *Ромб имеет две оси симметрии, которые содержат его диагонали.*

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

$ABCD$ — ромб. Найдите углы 1, 2, 3, 4 и 5.



Тест 2

1. Является ли любой ромб параллелограммом?
2. Является ли любой параллелограмм ромбом?
3. Каким условием должен обладать параллелограмм, чтобы быть ромбом? Перечислите все известные вам наборы условий.

При помощи **Интернета**:
а) выясните версию происхождения слова «ромб»;
б) найдите, где в технике используются параллелограммы.

Задания к § 5

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Найдите периметр четырехугольника* $ABCD$ (рис. 63), *у которого* $AO = OC$, $BO = OD$, $\angle 1 = 35°$, $\angle 2 = 55°$, $CD = 6$ *см.*

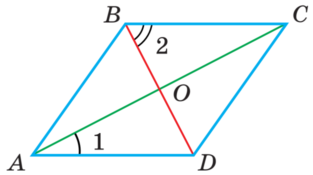


Рис. 63

Решение. Так как диагонали четырехугольника $ABCD$ точкой O делятся пополам, то это — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Тогда $AD \parallel BC$ и $\angle ADB = \angle 2 = 55°$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей BD). В $\triangle AOD$ $\angle AOD = 180° - (\angle 1 + \angle ADO) = 180° - (35° + 55°) = 90°$. Значит, $AC \perp BD$. Так как диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны, то это ромб (по признаку ромба). Поскольку у ромба все стороны равны, то искомый периметр $P_{ABCD} = 4 \cdot CD = 4 \cdot 6 = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

Задача 2. *Дан параллелограмм $ABCD$ с периметром 128 см, $\angle D = 150°$, $\angle ACD = \angle ACB$. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.*

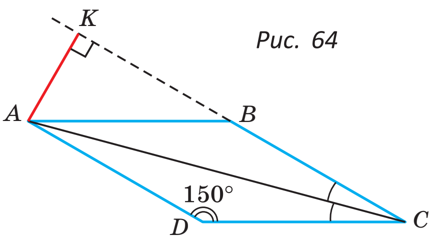


Рис. 64

Решение.

1) Проведем $AK \perp BC$. Длина перпендикуляра AK — искомое расстояние (рис. 64).

2) Так как $\angle ACD = \angle ACB$, то CA — биссектриса угла BCD и поэтому параллелограмм $ABCD$ — ромб (по признаку ромба).

3) $\angle ABC = \angle D = 150°$ (у параллелограмма противоположные углы равны).

4) В прямоугольном треугольнике AKB $\angle ABK = 180° - 150° = 30°$ (по свойству смежных углов).

5) $AB = 128 : 4 = 32$ (см) (у ромба все стороны равны).

6) $AK = \frac{1}{2}AB = \frac{32}{2} = 16$ (см) (катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы).

Ответ: 16 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

70. Используя транспортир, постройте равносторонний треугольник. Достройте его до ромба. Проведите другую диагональ этого ромба. Убедитесь, что диагонали ромба перпендикулярны. Найдите величину угла, образованного большей диагональю ромба и его стороной.

71. По данным на рисунках 65, *а*)—*в*) решите следующие задачи:

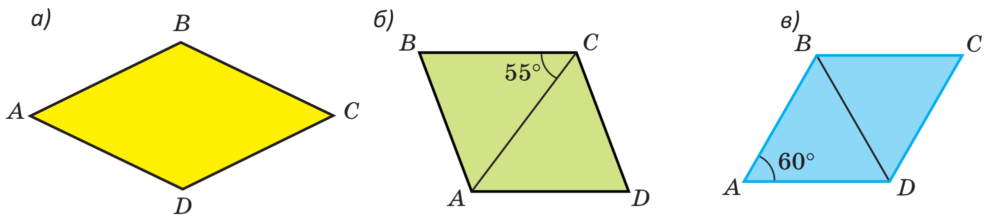


Рис. 65

а) Найдите периметр ромба $ABCD$ (рис. 65, *а*), если $AB + BC + AD = 36$ см;
б) $ABCD$ — ромб, $\angle ACB = 55^\circ$ (рис. 65, *б*). Найдите $\angle ACD$ и $\angle ABC$.
в) Найдите диагональ BD ромба $ABCD$ (рис. 65, *в*) с периметром 64 см, если $\angle A = 60^\circ$.

72. Дан ромб $ABCD$, $\angle DBC = 64^\circ$. Найдите:
а) $\angle ABC$; б) $\angle CDB$; в) $\angle BAD$; г) $\angle ACD$.

73. На рисунке 66 $ABCD$ — ромб с периметром 80 см, $AC = 24$ см, $BD = 32$ см. Найдите:
а) периметр треугольника AOB;
б) периметр треугольника BCD;
в) периметр треугольника ABC.

74. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 67), $AB = BC$, $OM \perp DC$, $\angle COM = 58^\circ$. Найдите $\angle ABD$.

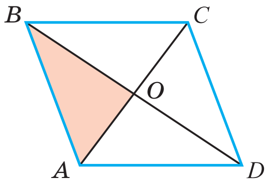


Рис. 66

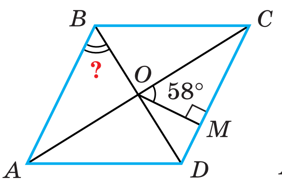


Рис. 67

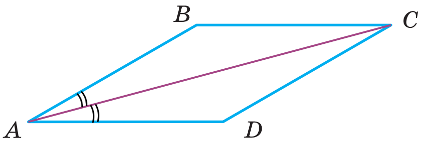


Рис. 68

75. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 68), $\angle BAC = \angle DAC = 15^\circ$. Расстояние от точки C до прямой AD равно 12 см. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

76. Один из углов ромба равен 120°, меньшая диагональ равна 8 см. Найдите периметр ромба.

77. BK и BM — высоты ромба. Найдите углы треугольника KBM, если:
а) высота BK в 2 раза меньше стороны AB;
б) высота BM делит сторону CD пополам.

78. Докажите, что если у четырехугольника все стороны равны, то это — ромб.

79*. Найдите алгоритм построения ромба с помощью циркуля и линейки:
а) по двум диагоналям d_1 и d_2;
б) по отрезку m, равному периметру ромба, и острому углу α ромба.

80*. При помощи двусторонней линейки (обычной линейки с параллельными краями) разделите данный угол α пополам. Обоснуйте построение.

81*. На координатной плоскости изобразите четырехугольник $ABCD$, у которого $A(-2; 2)$, $B(4; 4)$, $C(2; -2)$, $D(-4; -4)$. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

Гимнастика ума

Из шести равных ромбов (рис. 69, *а*) сложили многоугольник (рис. 69, *б*).

1. Сколько всего ромбов можно насчитать на рисунке 69, *б*)?

2. Если периметр одного маленького ромба равен 48 см, то чему равен периметр сложенного многоугольника?

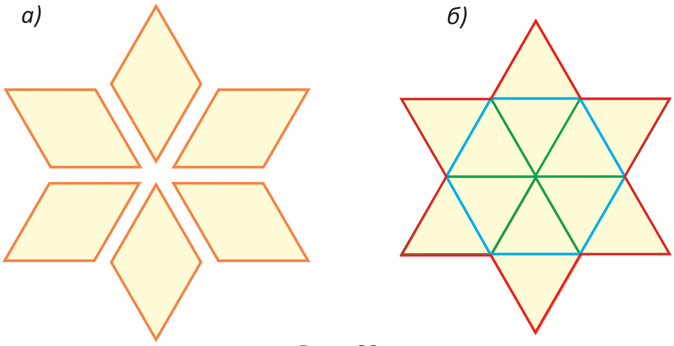


Рис. 69

§ 6. Квадрат

Определение. **Квадратом** называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

На рисунке 70, *а*) изображен квадрат $ABCD$. Так как любой прямоугольник — это параллелограмм, то квадрат является параллелограммом с равными сторонами, у которого все углы прямые. Поэтому *квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба*. В частности, диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

Диагональ квадрата делит его на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, *б*). А две диагонали делят квадрат на 4 равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, *в*).

У квадрата, как у любого параллелограмма, имеется один центр симметрии (в точке пересечения диагоналей) и четыре оси симметрии (две из

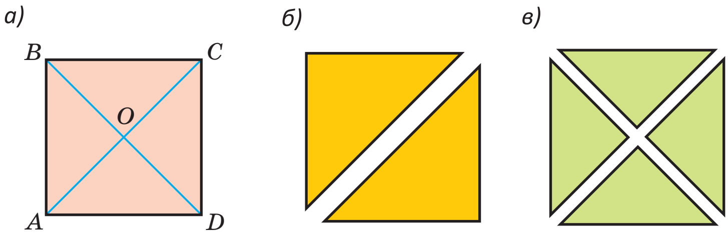


Рис. 70

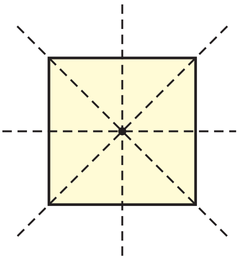


Рис. 71

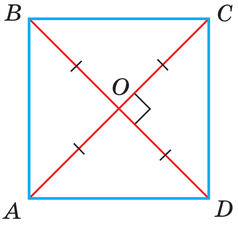


Рис. 72

них содержат диагонали, две проходят через середины противоположных сторон) (рис. 71).

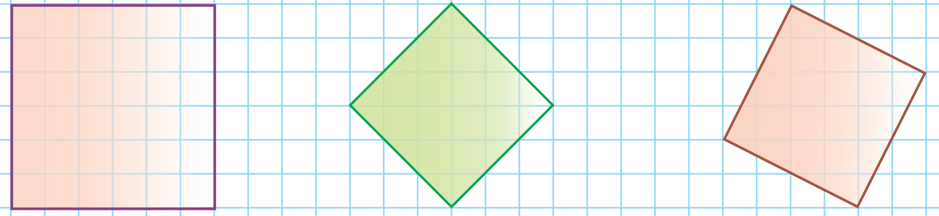
Для квадрата можно сформулировать признаки квадрата. Например, «Если у ромба есть прямой угол, то это квадрат», «Если у параллелограмма диагонали равны и перпендикулярны, то это квадрат». Докажем следующий признак квадрата: *«Если у четырехугольника диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то это квадрат»*.

Доказательство (рис. 72). Из того, что диагонали данного четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, следует, что он — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Из того, что у этого параллелограмма диагонали равны, следует, что это прямоугольник (по признаку прямоугольника). А из того, что диагонали параллелограмма перпендикулярны, следует, что это ромб (по признаку ромба). А так как у ромба стороны равны, то данный четырехугольник является прямоугольником с равными сторонами, то есть квадратом (по определению квадрата).

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Докажите, что изображенные четырехугольники — квадраты.



Тест 2

1. Является ли квадрат ромбом? Аргументируйте ваш ответ.
2. Может ли ромб быть прямоугольником? Если да, то при каком условии?

Задания к § 6

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *На рисунке 73 ABCD — квадрат, AKD — равносторонний треугольник. Найти* $\angle BMC$.

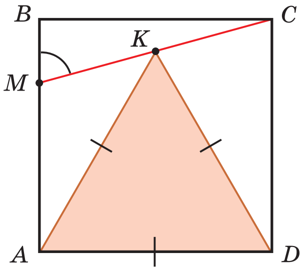


Рис. 73

Решение. У равностороннего треугольника все углы равны по 60°, поэтому $\angle ADK = 60°$. Так как $\angle ADC = 90°$, то $\angle KDC = 90° - 60° = 30°$. Поскольку $KD = AD$ и $AD = CD$, то $KD = CD$. Следовательно, $\triangle KDC$ — равнобедренный с основанием KC. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому $\angle KCD = \angle CKD = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$. Тогда $\angle BMC = \angle DCM$ как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей MC, $\angle BMC = 75°$.

Ответ: 75°.

Задача 2. *На сторонах квадрата ABCD отмечены точки N, P, K, M так, что* $AN = BP = CK = DM$ (рис. 74). *Доказать, что* $NK \perp PM$ *и* $NK = PM$.

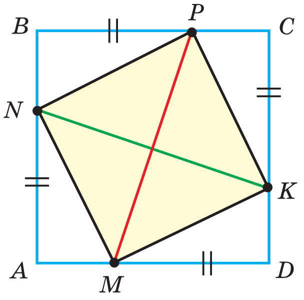


Рис. 74

Доказательство. Так как стороны квадрата равны и по условию $AN = BP = CK = DM$, то $NB = PC = KD = AM$. Тогда прямоугольные треугольники MAN, NBP, PCK и KDM равны по двум катетам. Следовательно, $MN = NP = PK = KM$. Так как у четырехугольника $MNPK$ стороны равны, то это ромб. У прямоугольного треугольника сумма острых углов равна 90°. Поэтому $\angle ANM + \angle AMN = 90°$. Но $\angle KMD = \angle ANM$, откуда $\angle KMD + \angle AMN = 90°$ и $\angle NMK = 90°$. Поскольку ромб с прямым углом является квадратом, то $MNPK$ — квадрат. Мы знаем, что у квадрата диагонали равны и взаимно перпендикулярны. Значит, $NK \perp PM$ и $NK = PM$. Что и требовалось доказать.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

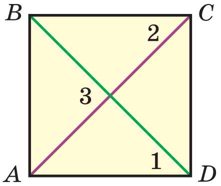


Рис. 75

82. На рисунке 75 *ABCD* — квадрат. Найдите сумму углов 1, 2 и 3.

83. На рисунке 76 (см. с. 42) *ABCD* — квадрат, его периметр равен 36 см. Найдите сумму периметров прямоугольников *ABKL* и *LKCD*, если $BK = 3{,}5$ см.

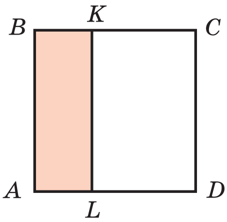


Рис. 76

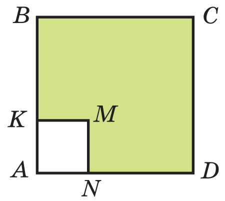


Рис. 77

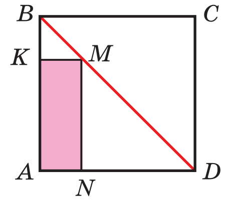


Рис. 78

84. На рисунке 77 $ABCD$ и $AKMN$ — квадраты, периметр квадрата $ABCD$ равен 72 см, $AK = \frac{1}{2}KB$. Найдите периметр многоугольника $KBCDNM$.

85. На рисунке 78 $ABCD$ — квадрат, его сторона равна 12 см. Найдите периметр прямоугольника $AKMN$.

86. Докажите, что если в окружности провести два взаимно перпендикулярных диаметра, то концы этих диаметров будут вершинами квадрата.

87. Периметр квадрата равен 48 см. Найдите расстояние от центра квадрата до его сторон.

88. Докажите, что если бумажный квадрат $ABCD$ сложить по диагонали AC, то вершины B и D совпадут.

89. В равнобедренный прямоугольный треугольник помещен квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие на катетах (рис. 79). Найдите гипотенузу треугольника, если периметр квадрата равен 112 см.

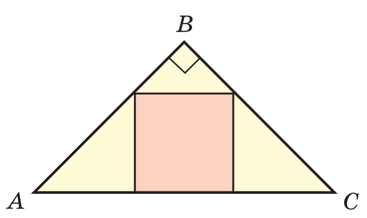


Рис. 79

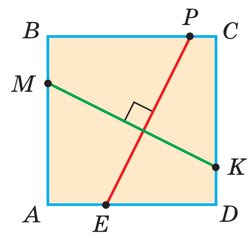


Рис. 80

90. Два отрезка MK и PE с концами на противоположных сторонах квадрата $ABCD$ взаимно перпендикулярны (рис. 80). Докажите, что $MK = PE$.

91. Докажите, что если у четырехугольника все стороны и все углы равны, то это квадрат.

92*. Найдите алгоритм построения с помощью циркуля и линейки квадрата по его диагонали d.

93*. На сторонах параллелограмма построены квадраты (сторона каждого квадрата равна соответствующей стороне параллелограмма). Докажите, что центры построенных квадратов являются вершинами квадрата.

94*. На стороне AD квадрата $ABCD$ взята точка K, а на стороне CD взята точка M так, что $\angle AKB = \angle DKM = 60°$. Докажите, что $\angle MBK = 45°$.

Моделирование

Иногда множества каких-то элементов (чисел, фигур, ...) изображают в виде овалов (кругов Эйлера). На рисунке 81 изображены соотношения между множествами параллелограммов, прямоугольников, ромбов. Множество каких фигур находится в области, обозначенной знаком вопроса? Аргументируйте ваш ответ.

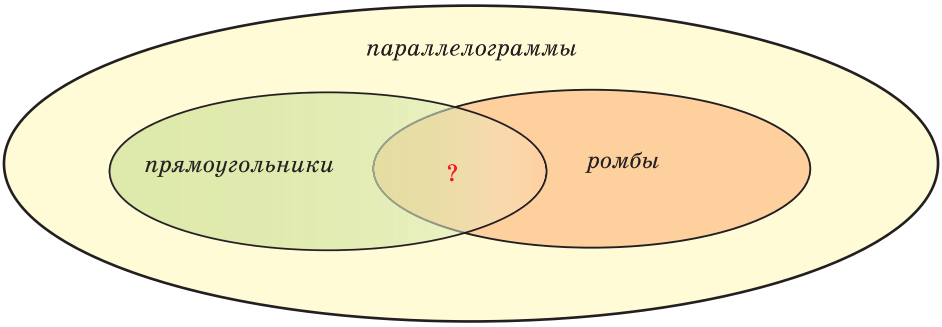


Рис. 81

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение прямоугольника, ромба, квадрата.
2. Свойство диагоналей прямоугольника.
3. Признак прямоугольника.
4. Свойство диагоналей ромба.
5. Признаки ромба.
6. Свойства квадрата.

Умеем

1. Доказывать теорему о свойстве диагоналей прямоугольника.
2. Доказывать теорему о свойстве диагоналей ромба.

Реальная геометрия

Девочки Маша, Лера и Настя хотят устроить квадратную клумбу.

Маша предлагает натянуть на четырех колышках по периметру клумбы четыре куска веревки одинаковой длины (рис. 82, *а*).

Лера предлагает натянуть на четырех колышках параллельно два куска веревки одинаковой длины, расстояние между которыми будет равно длине натянутых кусков (рис. 82, *б*).

Настя предлагает взять два куска веревки одинаковой длины, отметить узелком их середины и натянуть веревки так, чтобы они пересекались в серединах и были перпендикулярны (рис. 82, *в*).

У какой из девочек обязательно получится квадрат с вершинами в местах расположения колышков? Объясните ваш ответ.

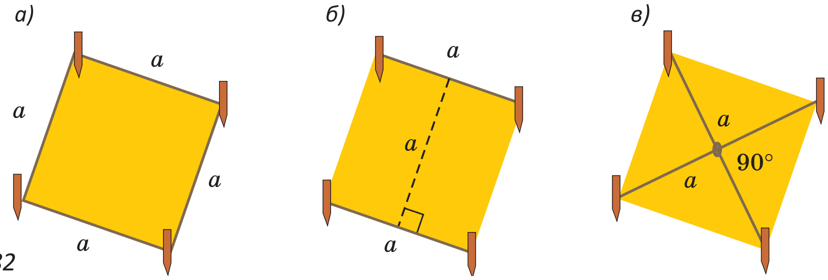


Рис. 82

Геометрия 3D

С понятием *призмы* мы познакомились в 7-м классе. У призмы две грани (*основания*) — это равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани (*боковые*) — параллелограммы. Если призма прямая, то боковые грани — прямоугольники. На рисунках 83, *а*)—*в*) изображены треугольная, четырехугольная, шестиугольная призмы.

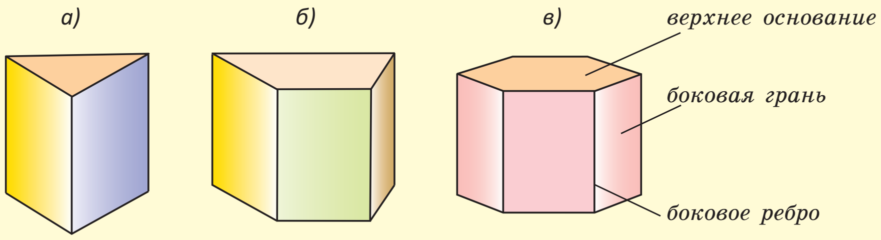


Рис. 83

Отрезок, который соединяет соответствующие вершины верхнего и нижнего оснований, называется *боковым ребром*. Так как боковые грани призмы — параллелограммы, а у параллелограмма противоположные стороны равны, то все боковые ребра призмы равны между собой.

Задания

1. *Сколько у шестиугольной призмы: а) граней; б) ребер (включая боковые ребра и стороны оснований)?*

Поверхность любой призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности, которая состоит из боковых граней. На чертеже невидимые ребра изображаются штриховыми линиями. У треугольной и четырехугольной изображенных призм одна сторона основания невидима и невидима одна («задняя») грань.

2. *На рисунке 84 изображена прямая треугольная призма и ее развертка. С каким ребром совпадет ребро ED, если развертку сложить в призму?*

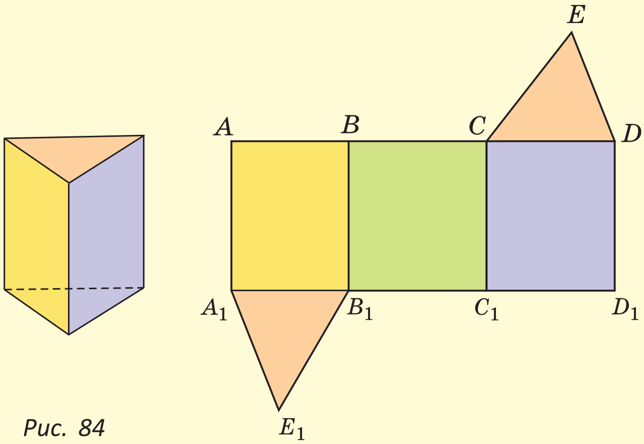


Рис. 84

Призма, у которой основания являются параллелограммами, называется *параллелепипедом* (рис. 85, *а*), его боковые грани — параллелограммы. Противоположные грани любого параллелепипеда равны между собой.

Если боковые грани параллелепипеда — прямоугольники, — это *прямой параллелепипед*. Его боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 85, *б*).

Если в основании прямого параллелепипеда лежит прямоугольник, то это *прямоугольный параллелепипед*. Все его грани — прямоугольники (рис. 85, *в*).

Если у прямоугольного параллелепипеда все ребра равны, то это *куб*. Все его грани — равные квадраты (рис. 85, *г*).

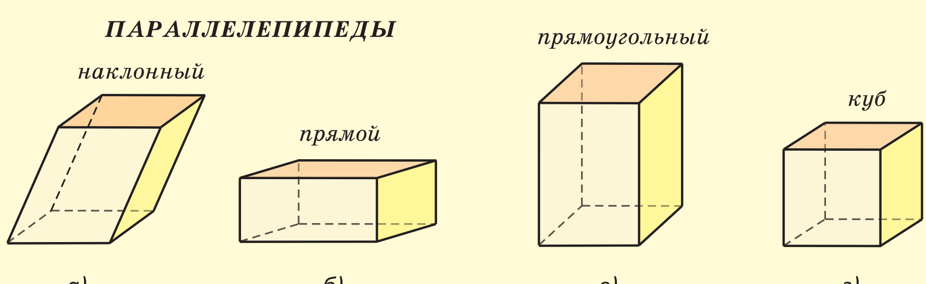


Рис. 85

Любой параллелограмм (включая прямоугольник и квадрат), расположенный в пространстве, на чертеже изображается параллелограммом. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, используя схему на рисунке 86.

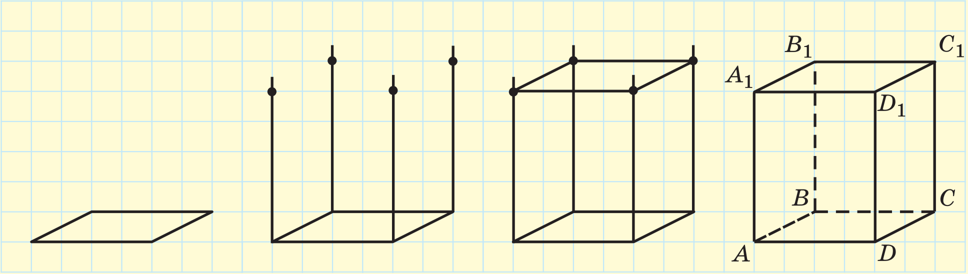


Рис. 86

3. *Три каких-то ребра параллелепипеда равны 3 см, 5 см, 8 см. Найдите сумму длин всех ребер данного параллелепипеда.*

§ 7. Теорема Фалеса

Теорема (теорема Фалеса).

Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся равные отрезки.

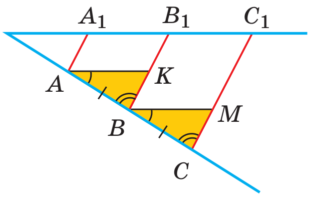


Рис. 87

Дано: $AB = BC$, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 87).

Доказать: $A_1B_1 = B_1C_1$.

Доказательство. Проведем $AK \parallel A_1C_1$, $BM \parallel A_1C_1$. Так как две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой, то $AK \parallel BM$. Треугольники ABK и BCM равны по 2-му признаку равенства треугольников ($AB = BC$ по условию, $\angle BAK = \angle CBM$ как соответственные углы при параллельных прямых AK и BM и секущей AC, $\angle ABK = \angle BCM$ как соответственные углы при параллельных прямых BB_1 и CC_1 и секущей AC). Из равенства треугольников следует, что $AK = BM$. Так как четырехугольники AA_1B_1K и BB_1C_1M — параллелограммы (их противоположные стороны параллельны), то $A_1B_1 = AK$, $B_1C_1 = BM$ (как противоположные стороны параллелограмма). Значит, $A_1B_1 = B_1C_1$. Теорема доказана.

Замечания.

1. Отложенных равных отрезков может быть два, три и более.
2. Теорема Фалеса справедлива не только для сторон угла, но и для произвольных прямых.

Теорема, обратная теореме Фалеса, справедлива только для отрезков, отложенных от вершины угла, и звучит так: **«Если на сторонах угла от его вершины отложить равные отрезки** ($AB = BC$, $AB_1 = B_1C_1$)**, то прямые, проходящие через их концы, будут параллельны** ($BB_1 \parallel CC_1$)**»**.

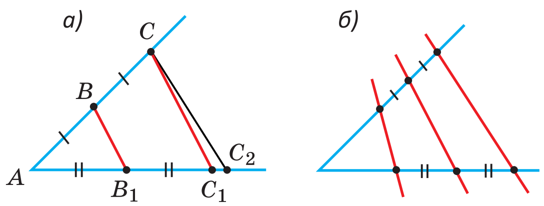


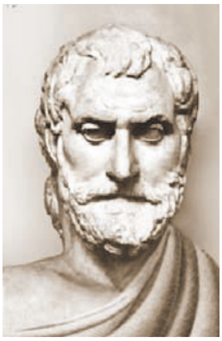
Рис. 88

Докажите эту теорему самостоятельно, используя рисунок 88, *а*) и метод от противного.

Требование обратной теоремы Фалеса о том, чтобы равные отрезки были отложены от вершины угла, обязательно. Иначе утверждение о параллельности прямых будет неверным (рис. 88, *б*).

Фалес — философ и математик, который жил в Древней Греции в г. Миле́те. Он сформулировал и доказал многие из теорем, которые в наше время изучают в школе. Фалес Милетский (VI век до н. э.) входил первым в список семи мудрецов того времени.

Именно Фалес выдвинул требование доказывать теоремы.



При помощи **Интернета** выясните, чем еще знаменит Фалес. Установите при помощи Википедии, кто был старше — Евклид или Фалес.

Задания к § 7

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Точка K — середина стороны AC треугольника ABC, $MBNK$ — параллелограмм. Найти периметр треугольника ABC, если периметр параллелограмма равен 34 см, сторона $AC = 16$ см* (рис. 89).

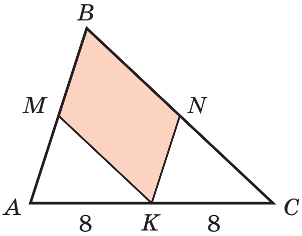


Рис. 89

Решение. У параллелограмма противоположные стороны параллельны. Поэтому $KN \parallel AB$ и $KM \parallel BC$. По теореме Фалеса, так как $KN \parallel AB$ и $AK = KC$, то $BN = NC$. Отсюда $BC = 2BN$. Аналогично, так как $KM \parallel CB$ и $AK = KC$, то $AM = MB$, $AB = 2MB$. $P_{MBNK} = 2MB + 2BN = 34$ см, откуда $AB + BC = 34$ см. $P_{ABC} = AB + BC + AC = 34 + 16 = 50$ (см).

Ответ: 50 см.

Задача 2. *При помощи циркуля и линейки разделить данный отрезок на 3 равные части.*

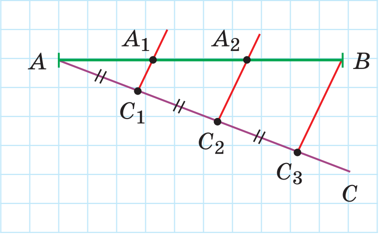


Рис. 90

Решение. Пусть дан отрезок AB (рис. 90). Проведем произвольный луч AC и отложим на нем три произвольных, но равных отрезка: $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$. Проведем отрезок C_3B. Через точки C_2 и C_1 проведем прямые, параллельные прямой C_3B (вспомните, как вы это делали в 7-м классе). По теореме Фалеса $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$.

Замечание. Указанный способ является алгоритмом деления отрезка на n равных частей.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

95. На рисунке 91 $BC = 9$ см. Найдите длину отрезка AC.

96. На рисунке 92 $a \parallel b \parallel c$. По данным длинам отрезков найдите величину $x + y$.

97. На рисунке 93 $ME = 32$ см, $PE = 16$ см, $NK = 19{,}5$ см. Используя значения углов на рисунке, найдите длину отрезка NG.

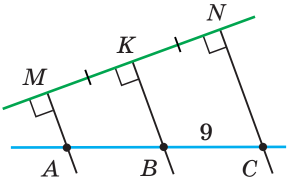


Рис. 91

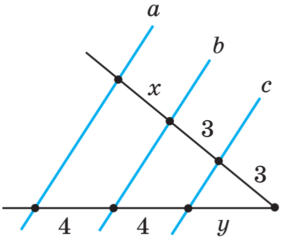


Рис. 92

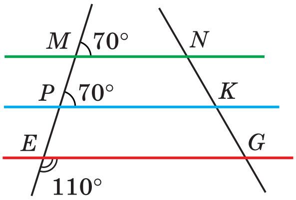


Рис. 93

98. Дан $\triangle ABC$ (рис. 94), $AM = MB = 6$ см, $\angle MEB = \angle AKM = \angle C$, $MK = 7$ см, $KC = 5$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$.

99. В треугольнике ABC проведена медиана BM, $MK \parallel BC$ и $KN \parallel AC$ (рис. 95). Найдите периметр четырехугольника $AKNC$, если $KB = 7$ см, $BN = 6$ см, $MC = 8$ см.

100*. На рисунке 96 точка K — середина отрезка CD, $AC \parallel KM \parallel DB$, $AO = 21$ см, отрезок OM в 3 раза меньше отрезка MB. Найдите длину отрезка AB.

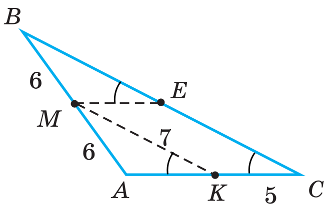


Рис. 94

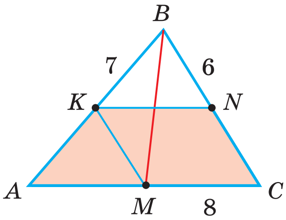


Рис. 95

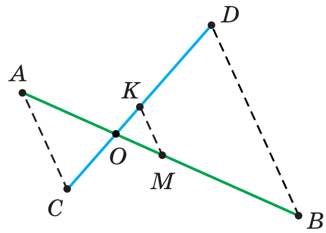


Рис. 96

101*. При помощи циркуля и линейки разделите данный отрезок:

а) на 5 равных частей; б) в отношении 2 : 1.

§ 8. Средняя линия треугольника

Определение. **Средней линией треугольника** называется отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника.

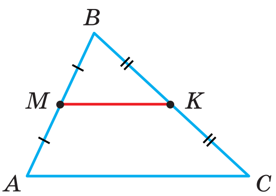


Рис. 97

На рисунке 97 точки M и K — середины сторон AB и BC треугольника ABC. Отрезок MK — средняя линия треугольника. Третью сторону AC будем называть основанием относительно средней линии MK. Так как у треугольника три стороны, то у него три средних линии.

Теорема (свойство средней линии треугольника).
Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

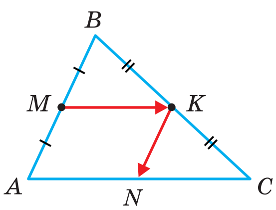


Рис. 98

Дано: $\triangle ABC$, MK — средняя линия (рис. 98).

Доказать: $MK \parallel AC$; $MK = \frac{1}{2}AC$.

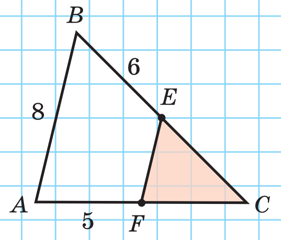
Доказательство. 1) Проведем через точку M прямую, параллельную AC. По теореме Фалеса она пройдет через середину отрезка BC — точку K и будет содержать среднюю линию MK. Тогда $MK \parallel AC$.

2) Через точку K проведем прямую KN (см. рис. 98), параллельную стороне AB ($N \in AC$). По теореме Фалеса $AN = NC$. Четырехугольник $AMKN$ — параллелограмм, так как у него противоположные стороны параллельны. Но у параллелограмма противоположные стороны равны. Поэтому $MK = AN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

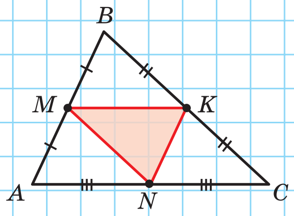
Тест 1

Если EF — средняя линия $\triangle ABC$, то чему равен периметр $\triangle EFC$?



Тест 2

$AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Найдите P_{MKN}.



Задания к § 8

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача. *Доказать, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

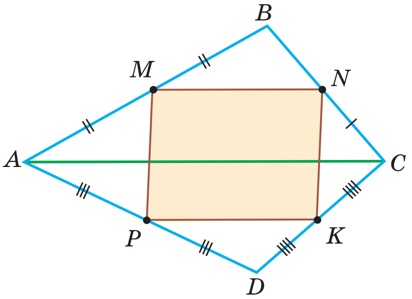


Рис. 99

Доказательство. Пусть точки M, N, K, P — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 99). Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC. По свойству средней линии $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Отрезок PK — средняя линия треугольника ADC. Поэтому $PK \parallel AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$. Так как у четырехугольника $MNKP$ стороны MN и PK равны и параллельны, то он параллелограмм (по признаку параллелограмма). Что и требовалось доказать.

Докажите указанные следствия самостоятельно.

Следствия

Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ и отрезки MK и PN (они называются средними линиями четырехугольника) связаны определенными соотношениями. Сформулируем их в виде следствий из доказанного в исходной задаче утверждения (рис. 100).

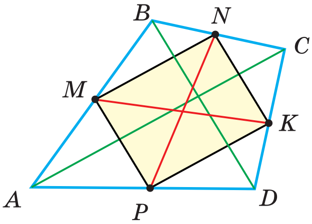


Рис. 100

1. *Если диагонали AC и BD равны, то MNKP — ромб и отрезки MK и PN взаимно перпендикулярны.*

2. *Если отрезки MK и PN взаимно перпендикулярны, то MNKP — ромб и диагонали AC и BD равны.*

3. *Если диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, то MNKP — прямоугольник, и отрезки MK и PN равны.*

4. *Если отрезки MK и PN равны, то MNKP — прямоугольник и диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.*

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

102. На рисунке 101 NM — средняя линия треугольника ABC. По размерам, указанным на рисунке в см, найдите периметр треугольника ABC.

103. На рисунке 102 точки M и K — середины сторон BC и AC треугольника ABC. По данным на рисунке, найдите величину угла C.

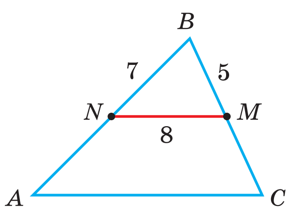


Рис. 101

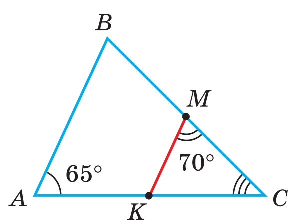


Рис. 102

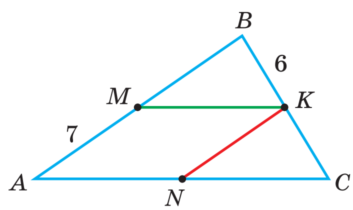


Рис. 103

104. На рисунке 103 точки M, K, N — середины сторон $\triangle ABC$. Периметр $\triangle ABC$ равен 44 см, $BK = 6$ см, $AM = 7$ см. Найдите длину отрезка MK и периметр четырехугольника $AMKN$.

105. а) Средние линии треугольника равны 3 м, 4 м и 5 м. Найдите периметр треугольника.

б) Периметр треугольника равен 210 м, его средние линии относятся как 3 : 5 : 7. Найдите наибольшую сторону данного треугольника.

106. Вершины треугольника $A_1B_1C_1$ являются серединами сторон треугольника ABC. Докажите, что $P_{ABC} = 2P_{A_1B_1C_1}$.

107. Докажите, что три средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.

108. а) Докажите, что в треугольнике ABC средняя линия KM и медиана BN точкой пересечения O делятся пополам (рис. 104).

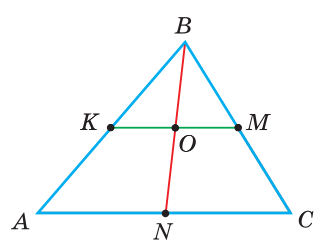


Рис. 104

б) Докажите, что средняя линия KM ($K \in AB$, $M \in BC$) треугольника ABC делит пополам любой отрезок BF, где точка $F \in AC$.

109. В $\triangle ABC$ средняя линия KM ($K \in AB$, $M \in BC$) и медиана BN пересекаются в точке O, $P_{AKON} = 80$ см, $P_{KBO} = 48$ см. Найдите длину стороны AC.

110. На рисунке 105 точки P, M, N и K — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Найдите:

а) периметр четырехугольника $PMNK$, если $AC = 12$ см, $BD = 10$ см;
б) угол между прямыми AC и BD, если $AC = BD$ и $\angle KPN = 32°$.

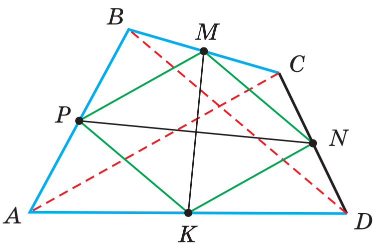


Рис. 105

111. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

112*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Периметр треугольника MNP равен периметру треугольника MKP. Докажите, что $AC \perp BD$.

113*. Сторона AC треугольника ABC равна 24 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины медиан AK и CM.

114*. В треугольнике ABC проведен отрезок BD так, что точка D лежит на стороне AC и $CD = AB$. Точка M — середина отрезка AD, точка N — середина отрезка BC. Найдите величину угла NMC, если $\angle BAC = 72°$.

§ 9. Свойство медиан треугольника

Вы уже знаете, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является одной из замечательных точек треугольника.

Теорема (свойство медиан треугольника).
Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

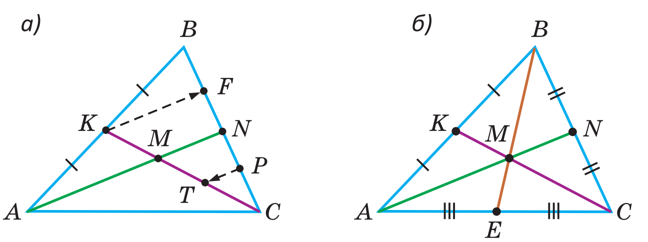


Рис. 106

Доказательство. 1) Вначале докажем, что любая медиана треугольника делится другой медианой в отношении $2 : 1$. Пусть AN и CK — медианы $\triangle ABC$, которые пересекаются в точке M (рис. 106, *а*). Проведем $KF \parallel AN$. Так как $AK = KB$, то по теореме Фалеса $BF = FN$. Из середины P отрезка NC проведем $PT \parallel AN$. Так как $CP = PN = NF$, то по теореме Фалеса $CT = TM = MK$. Отсюда $CM : MK = 2 : 1$. Аналогично, $AM : MN = 2 : 1$.

2) Теперь докажем, что все три медианы пересекаются в одной точке. Из п. 1 следует, что любая медиана делит другую медиану в отношении $2 : 1$. Тогда третья медиана BE (рис. 106, *б*) должна разделить медиану CK в отношении $2 : 1$, то есть пройти через точку M. Следовательно, все три медианы пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

В 7-м классе доказано, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке и что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. В § 3 данной главы (ключевая задача **3**) доказано, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. В данном параграфе мы доказали, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Таким образом, нами доказаны все утверждения о *четырех замечательных точках треугольника*.

При помощи **Интернета** выясните, почему точку пересечения медиан треугольника называют его *центром тяжести*.

Задания к § 9

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача. *Точки M и K — середины сторон AD и CD параллелограмма $ABCD$. Доказать, что отрезки BM и BK делят диагональ AC на три равные части.*

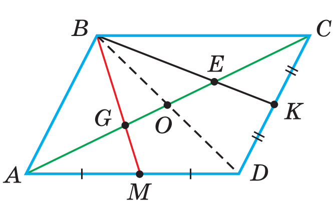


Рис. 107

Решение. Проведем в параллелограмме $ABCD$ диагональ BD (рис. 107). Так как диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то $BO = OD$ и тогда AO и BM — медианы треугольника ABD. Поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, то $AG : GO = 2 : 1$. Аналогично в треугольнике BCD CO и BK — медианы, откуда $CE : EO = 2 : 1$. Поскольку $AO = OC$, то $AG = GE = EC$. Что и требовалось доказать.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

115. На рисунке 108 AK и CP — медианы треугольника ABC, $AK = 12$ см, $PM = 3{,}5$ см. Найдите длины отрезков MK, AM, CM и CP.

116. На рисунке 109 BK и AN — медианы треугольника ABC, $AB = 30$ см, $BK = 15$ см, $AN = 36$ см. Найдите периметр треугольника KMN.

Рис. 108

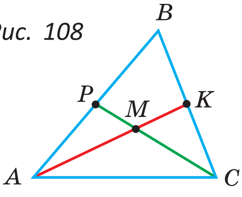


Рис. 109

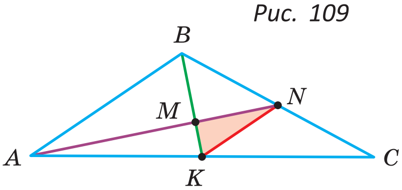
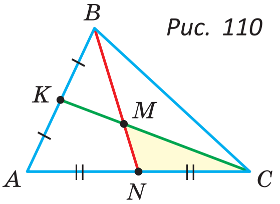


Рис. 110



117. На рисунке 110 точки N и K — середины отрезков AC и AB, $BN = 18$ см, $CK = 21$ см, $AC = 24$ см. Найдите периметр $\triangle NMC$.

118. Медианы AK и CL $\triangle ABC$ пересекаются в точке M. Докажите, что периметры $\triangle KML$ и $\triangle AMC$ относятся как $1 : 2$.

119. В треугольнике ABC (рис. 111) проведены медианы AK, BN и CL, M — точка их пересечения и $NF \parallel AK$. Найдите периметр $\triangle NMF$, если $AK = 102$ см, $CL = 81$ см, $BN = 96$ см.

Рис. 111

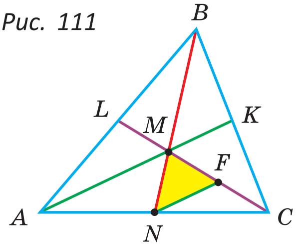
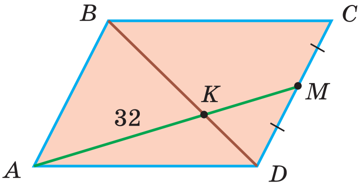


Рис. 112



120. Докажите, что если у треугольника две медианы равны, то он равнобедренный.

121*. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 112), точка M — середина стороны CD. Отрезок AM пересекает диагональ BD в точке K, $AK = 32$ см. Найдите длину отрезка KM.

122*. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Медиану BN продлили за точку N на треть ее длины. Получили отрезок ND, где $ND = \frac{1}{3}BN$. Периметр треугольника DMC равен 42 см. Найдите периметр треугольника, составленного из медиан треугольника ABC.

123*. Медианы AK и CM треугольника ABC взаимно перпендикулярны, $AC = 10$ см. Найдите длину третьей медианы BN.

Моделирование

Возьмите треугольник, сделанный из фанеры или толстого картона. Пусть девочки, используя метровую линейку, проведут в треугольнике две медианы. Затем пусть мальчики закрепят веревку в точке пересечения медиан (для картона можно использовать скотч).

Поднимите треугольник, лежащий на столе, за веревку. Если все сделано правильно, то треугольник останется в равновесии и его плоскость будет параллельна плоскости стола. Объясните при помощи знаний из курса физики данный эффект.

Центр тяжести тела — это точка приложения силы тяжести тела. Например, центр тяжести тонкого однородного стержня находится в его середине, центр тяжести тонкого однородного квадратного листа — в точке пересечения его диагоналей, центр тяжести тонкой однородной треугольной пластины — в точке пересечения медиан треугольника. При расчетах треугольник можно заменить грузом, который находится в точке пересечения медиан, масса которого равна массе треугольника. Поэтому точка пересечения медиан называется «центром тяжести треугольника».

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему Фалеса.
2. Определение средней линии треугольника.
3. Свойство средней линии треугольника.
4. Свойство медиан треугольника.

Умеем

1. Доказывать теорему Фалеса.
2. Делить отрезок на n равных частей при помощи циркуля и линейки.
3. Доказывать теорему о свойстве средней линии треугольника.
4. Доказывать теорему о свойстве медиан треугольника.

§ 10. Трапеция. Средняя линия трапеции

Определение. **Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (*основания трапеции*), а две другие — не параллельны (*боковые стороны трапеции*).

Определение. **Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из точки, взятой на прямой, содержащей одно основание трапеции, к прямой, содержащей другое основание.**

Определение. **Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

На рисунке 113 изображена трапеция $ABCD$, где AD и BC — основания трапеции, AB и CD — ее боковые стороны, $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$.

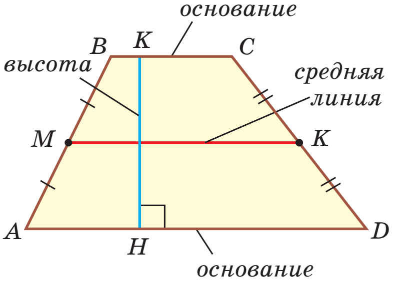


Рис. 113

Перпендикуляр KH (или его длина) — это высота трапеции. Все высоты трапеции равны, как расстояния между параллельными прямыми.

Углы трапеции, прилежащие к боковой стороне, в сумме равны 180°, как внутренние односторонние углы при параллельных прямых: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$.

Точки M и K — середины боковых сторон AB и CD, отрезок MK — средняя линия трапеции. Обычно основания трапеции обозначают буквами a и b, боковые стороны — c и d, среднюю линию — буквой m.

Теорема (о средней линии трапеции).
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме, т. е. $m = \frac{a+b}{2}$.

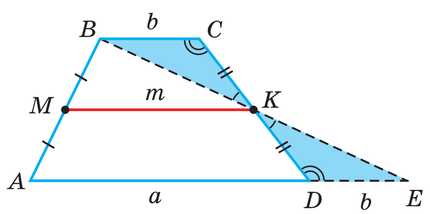


Рис. 114

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD = a$, $BC = b$ — ее основания, $MK = m$ — средняя линия (рис. 114).
Доказать: $m \parallel a$, $m \parallel b$, $m = \frac{a+b}{2}$.

Доказательство. Проведем прямую BK до пересечения с прямой AD в точке E. Треугольники BKC и EKD равны по 2-му признаку равенства треугольников ($CK = KD$ по определению средней линии трапеции, $\angle C = \angle D$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD), $\angle BKC = \angle EKD$ как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $BK = KE$, $DE = BC = b$. Значит, средняя линия MK трапеции $ABCD$ является средней линией треугольника ABE. По свойству средней линии треугольника $MK = \frac{1}{2}AE$ и $MK \parallel AE$. Так как $AE = a + b$, то $m = \frac{a+b}{2}$ и $m \parallel a$. Так как $a \parallel b$ и $a \parallel m$, то $m \parallel b$ (две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой). Теорема доказана.

Задания к § 10

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Большее основание AD трапеции ABCD равно 18 см, средняя линия MN — 12 см. Найти меньшее основание BC трапеции.*

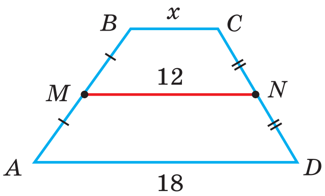


Рис. 115

Решение. Если MN — средняя линия трапеции, то $MN = \frac{AD + BC}{2}$ (рис. 115). Тогда $2MN = AD + BC$, $BC = 2MN - AD = 2 \cdot 12 - 18 = 6$ (см).

Ответ: 6 см.

Замечание. Возможны и другие способы оформления решения задачи.

Например:

Пусть $AD = 18$ см, $MN = 12$ см, $BC = x$ см. Тогда $MN = \frac{AD + BC}{2}$, $12 = \frac{18 + x}{2}$, $x + 18 = 24$, $x = 6$, $BC = 6$ см.

Задача 2. *Точки A и B находятся по одну сторону от прямой a. Расстояние от точки A до прямой a равно 7 см, а от точки B — 11 см. Найти расстояние от середины отрезка AB до прямой a.*

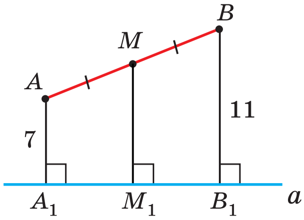


Рис. 116

Решение. Пусть M — середина отрезка AB (рис. 116). Так как расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, то перпендикуляры AA_1 и BB_1 равны соответственно 7 см и 11 см. Нужно найти длину перпендикуляра MM_1 к прямой a. Поскольку два перпендикуляра к одной прямой параллельны, то $AA_1 \parallel BB_1$, $MM_1 \parallel AA_1$. По теореме Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$. Тогда A_1ABB_1 — трапеция, MM_1 — ее средняя линия. По теореме о средней линии трапеции $MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9$ (см).

Ответ: 9 см.

Задача 3. *Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.*

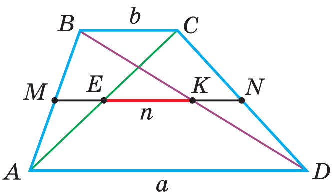


Рис. 117

Решение. Пусть $AD = a$, $BC = b$ — основания трапеции $ABCD$, точки E и K — середины диагоналей AC и BD (рис. 117). Обозначим $EK = n$.

Нужно доказать, что $n \parallel a$, $n \parallel b$ и $n = \frac{a - b}{2}$.

Так как средняя линия MN трапеции параллельна основаниям a и b, $AM = MB$, то по теореме Фалеса

MN пройдет через середины диагоналей AC и BD, то есть через точки E и K. Поэтому отрезок EK принадлежит средней линии MN. Значит, $n \parallel a$ и $n \parallel b$. Так как EN — средняя линия $\triangle ACD$, а KN — средняя линия $\triangle BDC$, то по свойству средней линии треугольника $EN = \frac{1}{2}AD$, $KN = \frac{1}{2}BC$. Тогда $EK = EN - KN = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Полезно запомнить: «*Средняя линия трапеции с основаниями a и b* $(b < a)$ *проходит через середины диагоналей и делится ими на отрезки:* $ME = KN = \frac{b}{2}$, $EN = MK = \frac{a}{2}$, $EK = \frac{a-b}{2}$» (см. рис. 117).

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

124. Изобразите трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 9$ см и $BC = 3$ см, у которой $\angle A = 45°$, высота равна 4 см. Найдите величину угла B трапеции. Проведите среднюю линию трапеции и измерьте ее длину. Найдите длину средней линии по формуле $m = \frac{a+b}{2}$. Сравните результаты.

125. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 24$ см, $BC = 14$ см, $\angle A = 70°$, $\angle C = 130°$. Найдите $\angle B$, $\angle D$ и среднюю линию MN трапеции.

126. На рисунке 118 $ABCD$ — трапеция, $\angle A + \angle B + \angle C = 300°$. Найдите $\angle C$.

127. На рисунке 119 $AD \parallel BC$, M и K — середины отрезков AB и CD. Найдите:

а) $\angle MED$, если $\angle C = 125°$, $\angle BDC = 15°$;
б) $ME : EK$, если $AD = 24$ см, $BC = 18$ см.

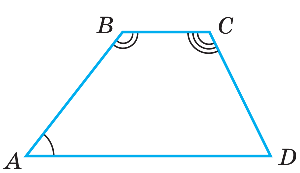


Рис. 118

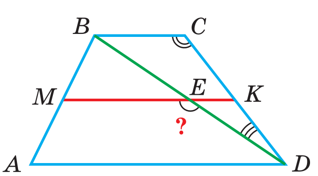


Рис. 119

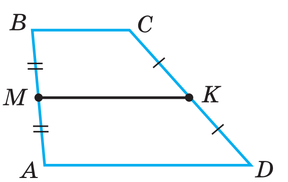


Рис. 120

128. На рисунке 120 отрезок MK — средняя линия трапеции $ABCD$. Найдите:

а) основание AD, если $BC = 24$ см, $MK = 30$ см;
б) сумму периметров четырехугольников $MBCK$ и $AMKD$, если $AD = 20$ см, $AB = 16$ см, $BC = 14$ см, $CD = 18$ см.

129. а) Основания трапеции относятся как 3 : 2, средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите основания трапеции.
б) Одно из оснований трапеции на 4 см больше другого, средняя линия трапеции равна 5 см. Найдите основания трапеции.

130 MN — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, ($M \in AB$), $MB = 9$ см, $ND = 8$ см, $MN = 20$ см. Найдите периметр трапеции $ABCD$.

131. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагональ AC пересекает среднюю линию MN в точке K ($M \in AB$), а диагональ BD — в точке E, $AD = 38$ см, $BC = 30$ см. Найдите:

а) ME; б) MK; в) KE.

132. а) $ABCD$ — трапеция (рис. 121, *а*), $CK \parallel AB$, $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см, $AD = 20$ см. Найдите P_{KCD};
б) $ABCD$ — трапеция (рис. 121, *б*), $CK \parallel BD$, $AD = 17$ см, $BC = 7$ см, $AC = 16$ см, $BD = 12$ см. Найдите P_{ACK}.

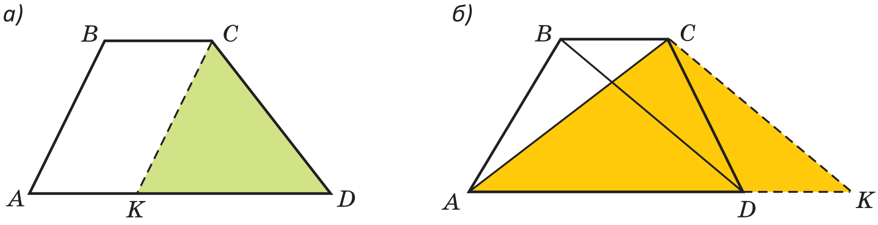


Рис. 121

133. MN — средняя линия трапеции $ABCD$ ($M \in AB$), периметр четырехугольника $MBCN$ равен 30 см, периметр четырехугольника $AMND$ равен 40 см, периметр трапеции $ABCD$ равен 50 см. Найдите MN.

134. Диагональ BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, где $BC < AD$, пересекает ее среднюю линию MK в точке N, $MN : NK = 3 : 1$, $AD = 24$ см. Найдите BC.

135. Докажите, что биссектрисы углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, взаимно перпендикулярны.

136. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l и удалены от нее на расстояния 5 см и 9 см соответственно (рис. 122). Найдите расстояние от середины M отрезка AB до прямой l.

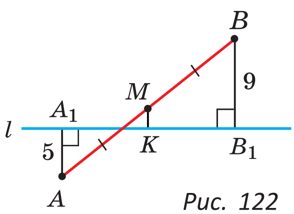


Рис. 122

137. $ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, CK и DK — биссектрисы ее углов C и D. Расстояние от точки K до прямой CD равно 4 см. Найдите высоту трапеции.

138*. Основания трапеции равны 16 см и 10 см. Углы при большем основании равны 40° и 50°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

139*. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, $AB = BC = CD$, $\angle ACD = 90°$. Найдите углы трапеции.

140*. Докажите, что:

а) разность оснований трапеции меньше суммы ее боковых сторон;
б) сумма оснований трапеции меньше суммы ее диагоналей.

141*. В трапеции $ABCD$ основание BC равно боковой стороне AB и в 2 раза меньше основания AD. Найдите градусную меру угла ACD.

142*. Составьте алгоритм построения трапеции при помощи циркуля и линейки: а) по основаниям и боковым сторонам; б) по основаниям и диагоналям. Определите, при каких соотношениях заданных элементов решение существует.

§ 11. Равнобедренная и прямоугольная трапеции

Определение. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной.**

Теорема (свойство равнобедренной трапеции).
1) У равнобедренной трапеции углы при основании равны.
2) У равнобедренной трапеции диагонали равны.

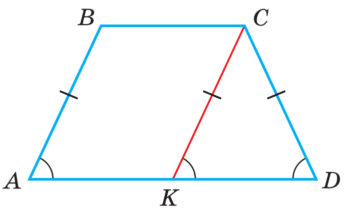


Рис. 123

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$.
Доказать: 1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; 2) $AC = BD$.
Доказательство.
1) Проведем $CK \parallel AB$, $K \in AD$ (рис. 123). Четырехугольник $ABCK$ — параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны). Так как у параллелограмма противоположные стороны равны, то $CK = AB$. Отсюда следует, что $\triangle KCD$ — равнобедренный. Тогда $\angle K = \angle D$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Но $\angle A = \angle K$ как соответственные углы при параллельных прямых AB и CK и секущей AD. Поэтому $\angle A = \angle D$. Поскольку сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°, то и $\angle B = \angle C$.

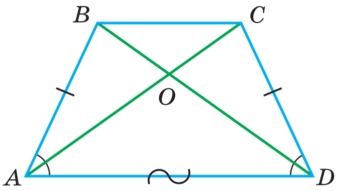


Рис. 124

2) Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle DBA$ (рис. 124). У них сторона AD — общая, $AB = CD$ по условию, $\angle CDA = \angle BAD$ как углы при основании равнобедренной трапеции. $\triangle ACD = \triangle DBA$ по 1-му признаку равенства треугольников. Отсюда $AC = BD$, то есть диагонали равнобедренной трапеции равны. Теорема доказана.

Следствие.

В равнобедренной трапеции $\angle ADB = \angle DAC$, $AO = DO$ *и* $BO = CO$ (см. рис. 124).

Используя рисунок 123, докажите признак равнобедренной трапеции: **«Если углы при основании трапеции равны, то она — равнобедренная»**.

Определение. Трапеция, у которой есть прямой угол, называется **прямоугольной трапецией.**

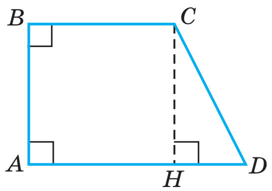


Рис. 125

На рисунке 125 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$, у которой $\angle A = 90°$. Так как $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle B = 90°$. Высота CH трапеции равна меньшей боковой стороне AB. В прямоугольном треугольнике CHD катет CH меньше гипотенузы CD. Поэтому боковая сторона AB — меньшая, а CD — большая. Следовательно, высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне.

Задания к § 11

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Доказать признак равнобедренной трапеции:* ***«Если у трапеции диагонали равны, то она — равнобедренная».***

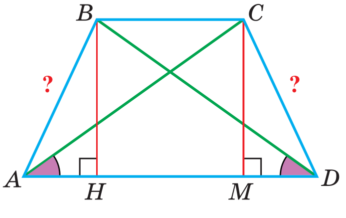


Рис. 126

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 126). Пусть у нее $AC = BD$. Опустим в трапеции высоты BH и CM. $BH = CM$ как расстояние между параллельными прямыми. Прямоугольные треугольники AMC и DHB равны по катету и гипотенузе. Из равенства треугольников следует равенство углов CAD и BDA. Тогда треугольники ACD и DBA равны по двум сторонам ($AC = DB$, сторона AD — общая) и углу между ними, $AB = DC$ как соответствующие стороны в равных треугольниках. Трапеция $ABCD$ равнобедренная. Теорема доказана.

Задача 2. *Доказать, что высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины, принадлежащей меньшему основанию, делит большее основания на отрезки, равные полусумме и полуразности оснований.*

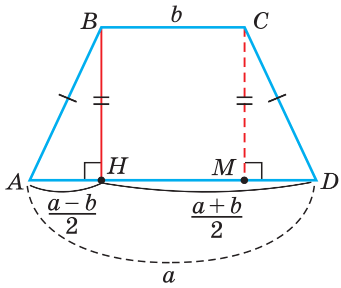


Рис. 127

Доказательство. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, у которой $AD = a$, $BC = b$ — основания, BH — высота (рис. 127). Докажем, что $HD = \frac{a+b}{2}$, $AH = \frac{a-b}{2}$. Проведем вторую высоту CM трапеции. Прямоугольные треугольники AHB и DMC равны по катету и гипотенузе. Поэтому $AH = MD$.

Четырехугольник $HBCM$ — прямоугольник, так как у него все углы прямые. Тогда $HM = BC = b$. Отсюда $AH = MD = \frac{AD - HM}{2} = \frac{a-b}{2}$, $HD = AD - AH = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$. Что и требовалось доказать.

Задача 3. *ABCD — прямоугольная трапеция с основаниями BC и AD. Меньшая боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию, большая боковая сторона равна 42 см и составляет с одной из диагоналей угол, равный 105°. Найти высоту трапеции.*

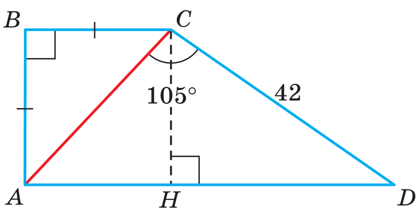


Рис. 128

Решение. Пусть AB — меньшая боковая сторона. Тогда $\angle B = 90°$, $AB = BC$, $CD = 42$ см, $\angle ACD = 105°$ (рис. 128). Треугольник ABC — прямоугольный равнобедренный. Поэтому $\angle ACB = 45°$. Тогда $\angle BCD = 45° + 105° = 150°$, $\angle D = 180° - 150° = 30°$. Проведем высоту CH трапеции. В прямоугольном треугольнике CHD катет CH, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы CD, то есть $CH = 21$ см.

Ответ: 21 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

143. На рисунках 129, *а)*—*в)* дана равнобедренная трапеция $MNKP$. По данным на рисунках найдите углы, отмеченные знаком вопроса.

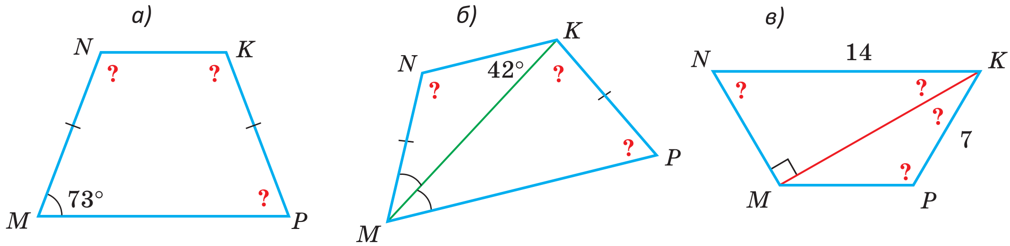


Рис. 129

144. а) BH и CM — высоты равнобедренной трапеции $ABCD$, меньшее основание BC равно 13 м, $MD = 5$ м. Найдите длину средней линии трапеции.

б) BH — высота равнобедренной трапеции $ABCD$, меньшее основание BC равно 8 см, $HD = 12$ см. Найдите большее основание трапеции.

145. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC углы A и D равны, $AB = 12{,}4$ см, средняя линия равна 15 см. Найдите периметр трапеции.

146. Докажите, что сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180°.

147. Диагонали трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания трапеции) пересекаются в точке O, $AO = DO$. Докажите, что трапеция равнобедренная.

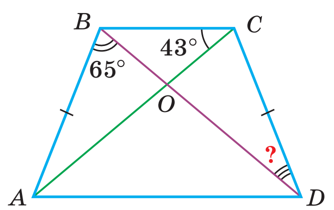


Рис. 130

148. $ABCD$ — равнобедренная трапеция (рис. 130). По данным на рисунке найдите $\angle CDB$.

149. Отрезок BH — высота равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), DB — биссектриса ее угла D, $AD + BC = 48$, $AH = 8$. Найдите CD.

150. $ABCD$ — прямоугольная трапеция с основаниями AD и BC. Найдите среднюю линию трапеции, если:

а) $\angle A = 90°$, $BC = 7$ см, $CD = 8$ см, $\angle C = 120°$;
б) $\angle D = 90°$, $\angle BAD = 45°$, $AD = 12$ см, $CD = 5$ см;
в) $AB = 6$ см — меньшая боковая сторона, $BC : AD = 2 : 3$, $\angle BCD = 135°$.

151*. Диагональ равнобедренной трапеции равна 6 см и образует с основанием угол 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

152*. В трапеции $ABCD$ $\angle ADB = \angle DAC$, $AC \perp BD$, $AD + BC = 16$ см. Найдите высоту BH.

153*. Постройте равнобедренную трапецию:

а) по двум основаниям и боковой стороне;
б) по диагонали и двум основаниям.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определения: трапеции, высоты трапеции, средней линии трапеции.
2. Свойство средней линии трапеции.
3. Определение прямоугольной и равнобедренной трапеций.
4. Свойства равнобедренной трапеции.
5. Признаки равнобедренной трапеции.

Умеем

1. Доказывать теорему о средней линии трапеции.
2. Доказывать свойства равнобедренной трапеции.
3. Доказывать признаки равнобедренной трапеции.

§ 12*. Центральная и осевая симметрия

1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки)

Точки A и A_1 называются *симметричными* относительно точки O (*центра симметрии*), если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 131, *а*).

Центр симметрии считается симметричным сам себе.

Две фигуры F и F_1 называются симметричными относительно некоторой точки O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры относительно точки O (рис. 131, *б*).

Фигура имеет центр симметрии (является центрально-симметричной фигурой), если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры относительно некоторой точки — центра симметрии (рис. 131, *в*).

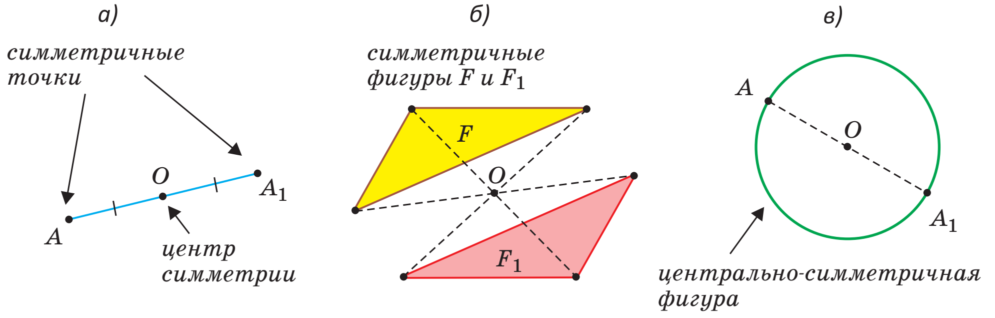


Рис. 131

Примером центрально-симметричных фигур являются: *отрезок* (центр симметрии в середине отрезка); *окружность* (центр симметрии в центре окружности: концы любого диаметра симметричны относительно центра окружности).

Всякую фигуру F можно совместить с симметричной ей относительно некоторого центра O фигурой F_1 путем поворота ее на 180° вокруг точки O. И обратно, если фигуру F можно совместить с другой фигурой F_1 путем поворота на 180° вокруг некоторого центра O, то эти фигуры (или части одной фигуры) симметричны относительно центра. Фигуры, симметричные относительно точки, равны между собой.

Объекты на рисунке 132 имеют центр симметрии.

Рис. 132

Задача 1. *Построить фигуру, симметричную прямой BC относительно точки O.*

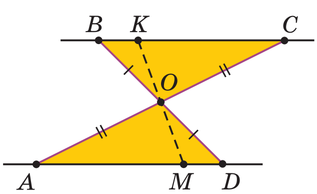


Рис. 133

Решение. Построив точки D и A, симметричные точкам B и C относительно некоторой точки O, получим прямую AD (рис. 133). Из равенства треугольников BOC и DOA следует, что $\angle OCB = \angle OAD$, откуда $BC \parallel AD$. Любая точка K прямой BC имеет симметричную ей относительно точки O точку M на прямой AD и наоборот, что следует из равенства треугольников COK и AOM.

Следовательно, фигура, симметричная данной прямой относительно не лежащей на ней точки, — это, во-первых, прямая, а во-вторых, это прямая, параллельная данной.

Из решенной задачи вытекают следующие свойства центральной симметрии:

1) *прямые, симметричные относительно точки, параллельны между собой*;
2) *отрезки, симметричные относительно точки, равны и параллельны*;
3) *треугольники, симметричные относительно точки, равны между собой.*

Для построения прямой, симметричной данной относительно данного центра симметрии, достаточно взять две точки на данной прямой, построить две симметричные им точки относительно центра симметрии и провести прямую через построенные точки.

Для построения отрезка, симметричного данному относительно данного центра симметрии, достаточно построить точки, симметричные концам данного отрезка относительно данного центра симметрии и соединить отрезком построенные точки.

Для построения треугольника (многоугольника), симметричного данному относительно данного центра симметрии, достаточно построить точки, симметричные его вершинам относительно этого центра симметрии, и соединить их соответствующими отрезками.

Упражнения

1) Какие из следующих фигур являются центрально-симметричными фигурами и где находится их центр симметрии: а) квадрат; б) параллелограмм; в) угол; г) прямая; в) равносторонний треугольник?

2) Изобразите отрезок AB и точку M вне прямой AB. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки M.

3) Изобразите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC: а) относительно вершины C; б) относительно точки пересечения медиан.

4) На координатной плоскости изобразите график функции $y = 2x + 4$. Постройте прямую, симметричную этому графику относительно начала координат. Найдите функцию вида $y = kx + b$, которая соответствует построенной прямой.

5) На координатной плоскости изобразите параллелограмм $ABCD$, где $A(3;\ 2)$, $B(2;\ 7)$, $C(6;\ 7)$, $D(6;\ 2)$. Постройте параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, симметричный параллелограмму $ABCD$ относительно начала координат $O(0;\ 0)$.

6) На доске изображена часть треугольника ABC (рис. 134), где вершина C недоступна. На стороне AB отмечена середина M. При помощи чертежного треугольника нужно построить часть медианы CM, которая помещается на доске.

Выполните это задание, используя свойство центральной симметрии параллелограмма.

Рис. 134

2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)

Точки A и A_1 называются *симметричными* относительно некоторой прямой l (*оси симметрии*), если прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 (рис. 135, *а*). Точки, принадлежащие оси симметрии, считаются симметричными сами себе.

Две фигуры F и F_1 называются симметричными относительно некоторой прямой l, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры относительно прямой l (рис. 135, *б*).

Фигура имеет ось симметрии (является *осесимметричной* фигурой), если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры относительно некоторой прямой — оси симметрии (рис. 135, *в*).

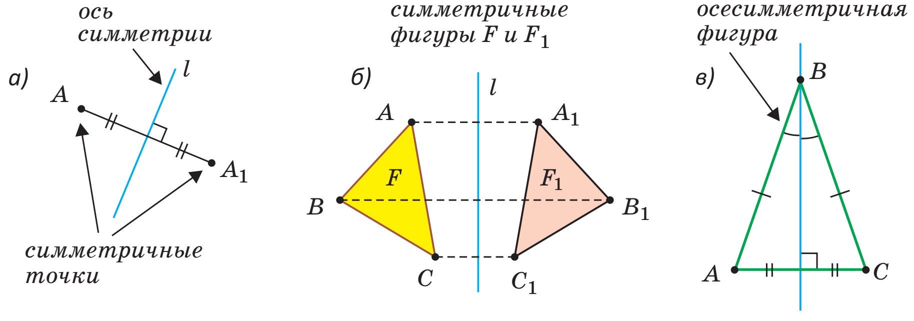


Рис. 135

Примером фигур, имеющих ось симметрии, являются: *отрезок* (осью симметрии является серединный перпендикуляр к нему); *окружность* (осью симметрии является любая прямая, проходящая через центр окружности), *прямоугольник* (оси симметрии проходят через середины противоположных сторон).

Слово «ось» симметрии употребляется потому, что если часть плоскости с фигурой F повернуть в пространстве вокруг этой прямой на 180° как вокруг оси, то фигура F совпадет с симметричной ей относительно прямой l фигурой F_1. Обратно, если какую-то фигуру F путем вращения вокруг некоторой прямой на 180° можно совместить с фигурой F_1, то фигуры F и F_1 симметричны относительно оси вращения (рис. 136).

Следовательно, на плоскости фигуры, симметричные относительно некоторой оси, равны между собой. То же касается симметричных частей фигуры, которая имеет ось симметрии. Например, если тетрадный лист сложить пополам, а затем развернуть, то получим две симметричные части листа относительно оси — линии перегиба.

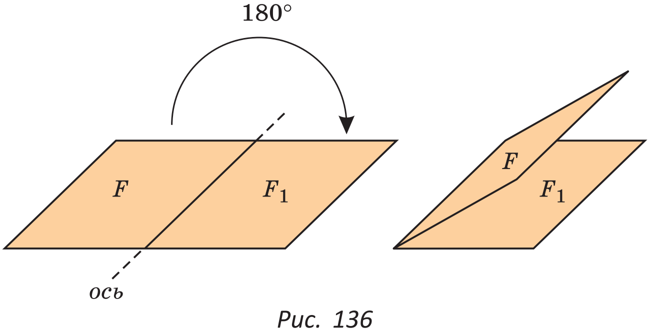


Рис. 136

Рис. 137

Изображения на рисунке 137 имеют ось симметрии.

Задача 2. *Доказать, что равнобедренный треугольник имеет ось симметрии, которая содержит его биссектрису, проведенную к основанию.*

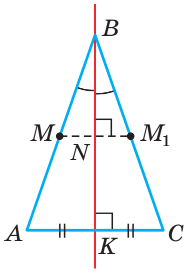


Рис. 138

Доказательство. Пусть BK — биссектриса $\triangle ABC$ с основанием AC (рис. 138). Так как биссектриса BK будет высотой и медианой, то $AC \perp BK$ и $AK = KC$. Точки A и C симметричны относительно прямой BK, точка B симметрична самой себе. Возьмем точку M на стороне AB и проведем прямую MM_1, перпендикулярную прямой BK, где точка M_1 лежит на стороне BC. Так как в $\triangle MBM_1$ биссектриса BN будет и высотой, то он — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника, и его биссектриса BN будет и медианой. Отсюда $MN = NM_1$ и, значит, точки M и M_1 симметричны относительно прямой BK. Следовательно, прямая BK — ось симметрии равнобедренного треугольника ABC.

Задача 3. *Доказать, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.*

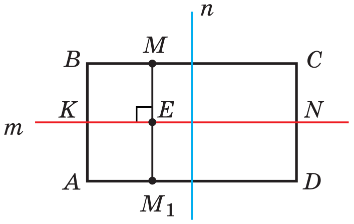


Рис. 139

Доказательство. Пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. 139), m и n — прямые, проходящие через середины его противоположных сторон. Докажем, что для любой точки M, взятой на стороне прямоугольника, найдется точка M_1, симметричная относительно прямой m и принадлежащая стороне прямоугольника. Проведем $MM_1 \perp m$. Докажем, что $ME = EM_1$. Выше (ключевая задача 3 § 4) мы доказали, что $KBCN$ и $AKND$ — равные прямоугольники. Отсюда следует, что расстояние между параллельными прямыми BC и KN равно расстоянию между параллельными прямыми AD и KN. Значит, $ME = EM_1$, и m — ось симметрии для отрезков AB и CD. Следовательно, прямая m — ось симметрии прямоугольника $ABCD$. В силу доказанного прямая n, проходящая через середины сторон AD и BC прямоугольника, является второй его осью симметрии.

Выделим некоторые с в о й с т в а о с е в о й с и м м е т р и и.

1) *прямые, симметричные относительно оси, пересекаются в точке, лежащей на оси симметрии, либо параллельны между собой*;

2) *отрезки, симметричные относительно оси, равны*;

3) *треугольники, симметричные относительно оси, равны*.

Упражнения

1) Какие из фигур, изображенных на рисунках 140, *а*)—*г*), имеют ось симметрии? Перерисуйте эти фигуры в тетрадь и проведите их оси симметрии.

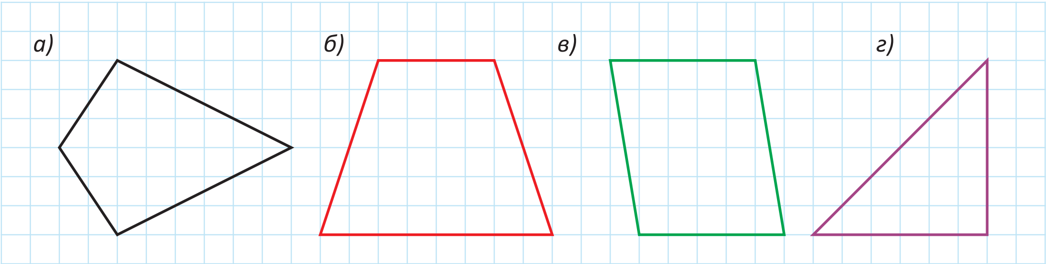


Рис. 140

2) Сколько осей симметрии у прямоугольника, квадрата, ромба, равнобедренной трапеции, равностороннего треугольника?

3) Изобразите отрезок AB и ось l, не пересекающую отрезок AB. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно прямой l.

4) Изобразите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно оси, проходящей через вершину C.

5) На координатной плоскости изобразите параллелограмм $ABCD$, где $A(3; 2)$, $B(2; 7)$, $C(6; 7)$, $D(7; 2)$. Постройте параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, симметричный параллелограмму $ABCD$ относительно оси Oy.

6) На координатной плоскости изобразите график функции $y = x + 3$. Постройте прямую, симметричную этому графику относительно оси Ox. Найдите формулу, задающую функцию, которая соответствует построенной прямой.

7) Какие из следующих слов-полиндромов имеют ось симметрии:

КАЗАК МАДАМ КОК ШАЛАШ ТОПОТ РАДАР

3. Зеркальная симметрия.

Помимо центральной и осевой симметрии существует еще симметрия относительно плоскости. Она называется *зеркальной симметрией*. Точки A и A_1 симметричны относительно плоскости, если плоскость проходит

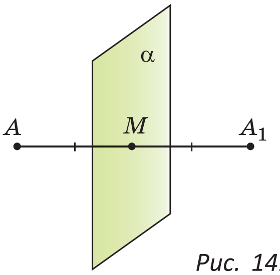


Рис. 141

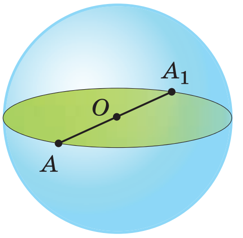


Рис. 142

через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна этому отрезку (рис. 141). То есть, $AA_1 \perp \alpha$ и $AM = MA_1$.

В пространстве плоскостью симметрии обладает шар: любая плоскость, проходящая через его центр, делит шар на две части, симметричные относительно этой плоскости (рис. 142).

У прямоугольного параллелепипеда три плоскости симметрии (рис. 143).

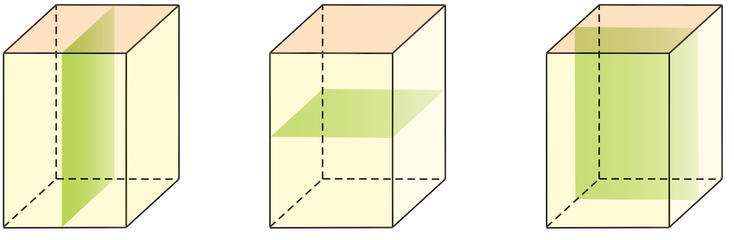


Рис. 143

Многие здания и сооружения обладают плоскостью симметрии (рис. 144). Можно указать плоскость, относительно которой симметрично тело человека. Правда, это только в идеале. У человека есть особенности, которые делают его внешний облик асимметричным: прическа, одна более развитая рука, родинки и т. д.

Название «зеркальная» симметрия объясняется тем, что предмет и его изображение в зеркале симметричны относительно плоскости зеркала. Отражения в воде деревьев, зданий являются примером зеркальной симметрии.

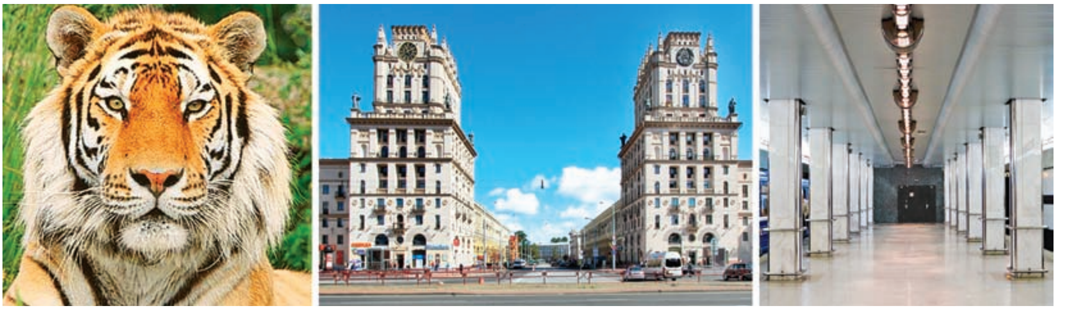


Рис. 144

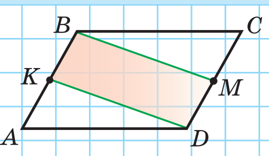
ЗАПОМИНАЕМ

1. **Сумма углов *n*-угольника равна 180°(*n* – 2).**
2. **Пять свойств параллелограмма:** «У параллелограмма ...
   1) сумма соседних углов равна 180°;
   2) диагональ делит его на два равных треугольника;
   3) противоположные стороны равны;
   4) противоположные углы равны;
   5) диагонали точкой пересечения делятся пополам».
3. **Три признака параллелограмма:** «Если у четырехугольника
   1) две стороны равны и параллельны, или
   2) противоположные стороны равны, или
   3) диагонали точкой пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник — параллелограмм».
4. **Свойство диагоналей прямоугольника:** «Диагонали прямоугольника равны».
5. **Свойство диагоналей ромба:** «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов».
6. **Свойство средней линии треугольника:** «Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине».
7. **Свойство средней линии трапеции:** «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме».
8. **Теорема Фалеса:** «Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки».

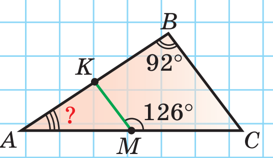
ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

Тесты 1—3

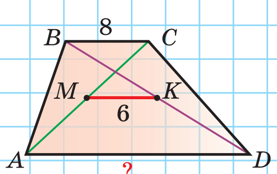
1. $ABCD$ — параллелограмм, M и K — середины его сторон. Докажите, что $DKBM$ — параллелограмм.



2. M и K — середины сторон AC и AB. Найдите $\angle A$.

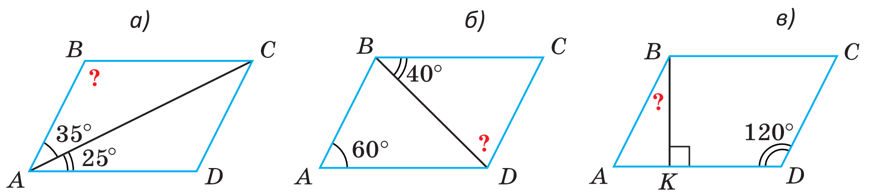


3. Найдите основание AD трапеции $ABCD$, если M и K — середины ее диагоналей.

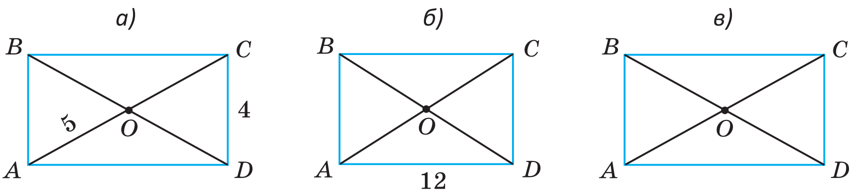


ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1

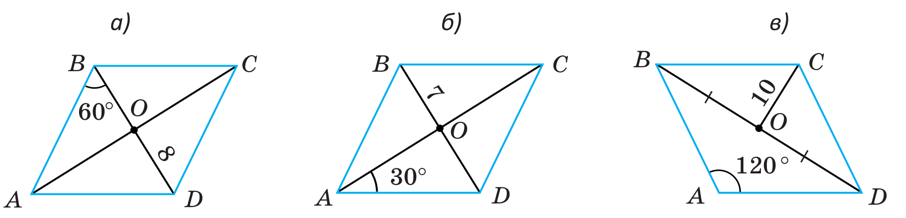
1. $ABCD$ — параллелограмм. Найдите угол, обозначенный знаком «?».



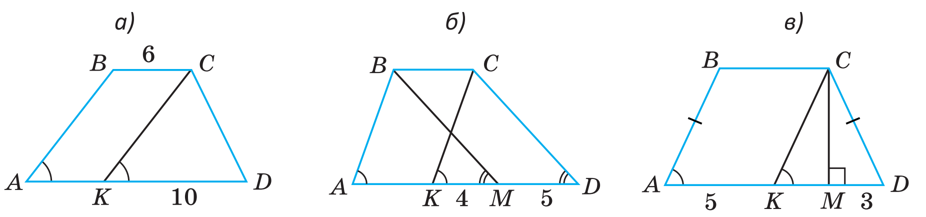
2. $ABCD$ — прямоугольник. Найдите:
а) P_{COD}; б) P_{AOD}, если $BD = 15$; в) AD, если $P_{AOB} = 25$, $P_{ACD} = 40$.



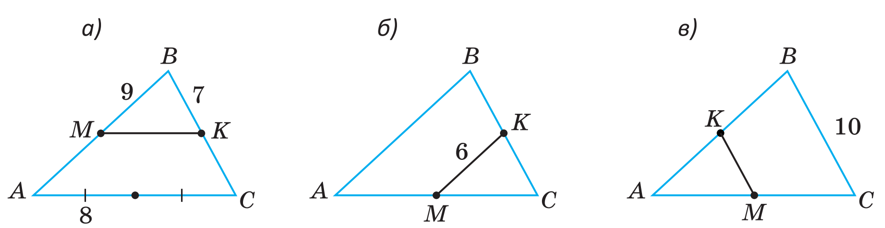
3. $ABCD$ — ромб. Найдите его периметр.



4. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$.



5. MK — средняя линия треугольника ABC. Найдите:
а) P_{ABC}; б) P_{ABC}, если $P_{ABKM} = 28$; в) P_{KBCM}, если $P_{AKM} = 18$.

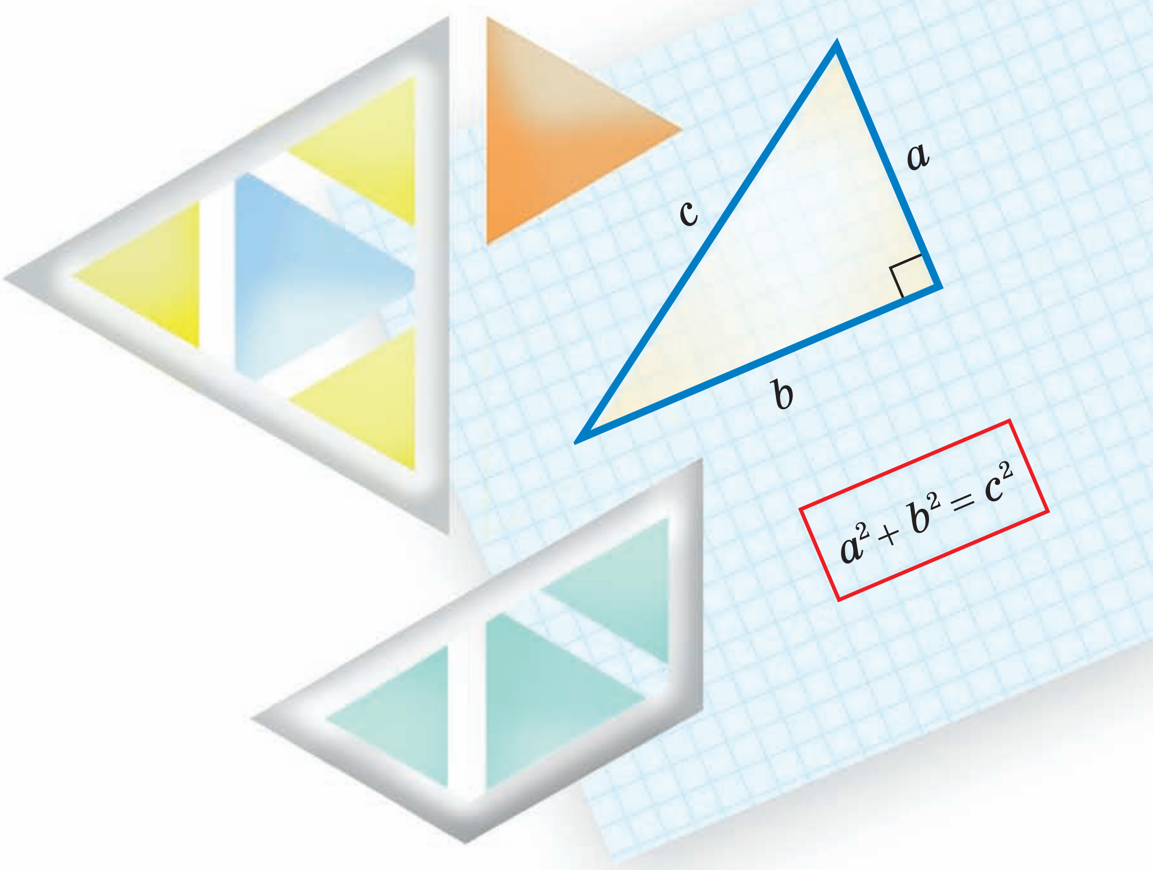


Глава II

Площади многоугольников

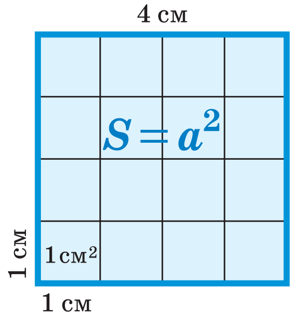
В этой главе вы узнаете:

- Какие фигуры называют равновеликими
- Как найти площадь треугольника
- Что утверждает теорема Пифагора



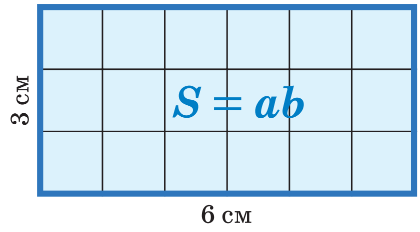
Площади

Квадрат



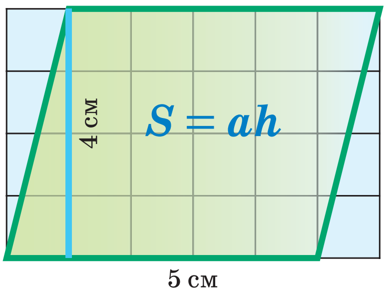
$S = 4^2 = 16\,(\text{см}^2)$

Прямоугольник



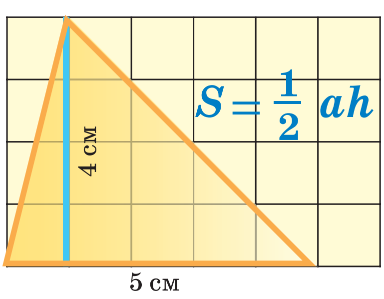
$S = 6 \times 3 = 18\,(\text{см}^2)$

Параллелограмм



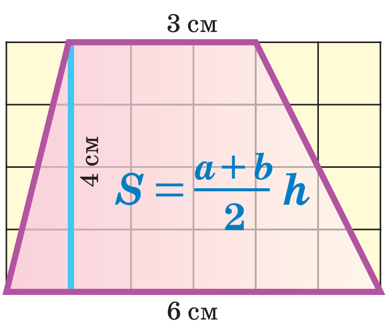
$S = 5 \times 4 = 20\,(\text{см}^2)$

Треугольник



$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10\,(\text{см}^2)$

Трапеция



$S = \frac{6+3}{2} \times 4 = 18\,(\text{см}^2)$

§ 13. Площадь квадрата, прямоугольника

Под площадью многоугольника или другой ограниченной плоской фигуры понимают величину части плоскости, которую она занимает. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины. Единица измерения площади называется квадратной единицей: 1 см^2 (квадратный сантиметр), 1 дм^2 (квадратный дециметр), 1 м^2 (квадратный метр) и т. д.

Для нахождения площади квадрата со стороной 5 см его можно разбить на квадраты со стороной 1 см (рис. 145). В одном горизонтальном ряду будет 5 таких квадратов, а рядов будет тоже 5. Получим $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ малых квадратов. Тогда площадь большого квадрата равна 25 см^2. Можно доказать, что если сторона квадрата равна дробному или иррациональному числу a, то площадь квадрата также равна a^2. То есть $S_{кв} = a^2$.

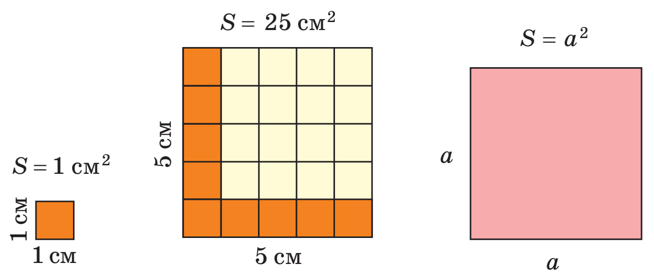


Рис. 145

Свойства (аксиомы) площади:

1. *Каждый многоугольник имеет площадь, которая выражается положительным числом.*

Это число показывает, сколько раз единица измерения площади, т. е. единичный квадрат и его части, укладывается в данном многоугольнике.

2. *Равные многоугольники имеют равные площади.*

Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. То есть если два многоугольника имеют равные площади, то они не обязательно равны между собой как фигуры.

3. *Если многоугольник разбить на несколько многоугольников, то сумма площадей полученных многоугольников будет равна площади данного.*

Так, если прямоугольник с площадью S разбить на два прямоугольника с площадями S_1 и S_2 (рис. 146), то $S = S_1 + S_2$.

Заметим, что для периметров указанных прямоугольников аналогичное свойство неверно: $P \neq P_1 + P_2$.

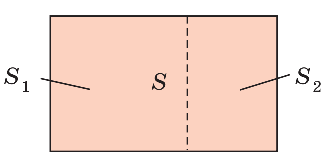


Рис. 146

Определение. Фигуры, площади которых равны, называются **равновеликими**.

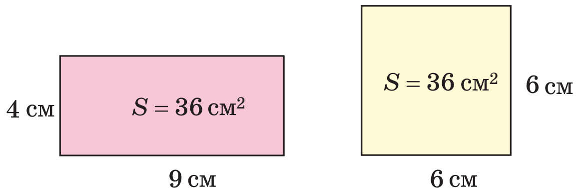


Рис. 147

Вы уже знаете, что площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины, т. е. произведению его измерений. Прямоугольник со сторонами 4 см и 9 см равновелик квадрату со стороной 6 см (рис. 147).

Докажем справедливость формулы площади прямоугольника.

Теорема. **Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, то есть $S_{пр} = ab$.**

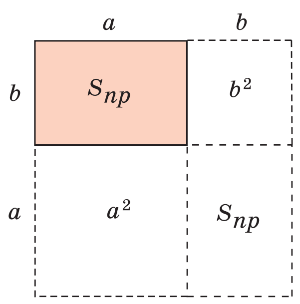


Рис. 148

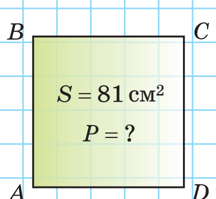
Доказательство. Достроим прямоугольник со сторонами a и b до квадрата со стороной $a + b$, как показано на рисунке 148. Площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$. Построенный квадрат состоит из двух равных прямоугольников с площадью $S_{пр}$ и двух меньших квадратов: одного со стороной a и площадью a^2, другого со стороной b и площадью b^2. Так как площадь многоугольника равна сумме площадей его частей, то $2S_{пр} + a^2 + b^2 = (a + b)^2$, $2S_{пр} + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $S_{пр} = ab$. Теорема доказана.

Замечание. Так как каждая сторона прямоугольника является его высотой относительно соседней стороны как основания, то можно говорить, что площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

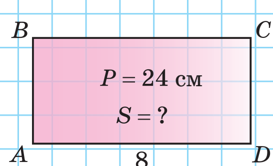
Тест 1

Площадь квадрата равна 81 см^2. Найдите периметр квадрата.



Тест 2

Периметр прямоугольника равен 24 см, одна из его сторон — 8 см. Найдите площадь прямоугольника.



Задания к § 13

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Найти периметр квадрата равновеликого прямоугольнику со сторонами* 9 *см и* 16 *см* (рис. 149).

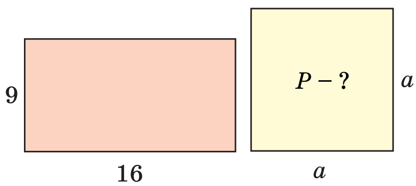


Рис. 149

Решение. Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, т. е. $S_{пр} = 9 \cdot 16 = 144$ (см^2). Так как квадрат равновелик данному прямоугольнику, то $S_{кв} = 144$ (см^2). Но площадь квадрата равна квадрату длины его стороны, т. е. $S_{кв} = a^2$. Отсюда $a^2 = 144$, $a = \sqrt{144} = 12$ (см) — сторона квадрата. Периметр квадрата $P_{кв} = 4a = 4 \cdot 12 = 48$ (см).

Ответ: 48 см.

Замечание. Уравнение $a^2 = 144$, вообще говоря, имеет два корня: –12 и 12. Считая, что длина стороны квадрата — величина положительная, мы сразу записали $a = \sqrt{144}$, а корень $a = -\sqrt{144}$ отбросили как посторонний.

Задача 2. *Из квадрата ABCD вырезали треугольник BOC, где O — точка пересечения диагоналей. Площадь многоугольника ABOCD равна* 54 *см*^{2}. *Найти длину стороны квадрата.*

Решение. Диагонали AC и BD делят квадрат на 4 равных треугольника (рис. 150). Многоугольник $ABOCD$ состоит из трех равных треугольников: $\triangle AOD$, $\triangle AOB$ и $\triangle COD$. Площадь каждого треугольника равна $54 : 3 = 18$ (см^2), а площадь квадрата $ABCD$ равна $18 \cdot 4 = 72$ (см^2). Так как площадь квадрата находится по формуле $S = a^2$, где a — сторона квадрата, то $a^2 = 72$, $a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $6\sqrt{2}$ см.

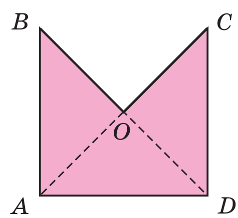


Рис. 150

Задача 3. *Периметр прямоугольника равен* 16 *см, а его площадь равна* 15 *см*^{2}. *Найти стороны прямоугольника* (рис. 151).

Решение. *Способ* 1. Полупериметр прямоугольника (сумма длин двух соседних сторон) равен 8 см. Если одна его сторона равна x см, то другая сторона равна $(8 - x)$ см. Площадь прямоугольника находится по формуле $S = ab$, где a и b — соседние стороны. По условию $x \cdot (8 - x) = 15$. Решим полученное уравнение:

$$-x^2 + 8x = 15,\ x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = 4 \pm 1;\ x_1 = 3,\ x_2 = 5.$$

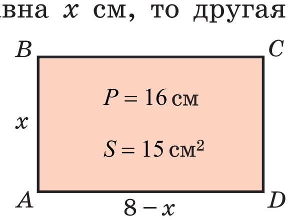


Рис. 151

Если $x = 3$, то $8 - x = 5$; если $x = 5$, то $8 - x = 3$. Стороны прямоугольника равны 3 см и 5 см.

Способ 2. Пусть a и b — стороны прямоугольника. Так как площадь прямоугольника $S = ab$, то $b = \frac{S}{a}$. По условию $S = 15$ см^2. Поэтому $b = \frac{15}{a}$. Периметр прямоугольника $P = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{15}{a}\right)$. Из условия $2\left(a + \frac{15}{a}\right) = 16$. Отсюда $a^2 - 8a + 15 = 0$ (где $a \neq 0$). По теореме Виета (обратной) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$. Тогда $b_1 = \frac{15}{3} = 5$, $b_2 = \frac{15}{5} = 3$. Получили $a = 3$ (см), $b = 5$ (см) или $a = 5$ (см), $b = 3$ (см). Стороны прямоугольника равны 3 см и 5 см.

Ответ: 3 см и 5 см.

Замечание. Часто при решении геометрических задач с помощью уравнений при обозначении длин неизвестных отрезков размерность не ставится: вместо x дм, a см, R м пишут x, a, R. В этом случае размерность указывают в скобках после нахождения корня уравнения: $x = 4$ (дм), $a = 5$ (см), $R = 6$ (м).

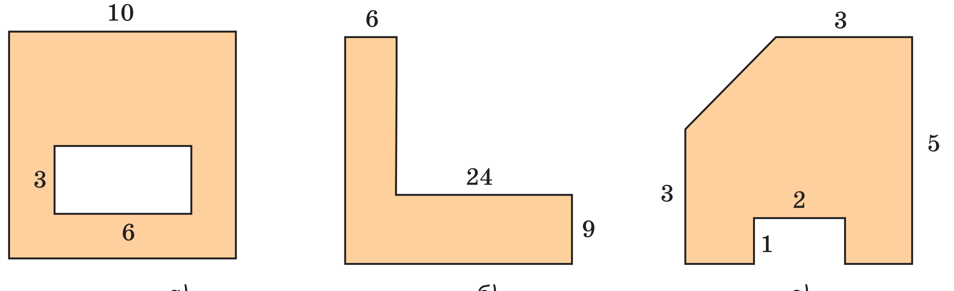
РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

154. Измерьте большой линейкой размеры классной доски. Найдите ее площадь в квадратных метрах, округлив ответ до десятых.

155. Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:

а) 25 мм; б) 1,2 дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

156. На рисунках 152, *а)—в)* изображены фигуры, которые получены из квадратов, у которых вырезали какую-то часть. По указанным размерам найдите площадь оставшейся части каждого квадрата (все размеры даны в см).



а) *б)* *в)*

Рис. 152

157. Площадь прямоугольника равна 24 см^2. Стороны прямоугольника относятся как 2 : 3. Найдите стороны прямоугольника.

158. Дан прямоугольник $ABCD$. Сторону AD продлили за точку D на отрезок DK, равный стороне AD. Объясните, почему:

а) $\triangle ACK$ равновелик прямоугольнику $ABCD$;
б) $\triangle ABK$ равновелик прямоугольнику $ABCD$.

159. а) Одна из сторон прямоугольника равна 18 дм, а его площадь равна 90 дм^2. Найдите периметр прямоугольника.

б) Периметр прямоугольника равен 36 м, а одна из его сторон равна 12 м. Найдите площадь прямоугольника.

160. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка K (рис. 153), $\angle BKD = 135°$, $KD = 4$ см, $CD = 5$ см. Найдите площадь прямоугольника.

161. В прямоугольнике $ABCD$ проведены отрезки $MK \parallel AD$, $NP \parallel AB$ (рис. 154). Докажите, что площадь четырехугольника $MNKP$ равна $\frac{1}{2}$ площади прямоугольника $ABCD$.

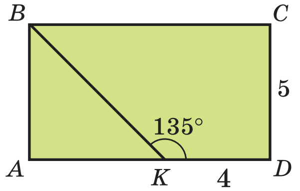


Рис. 153

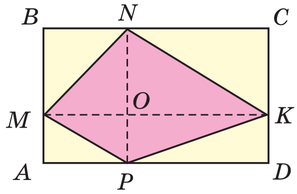


Рис. 154

162. а) Периметр прямоугольника равен 22 см. Одна из сторон на 3 см больше другой. Найдите площадь прямоугольника.

б) Площадь прямоугольника равна 80 см^2. Одна из сторон на 11 см меньше другой. Найдите периметр прямоугольника.

163. Площадь прямоугольника равна 48 см^2. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон этого прямоугольника.

164. На координатной плоскости дан прямоугольник $ABCD$, где $A(-3; -2)$, $C(4; 3)$, $D(4; -2)$. Найдите площадь этого прямоугольника, если единичный отрезок равен 1 см.

165. а) Каждую сторону квадрата увеличили в 3 раза. Определите, во сколько раз увеличилась площадь квадрата.

б) Определите, во сколько раз нужно уменьшить каждую сторону квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 16 раз.

166. Каждую сторону квадрата увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

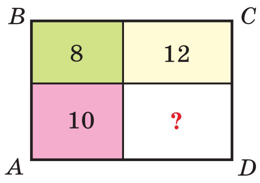


Рис. 155

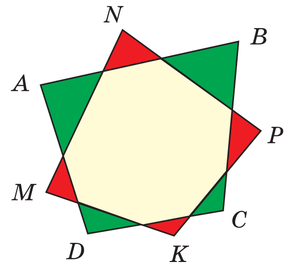


Рис. 156

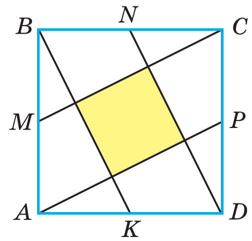


Рис. 157

167*. Прямоугольник разбит прямыми, перпендикулярными его сторонам, на четыре части (рис. 155). Площади трех частей равны 8, 10 и 12. Найдите площадь четвертой (незакрашенной) части прямоугольника.

168*. Два равновеликих четырехугольника $ABCD$ и $MNPK$ совместили, как показано на рисунке 156. Докажите, что сумма площадей зеленых треугольников равна сумме площадей красных треугольников.

169*. Точки M, N, P, K — середины сторон квадрата $ABCD$ (рис. 157).

а) Какую форму имеет желтый четырехугольник?
Обоснуйте ваш ответ.
б) Какую часть составляет его площадь от площади квадрата $ABCD$:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{1}{8}$?

Докажите, что ваше утверждение верно.

Гимнастика ума

На рисунке 158 изображены квадраты со сторонами 10 см, 9 см, 7 см и 4 см. Известно, что сумма площадей двух красных частей равна 112 см^2. Найдите сумму площадей двух синих частей.

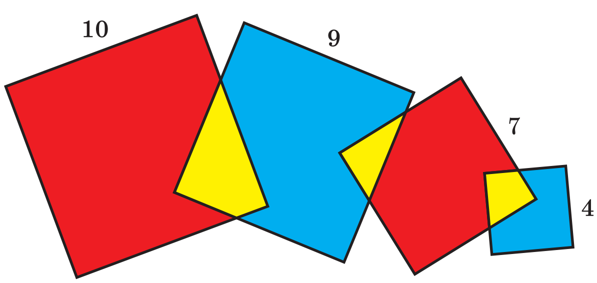


Рис. 158

§ 14. Площадь параллелограмма

Т е о р е м а. **Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, т. е. $S_{пар} = ah$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 159, *а*), $AD = a$ — основание, $BK = h$ — высота. Проведем в параллелограмме высоту $CM = h$. Четырехугольник $KBCM$ является прямоугольником, так как у него все углы прямые. Прямоугольные треугольники ABK и DCM равны по катету и гипотенузе ($BK = CM$ как высоты, проведенные к одному основанию, $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма). Значит, равны и их площади.

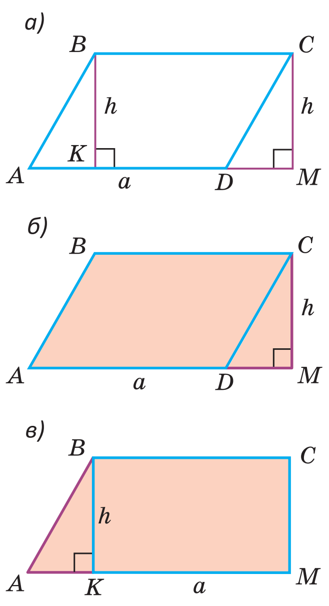


Рис. 159

Рассмотрим трапецию $ABCM$.

Площадь трапеции $ABCM$, с одной стороны, равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и прямоугольного треугольника DCM (рис. 159, *б*).

С другой стороны, она равна сумме площадей прямоугольника $KBCM$ и прямоугольного треугольника ABK (рис. 159, *в*).

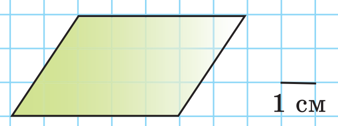
В силу равенства площадей треугольников ABK и DCM площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $KBCM$. Площадь прямоугольника $S_{KBCM} = BC \cdot BK$, площадь параллелограмма $S_{ABCD} = BC \cdot BK = AD \cdot BK$. То есть $S_{пар} = ah$. Теорема доказана.

Замечание. Иногда высоту параллелограмма, проведенную к стороне a, обозначают h_a, а высоту, проведенную к стороне b, обозначают h_b. Тогда справедливо равенство $S_{пар} = ah_a = bh_b$, откуда $a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

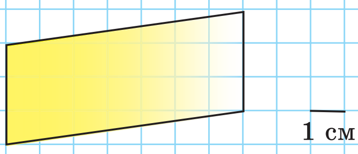
Тест 1

Найдите площадь параллелограмма, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.



Тест 2

Найдите площадь параллелограмма, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.



Задания к § 14

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Стороны параллелограмма равны 12 см и 8 см. Высота, проведенная к большей стороне, равна 10 см. Найти высоту, проведенную к меньшей стороне параллелограмма.*

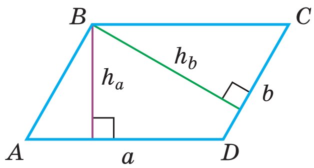


Рис. 160

Решение. Пусть a = 12 см и b = 8 см — стороны параллелограмма $ABCD$, h_a и h_b — его высоты и h_a = 10 см (рис. 160). Так как $S = ah_a$ и $S = bh_b$ — это площадь одного и того же параллелограмма, то $ah_a = bh_b$, то есть $12 \cdot 10 = 8 \cdot h_b$. Отсюда $h_b = \frac{12 \cdot 10}{8} = 15$ (см).

Ответ: 15 см.

Замечание. Из равенства $ah_a = bh_b$ следует, что $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. То есть стороны параллелограмма обратно пропорциональны его высотам. К большей стороне параллелограмма проведена меньшая высота, а к меньшей стороне — бо́льшая.

Задача 2. *Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24 см², BC = 6 см, $\angle ACB = 30°$. Найти длину диагонали AC.*

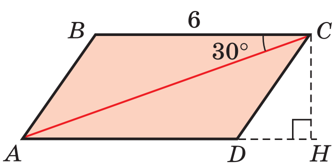


Рис. 161

Решение. Опустим высоту CH на продолжение основания AD (рис. 161). Так как $S_{ABCD} = AD \cdot CH$ и $AD = BC = 6$ см, то $24 = 6 \cdot CH$, $CH = \frac{24}{6} = 4$ (см). Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACH$. Заметим, что $\angle CAH = \angle ACB = 30°$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $AC = 2CH = 8$ см.

Ответ: 8 см.

Задача 3*. *На рисунке 162 $AD \parallel BM$, $AB \parallel DC$, $AK \parallel DM$. Доказать, что площадь красного четырехугольника равна площади синего.*

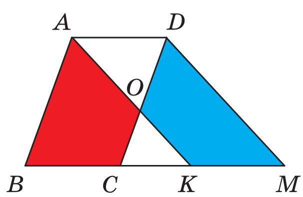


Рис. 162

Доказательство. Параллелограммы $ABCD$ и $AKMD$ равновелики, так как у них сторона AD — общая, а высоты, проведенные к этой стороне, равны как расстояния между параллельными прямыми BM и AD. Параллелограмм $ABCD$ состоит из красного четырехугольника $BAOC$ и треугольника AOD. Параллелограмм $AKMD$ состоит из синего четырехугольника $OKMD$ и треугольника AOD. Следовательно, площади синего и красного четырехугольников равны. Что и требовалось доказать.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

170. По данным на рисунках 163, *а)*—*в)* найдите площадь параллелограмма $ABCD$ (длины отрезков даны в см).

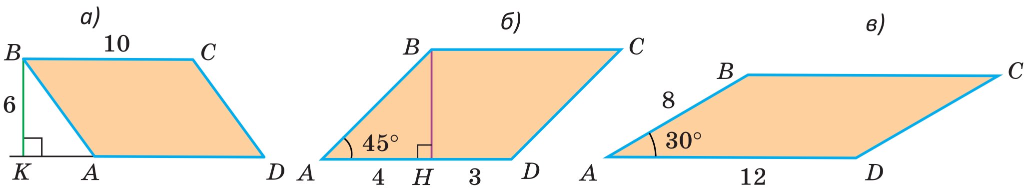


Рис. 163

171. а) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 100 м^2. Сторона AD равна 20 м. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к стороне AD.

б) Высота BH параллелограмма $ABCD$ проведена к стороне AD и равна 8 см, $AH = 3$ см, $HD = 2AH$. Найдите площадь параллелограмма.

172. а) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 60 см^2. Высота BK, проведенная к стороне CD, равна 10 см, $AD = 12$ см. Найдите периметр параллелограмма.

б) Из вершины B параллелограмма $ABCD$ к стороне CD проведена высота BK, к стороне AD — высота BH. Найдите периметр параллелограмма, если $BH = 5$ см, $BK = 7$ см, $AD = 14$ см.

173. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 164), $BC = 10$ см, $CK \perp AD$, $CK = 7$ см. Найдите площадь треугольника ABD.

174. На рисунке 165 $AB = CD$, $AD = BC$. Найдите расстояние от точки D до прямой AB, если $S_{ABCD} = 54$ см^2, $AB = 6$ см.

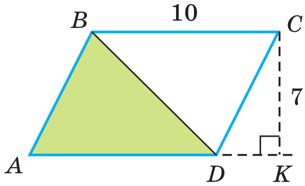


Рис. 164

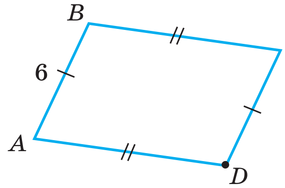


Рис. 165

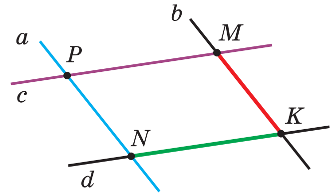


Рис. 166

175. На рисунке 166 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $MK = 16$, $NK = 24$. Расстояние между прямыми a и b равно 18. Найдите расстояние между прямыми c и d.

176. а) Большая сторона параллелограмма равна 18 см, высоты относятся как 1 : 2. Найдите периметр параллелограмма.

б) Периметр параллелограмма равен 48 см, одна из его сторон в 2 раза больше другой. Высота, опущенная на большую сторону, равна 4,5 см. Найдите площадь параллелограмма.

177. Определите, сколько квадратных единиц составляет площадь параллелограмма, изображенного на координатной плоскости (рис. 167).

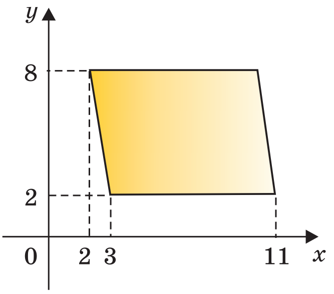


Рис. 167

178. Дан параллелограмм $ABCD$, BK — биссектриса угла B ($K \in AD$), $CD = 12$ см, $KD = 5$ см, расстояние от точки K до прямой BC равно 9 см. Найдите площадь параллелограмма.

179. Расстояние от вершины B параллелограмма $ABCD$ до прямой AD равно 6 см, а до прямой AC — 4 см, $\angle CAD = 30°$. Найдите площадь параллелограмма.

180. Площадь параллелограмма равна 112 см^2. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного параллелограмма.

181. Дан параллелограмм $ABCD$, DK — биссектриса угла D (точка K лежит на стороне BC), $\angle BKD = 105°$, $BK = 4$ см, $KC = 12$ см. Найдите площадь параллелограмма.

182. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см, его высоты равны 10 см и 6 см. Найдите площадь параллелограмма.

183*. Угол между высотами BK и BM параллелограмма $ABCD$ равен 45°. Высота BK делит сторону AD в отношении 1 : 2, считая от точки A. Средняя линия трапеции $KBCD$ равна 7,5 см. Найдите площадь параллелограмма.

184*. Точки M, N, P, K — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 168). Площадь четырехугольника $MNPK$ равна 144 см^2. Известно, что $BD = 24$ см, $NH \perp MK$. Докажите, что $\angle NHP = \angle NPH$.

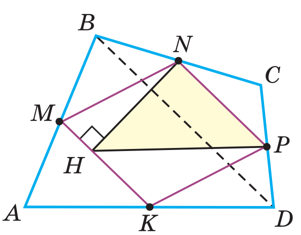


Рис. 168

§ 15. Площадь треугольника, прямоугольного треугольника, ромба

Теорема. **Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то есть $S_\triangle = \frac{1}{2}ah$.**

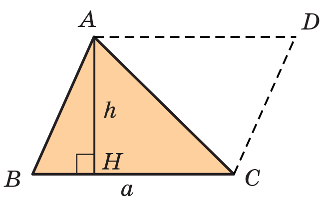


Рис. 169

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ сторона $BC = a$, $AH = h$ — высота. Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $BADC$ (рис. 169). Основание a и высота h у параллелограмма те же, что у треугольника ABC. Треугольники ABC и CDA равны, а значит, равны их площади. Тогда площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $BADC$, т. е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{BADC} = \frac{1}{2}ah$. Теорема доказана.

Замечание. Принято высоты треугольника, проведенные к сторонам a, b и c, обозначать соответственно h_a, h_b, h_c. Тогда $S_\triangle = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, откуда $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

Следствие.

Треугольники, имеющее равные основания и равные высоты, проведенные к этим основаниям, равновелики.

На рисунке 170 все треугольники, имеющие с треугольником ABC общее основание AC, вершины которых лежат на прямой, проходящей через вершину B параллельно прямой AC, будут равновелики.

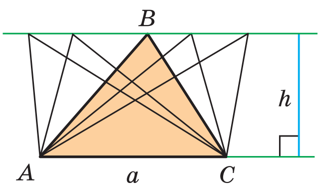


Рис. 170

Теорема. **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то есть $S = \frac{ab}{2}$.**

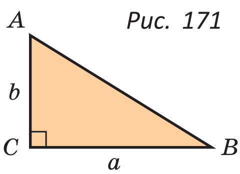


Рис. 171

Доказательство. Катет b прямоугольного треугольника ABC является высотой, а катет a — соответствующим этой высоте основанием (рис. 171). Поэтому площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{ab}{2}$. Теорема доказана.

Площадь ромба можно найти как площадь параллелограмма, то есть как произведение основания на высоту. Однако, учитывая, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны, можно вывести отдельную формулу площади ромба.

Теорема. **Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, т. е. $S_{ромба} = \frac{d_1 d_2}{2}$.**

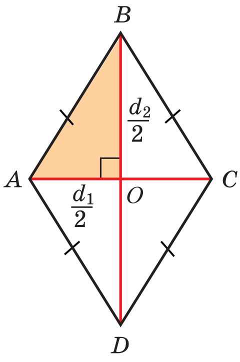


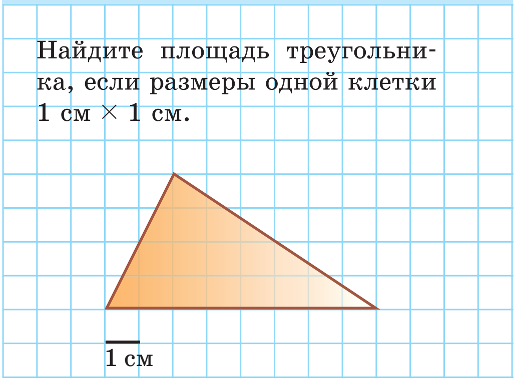
Рис. 172

Доказательство. Пусть у ромба $ABCD$ диагонали $AC = d_1$, $BD = d_2$ (рис. 172). Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то прямоугольные треугольники AOB, BOC, COD, AOD равны по двум катетам. А значит, равны их площади. Поскольку площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то $S_{AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$. Следовательно, $S_{ABCD} = 4S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$, т. е. $S_{ромба} = \frac{d_1 d_2}{2}$. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

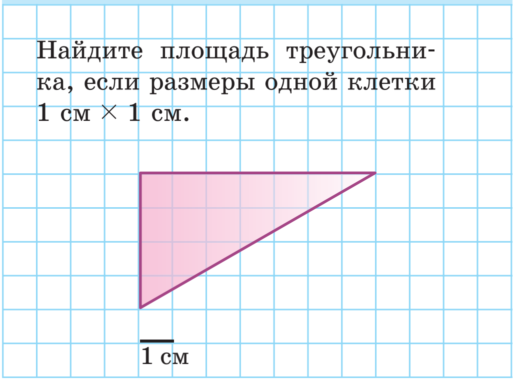
Тест 1

Найдите площадь треугольника, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.



Тест 2

Найдите площадь треугольника, если размеры одной клетки 1 см × 1 см.



Задача. Доказать свойство: «**Площади треугольников с общей высотой (или равными высотами) относятся как соответствующие этим высотам основания**».

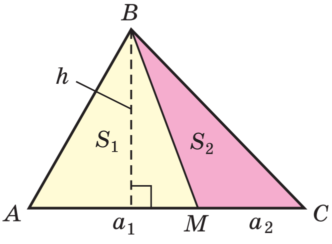


Рис. 173

Доказательство. У треугольников ABM и CBM на рисунке 173 общая высота h, которая проведена из вершины B. Обозначим соответствующие основания $AM = a_1$ и $MC = a_2$. Найдем отношение площадей этих треугольников: $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1 h}{\frac{1}{2}a_2 h} = \frac{a_1}{a_2}$. Что и требовалось доказать.

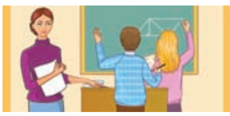
Замечание. Согласно доказанному свойству $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2}$.

Следствия.

1. *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*

2. *Диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.*

Докажите эти следствия самостоятельно.



Задания к § 15

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.*

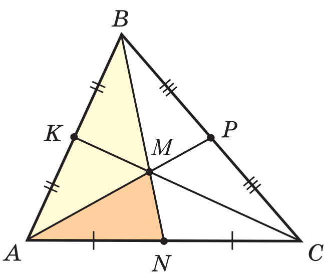


Рис. 174

Решение. Пусть AP, BN и CK — медианы треугольника ABC, площадь которого равна S (рис. 174). Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ABN} = \frac{1}{2}S$. По свойству медиан $BM : MN = 2 : 1$. Поскольку треугольники ABM и AMN имеют общую высоту, опущенную из вершины A, их площади относятся как $BM : MN$, т. е. $2 : 1$. Тогда $S_{AMN} = \frac{1}{3}S_{ABN} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S$. Аналогично, $S_{NMC} = S_{MPC} = S_{BMP} = S_{KMB} = S_{AMK} = \frac{1}{6}S$.

Следствие.

Площадь треугольника, ограниченного двумя медианами и стороной, составляет $\frac{1}{3}$ *площади* S *данного треугольника, т. е.* $S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMC} = \frac{1}{3}S$.

Задача 2. *Найти высоту* h_c *прямоугольного треугольника с катетами* a *и* b *и гипотенузой* c.

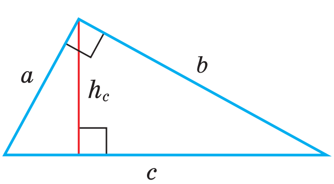


Рис. 175

Решение. С одной стороны, площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ch_c$ (рис. 175). С другой стороны, $S = \frac{1}{2}ab$. Отсюда $ch_c = ab$, $h_c = \frac{ab}{c}$.

Пример. Если катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см, а гипотенуза 10 см, то высота, проведенная к гипотенузе, $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{6\cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см).

$\boxed{h_c = \dfrac{ab}{c}}$ *Формула высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.*

Задача 3*. *Площадь треугольника ABC равна* 120 *см*^{2}, *BM — медиана треугольника, точка O — середина медианы. Прямая AO пересекает сторону BC в точке K. Найти площадь четырехугольника MOKC* (рис. 176).

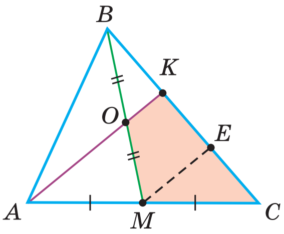


Рис. 176

Решение. Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{AOM} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Проведем $ME \parallel AK$. По теореме Фалеса, т. к. $BO = OM$, то $BK = KE$, т. к. $AM = MC$, то $KE = EC$. Отсюда $BK = KE = EC$, $BK : KC = 1 : 2$. У $\triangle AKB$ и $\triangle AKC$ общая высота, проведенная из вершины A. Поэтому $\frac{S_{AKB}}{S_{AKC}} = \frac{BK}{KC} = \frac{1}{2}$. Тогда $S_{AKC} = \frac{2}{3}S_{ABC}$, $S_{MOKC} = S_{AKC} - S_{AOM} = \frac{2}{3}S_{ABC} - \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{5}{12}\cdot 120 = 50$ (см^2).

Ответ: 50 см^2.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

185. Найдите площади треугольников, изображенных на рисунках 177, *а*)—*в*).

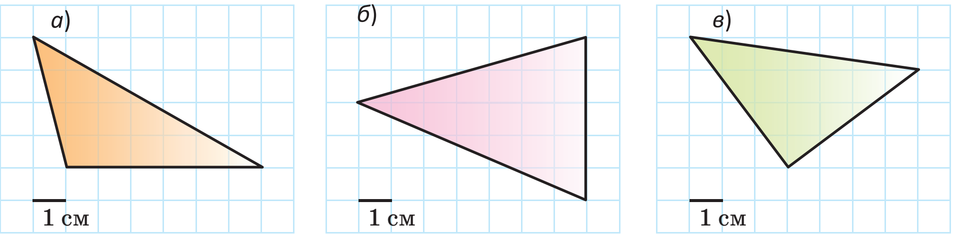


Рис. 177

186. Площадь треугольника MNK равна 80 см^2. Высота MH равна 10 см. Найдите длину стороны NK.

187. Найдите площадь $\triangle ABC$, если:
а) его высота BH делит основание AC на отрезки $AH = 3{,}4$ см, $HC = 6{,}6$ см, $\angle A = 45°$.
б) $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 30°$.

188. а) В треугольнике ABC высота AK равна 9 см, высота CH равна 6 см, $BC = 8$ см. Найдите длину стороны AB.
б) Две стороны треугольника равны 4,5 м и 6 м. Высота, проведенная к меньшей из них, равна 4 м. Найдите высоту, проведенную к большей из этих сторон.

189. Докажите, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади данного.

190. Дан треугольник ABC (рис. 178), MK — средняя линия треугольника. Площадь четырехугольника $AMKC$ равна 48 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

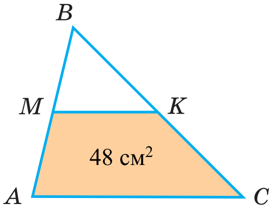


Рис. 178

191. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетами, равными 8 см и 15 см.
б) В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, AC на 7 см меньше BC, $S_{ABC} = 30$ см^2. Найдите BC.

192. В параллелограмме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, K — середина стороны AD. Найдите отношение площади четырехугольника $KOCD$ к площади параллелограмма.

193. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 24 см. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите периметр треугольника.

194. Медианы BN и CK треугольника ABC пересекаются в точке M, $S_{ABC} = 60$ см^2. Найдите: а) S_{AKC}; б) S_{KBM}; в) S_{BMC}; г) S_{AKMN}. Докажите, что при любом значении S_{ABC} верно, что $S_{BMC} = S_{AKMN}$.

195. Найдите площадь треугольника (в квадратных единицах), вершины которого имеют координаты (2; 3), (4; 7), (10; 4).

196. а) Площадь ромба равна 450 см^2. Одна из диагоналей ромба равна 60 см. Найдите другую диагональ.
б) Диагонали ромба с площадью 360 см^2 относятся как 4 : 5. Найдите меньшую диагональ ромба.

197. Докажите, что площадь квадрата можно найти по формуле $S = \frac{d^2}{2}$, где d — диагональ квадрата.

198. В окружности, радиус которой 8 см, проведены два взаимно перпендикулярных диаметра. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого совпадают с концами диаметров.

199. Докажите, что если диагонали d_1 и d_2 выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то его площадь $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.

200. Периметр ромба равен 32 см, произведение длин диагоналей ромба равно 96 см^2. Найдите высоту ромба.

201*. Высоты треугольника относятся как $h_a : h_b : h_c = 2 : 3 : 4$, периметр равен 260 см. Найдите стороны a, b, c треугольника.

202*. Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 179). Площадь параллелограмма равна 120 см^2. Найдите площадь четырехугольника $MECD$.

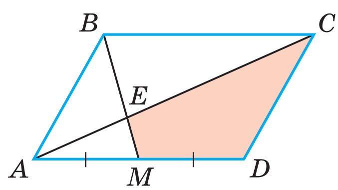


Рис. 179

203*. На рисунке 180 треугольник ABC равносторонний, площади красного четырехугольника и синего треугольника равны. Докажите, что $BL = CK$. Найдите величину угла KEC.

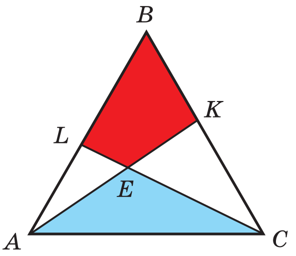


Рис. 180

204*. Найдите геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание a и равные площади S, если эти вершины противоположны данному основанию.

Гимнастика ума

Как в треугольнике ABC следует провести ломаную $BKMNP$, чтобы он разбился на пять равных по площади треугольников (рис. 181)?

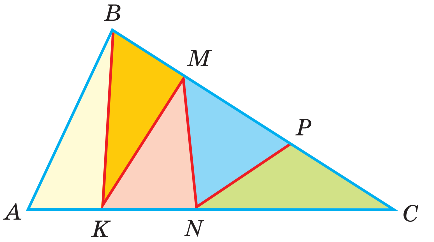


Рис. 181

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Формулы площади: квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, ромба.
2. Формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
3. Свойство площадей треугольников с общей высотой.
4. Свойство медианы относительно площади треугольника.

Умеем

1. Выводить формулы площади: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба.
2. Выводить формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
3. Доказывать, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Реальная геометрия

Необходимо покрасить дом, изображенный на рисунке. Фундамент дома представляет собой квадрат со стороной 6 м. В доме имеется: 5 малых окон с размерами 1 м 50 см × 80 см, два больших окна с размерами 2 м 50 см × 80 см и дверь с размерами 2 м × 0,8 м.

По размерам, данным на чертеже (рис. 182), определите:

а) общую площадь той части стен дома, которые нужно покрасить;

б) сколько килограммов краски потребуется, чтобы покрасить стены дома в 2 слоя, если на покраску 1 м^2 в один слой уходит 250 г краски;

в) какое оптимальное число пластиковых ведер краски необходимо купить, если в строительном магазине имеется нужная краска для фасадов по 5 л и 11 л.

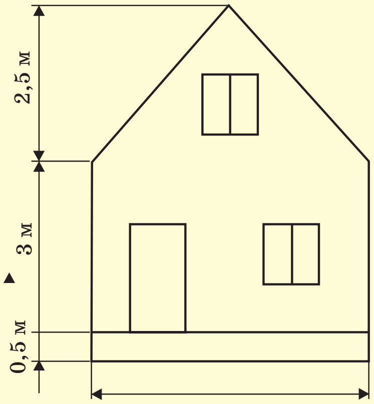


Рис. 182

§ 16. Теорема Пифагора

Теорема Пифагора говорит о связи длин катетов с длиной гипотенузы прямоугольного треугольника. Так, если $\triangle ABC$ прямоугольный и $\angle C = 90°$ (рис. 183), то $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Она позволяет, зная катеты, найти гипотенузу или, зная один из катетов и гипотенузу, найти другой катет. Например, если $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, то $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ (см^2), откуда $AB = 5$ см.

Катеты, лежащие против углов A и B, будем соответственно обозначать a и b, гипотенузу — c.

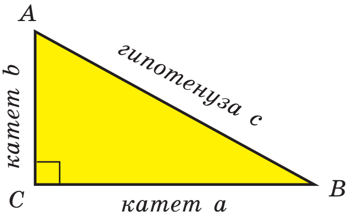


Рис. 183

Теорема Пифагора. **В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т. е. $a^2 + b^2 = c^2$.**

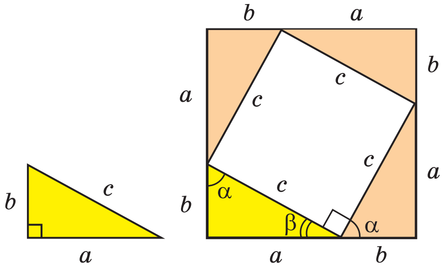


Рис. 184

Доказательство. Достроим прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c до квадрата со стороной $a + b$ (рис. 184). Разобьем этот квадрат, как показано на рисунке, на четыре прямоугольных треугольника и четырехугольник. Прямоугольные треугольники равны по двум катетам. Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\alpha + \beta = 90°$. Тогда у внутреннего четырехугольника все стороны равны c и все углы прямые. Поэтому это квадрат, и его площадь равна c^2.

Площадь большого квадрата, с одной стороны, равна квадрату его стороны, т. е. $S = (a + b)^2$. С другой стороны, она равна сумме площадей четырех равных прямоугольных треугольников и площади внутреннего квадрата: $S = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$. Тогда $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$. Теорема доказана.

Следствие.

Из равенства $a^2 + b^2 = c^2$ следует $a^2 = c^2 - b^2$. С учетом $a > 0$ получаем $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Аналогично, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Говорят, что катет равен квадратному корню из разности квадрата гипотенузы и квадрата другого катета.

Пример. Если a и b — катеты, c — гипотенуза и $a = 8$ см, $c = 10$ см, то $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Если дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a и гипотенузой c, то по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + a^2$, $c^2 = 2a^2$, откуда $c = a\sqrt{2}$ или $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Полезно запомнить!

Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a равна $a\sqrt{2}$. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой c равен $\frac{c}{\sqrt{2}}$ (рис. 185). Диагональ d квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$, сторона квадрата с диагональю d равна $\frac{d}{\sqrt{2}}$ (рис. 186).

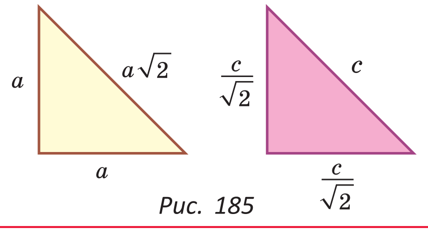


Рис. 185

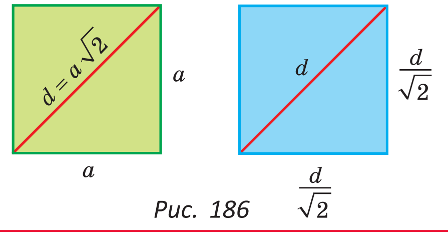


Рис. 186

Задача. *Найти высоту и площадь равностороннего треугольника ABC со стороной a* (рис. 187).

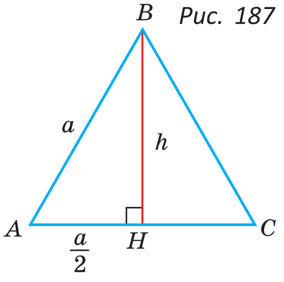


Рис. 187

Решение. Пусть $BH = h$ — высота треугольника. Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является и медианой, то $AH = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора находим:

$h = BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда площадь равностороннего треугольника $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Таким образом, для равностороннего треугольника со стороной a и высотой h справедливы следующие формулы:

$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ — *высота равностороннего треугольника;*

$\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$ — *площадь равностороннего треугольника.*

Для теоремы Пифагора существует и обратная теорема, которая позволяет по трем данным сторонам треугольника определить, является ли он прямоугольным.

Теорема Пифагора обратная.
Если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то это треугольник прямоугольный, т. е. если для сторон треугольника ABC справедливо равенство $a^2 + b^2 = c^2$, то $\angle C = 90°$.

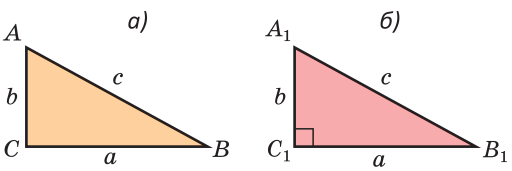
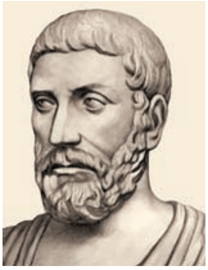


Рис. 188

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC (рис. 188, *а*) со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $a^2 + b^2 = c^2$. Нужно доказать, что $\angle C = 90°$. Рассмотрим заведомо прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с катетами $B_1C_1 = a$ и $A_1C_1 = b$ (рис. 188, *б*). По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = a^2 + b^2$. Но по условию $a^2 + b^2 = c^2$. Откуда $A_1B_1 = c$. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам и, следовательно, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Теорема доказана.

Пифагор Само́сский (IV—V в. до н. э.) — известный древнегреческий философ и математик. Он создал пифагорейскую научную школу, куда входили многие математики того времени.



Задания к § 16

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике катеты относятся как* 3 : 4, *гипотенуза равна* 30 *см. Найти площадь треугольника.*

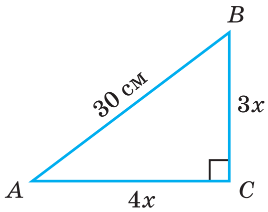


Рис. 189

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 189) гипотенуза $AB = 30$ см, $BC : AC = 3 : 4$. Обозначим $BC = 3x$ см, $AC = 4x$ см. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, откуда $(4x)^2 + (3x)^2 = 30^2$, $16x^2 + 9x^2 = 900$, $25x^2 = 900$, $x^2 = 36$, $x = 6$. Тогда $BC = 3 \cdot 6 = 18$ (см), $AC = 4 \cdot 6 = 24$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216$ (см^2).

Ответ: 216 см^2.

Задача 2. *Стороны треугольника равны 7 см, 24 см и 25 см. Найти: а) медиану треугольника, проведенную к большей стороне; б) высоту треугольника, проведенную из вершины большего угла треугольника.*

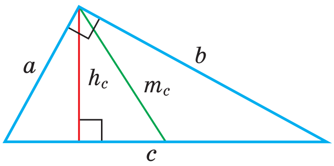


Рис. 190

Решение. Так как $7^2 + 24^2 = 25^2$ $(49 + 576 = 625)$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, данный треугольник прямоугольный с катетами $a = 7$ см, $b = 24$ см и гипотенузой $c = 25$ см (рис. 190).

а) Гипотенуза — большая сторона треугольника. А медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, т. е. $m_c = \frac{c}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$ (см).

б) Высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, найдем по известной формуле: $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72$ (см).

Ответ: а) 12,5 см; б) 6,72 см.

Замечание. Прямоугольный треугольник со сторонами, равными 3, 4 и 5 единиц, был известен еще древним египтянам. Он называется **египетским треугольником**. Сделанный из веревки треугольник со сторонами, равными 3, 4 и 5, натягивали закрепленными в вершинах колышками. Так египтяне строили на местности прямой угол.

Тройки целых чисел, которые являются сторонами прямоугольного треугольника, называются *Пифагоровыми тройками*. Полезно запомнить следующие тройки: а) 3, 4, 5; б) 5, 12, 13; в) 7, 24, 25; г) 8, 15, 17; д) 20, 21, 29.

Умножая каждую их этих троек на натуральное число, можно получить бесконечно много Пифагоровых троек. Например, для первой тройки можно получить следующие: (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) и т. д.

Задача 3. *Найти площадь равнобедренного треугольника со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.*

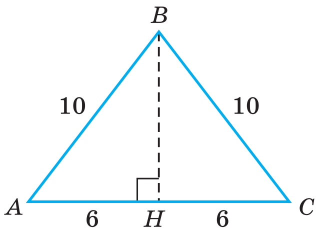


Рис. 191

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см (рис. 191). Проведем высоту BH. Так как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой, то $AH = HC = 6$ см. По теореме Пифагора для $\triangle ABH$: $AH^2 + BH^2 = AB^2$, $6^2 + BH^2 = 10^2$, $BH = \sqrt{64} = 8$ (см).

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см^2).

О т в е т: 48 см^2.

Задача 4*. *Найти высоту треугольника со сторонами, равными 7 см, 15 см, 20 см, которая проведена к большей стороне.*

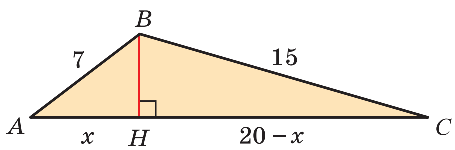


Рис. 192

Р е ш е н и е. В $\triangle ABC$ $AB = 7$ см, $BC = 15$ см, $AC = 20$ см (рис. 192). Опустим высоту BH. Обозначим $AH = x$ см, $HC = (20 - x)$ см. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ABH и CBH получим: $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 7^2 - x^2$, $BH^2 = BC^2 - HC^2 = 15^2 - (20 - x)^2$. Отсюда $7^2 - x^2 = 15^2 - (20 - x)^2$, $(20 - x)^2 - x^2 = 15^2 - 7^2$. Решив уравнение, найдем $x = 5{,}6$. Итак, $AH = 5{,}6$ см, $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - 5{,}6^2} = 4{,}2$ (см).

О т в е т: 4,2 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

205. Зная катеты a и b прямоугольного треугольника, найдите гипотенузу c:

а) $a = 9$ см, $b = 12$ см;

б) $a = 1$ см, $b = 2$ см;

в) $a = \sqrt{12}$ дм, $b = \sqrt{13}$ дм;

г) $a = (\sqrt{7} - 1)$ м, $b = (\sqrt{7} + 1)$ м.

206. У прямоугольного треугольника катеты a и b, гипотенуза c. Найдите катет b, если:

а) $a = 6$ см, $c = 10$ см;

б) $a = 24$ м, $c = 25$ м;

в) $a = 3$ см, $c = 6$ см;

г) $a = 3\sqrt{2}$ дм, $c = 2\sqrt{7}$ дм.

207. Сторона прямоугольника равна 12 см, а диагональ 13 см (рис. 193). Найдите площадь прямоугольника.

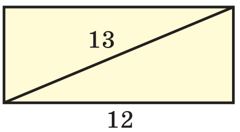


Рис. 193

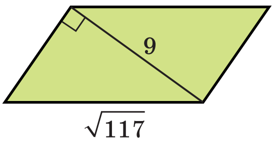


Рис. 194

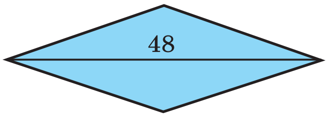


Рис. 195

208. Диагональ параллелограмма равна 9 см и перпендикулярна стороне параллелограмма. Другая сторона параллелограмма равна $\sqrt{117}$ см (рис. 194). Найдите площадь параллелограмма.

209. Найдите площадь ромба, если:

а) его периметр равен 100 см, а одна из диагоналей — 48 см (рис. 195);
б) его сторона 13 см, а одна из диагоналей — 10 см.

210. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты (рис. 196). Площадь квадрата, построенного на одном катете, равна 64 см^2, площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна 289 см^2. Найдите площадь квадрата, построенного на другом катете.

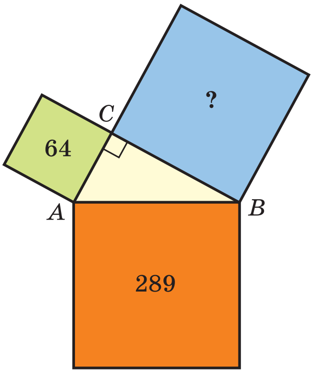


Рис. 196

211. Определите, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны:

а) 20 мм, 21 мм, 29 мм;

б) 5 м, 6 м, 7 м;

в) $\sqrt{2}$ см, $\sqrt{3}$ см, $\sqrt{5}$ см.

212. Найдите площадь треугольника со сторонами:

а) 6 см, 8 см, 10 см;
б) 1,6 дм, 3 дм, 3,4 дм;
в) $\sqrt{2}$ м, $\sqrt{8}$ м, $\sqrt{10}$ м.

213. Дан равносторонний треугольник. Найдите:

а) высоту и площадь треугольника, если его сторона равна 4 см;
б) периметр и высоту треугольника, если его площадь $16\sqrt{3}$ см^2.

214. Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого:

а) основание 100 м, боковая сторона 130 м;
б) высота 24 дм, боковая сторона 25 дм;
в) основание a, боковая сторона b.

215. а) Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 21 м, гипотенуза — 15 м. Найдите катеты.

б) Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см больше другого катета и 2 см меньше гипотенузы. Найдите площадь треугольника.

216. $ABCD$ — трапеция (рис. 197). Найдите:

а) высоту трапеции; б) диагональ AC.

217. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 198), $KD = 12$. Найдите:

а) площадь параллелограмма;
б) высоту, проведенную к стороне CD.

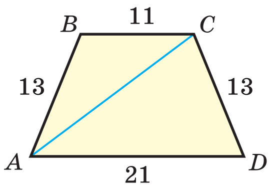


Рис. 197

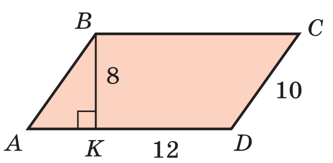


Рис. 198

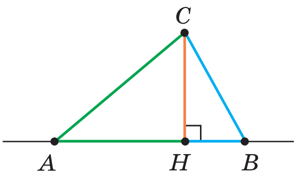


Рис. 199

218. При помощи теоремы Пифагора, используя рисунок 199, докажите, что если из одной точки к прямой проведены две наклонные CA и CB, то равным наклонным соответствуют равные проекции AH и HB, большей наклонной соответствует большая проекция.

219. а) Найдите площадь квадрата с диагональю, равной 4 см.
б) Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна 50 см^2.

220. Дан треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Найдите меньшую высоту этого треугольника.

221. Медианы треугольника ABC, проведенные к сторонам AB и BC, взаимно перпендикулярны и равны 9 см и 12 см. Найдите длину третьей медианы.

222. Дан отрезок a. Используя циркуль и линейку, постройте отрезок x, равный $a\sqrt{2}$.

223*. Найдите площадь треугольника ABC, у которого $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, медиана $BM = 5$ см.

224*. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3 см, 4 см и 5 см.

225*. По гипотенузе прямоугольного треугольника со сторонами 12 см, 16 см, 20 см перемещается точка. Найдите, при каком положении точки сумма квадратов расстояний от этой точки до катетов будет наименьшей. Определите расстояние от этого положения точки до вершины прямого угла.

226*. Найдите длину отрезка AB, изображенного на координатной плоскости (рис. 200), где $A(2;\ 4)$, $B(6;\ 7)$.

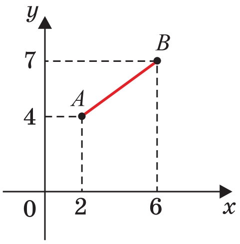


Рис. 200

227*. Даны отрезки m и n, где $m > n$. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок x, если:

а) $x = \sqrt{m^2 + n^2}$;   б) $x = \sqrt{m^2 - n^2}$.

Геометрия 3D

На рисунке 201 изображена прямая треугольная призма, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными по 4 см, и развертка этой призмы. Большая по площади боковая грань призмы является квадратом.

Изготовьте из плотной бумаги указанную развертку и сложите из нее данную призму. Скрепите соединяемые края полосками бумаги.

Найдите площадь боковой поверхности призмы (она равна сумме площадей боковых граней). Найдите площадь основания призмы. Чему равна площадь всей поверхности призмы (*полная поверхность призмы*)?

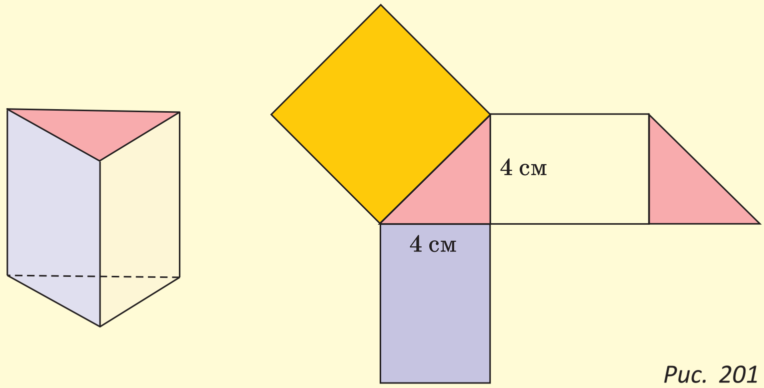


Рис. 201

Реальная геометрия

Определите примерную длину лестницы, которая идет к окну второго этажа дома, изображенного на рисунке, если расстояние от этого окна до земли 6 м, а расстояние от фундамента дома до основания лестницы равно 3 м.

Подсчитайте, сколько примерно погонных метров бруска пойдет на изготовление такой лестницы, если у нее 18 ступенек и ширина лестницы равна 50 см.

Моделирование

Большой теннис является в Беларуси популярным видом спорта. Наши спортсмены Виктория Азаренко и Максим Мирный являются теннисистами мирового уровня, олимпийскими чемпионами.

Задача. Во время подачи теннисный мяч может достигать скорости 180 км/ч. По размерам, указанным на рисунке 202, определите в секундах время, за которое мяч из точки А попадет в точку Б, двигаясь по прямой с указанной скоростью. При расчетах используйте калькулятор.

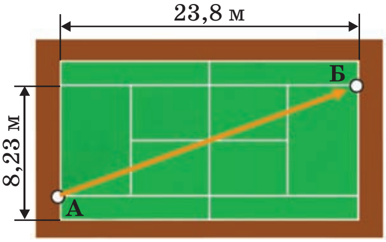


Рис. 202

При помощи **Интернета** выясните: 1) на каком острове жил Пифагор; 2) какое отношение Пифагор имел к музыке; 3) сколько доказательств теоремы Пифагора известно на сегодняшний день.

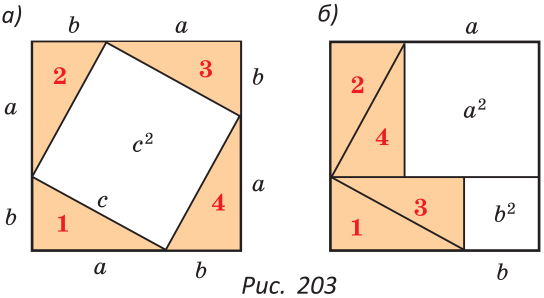


Рис. 203

Приведем еще одно доказательство теоремы Пифагора.

На рисунке 203, *а*) незанятая закрашенными прямоугольными треугольниками часть большого квадрата по площади равна c^2. Совместив треугольники 3 и 1, 4 и 2 гипотенузами (рис. 203, *б*), получим, что теперь незанятая ими площадь равна $a^2 + b^2$. Отсюда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$.

§ 17. Площадь трапеции

Теорема. **Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, т. е.** $S_{тр} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

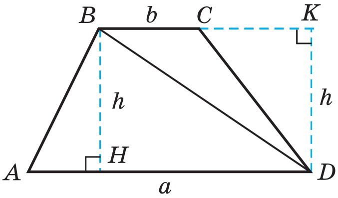


Рис. 204

Доказательство. Диагональ BD разбивает трапецию $ABCD$ на два треугольника: $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ (рис. 204). Высоты BH и DK этих треугольников равны высоте h трапеции. Тогда $S_{тр} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Теорема доказана.

Следствие.

Так как средняя линия трапеции $m = \frac{a+b}{2}$, *то площадь трапеции может быть найдена по формуле* $S_{тр} = mh$.

Задача. *Доказать, что площади треугольников, ограниченных двумя диагоналями и боковой стороной трапеции, равны.*

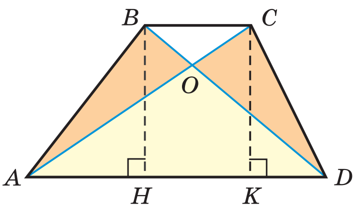


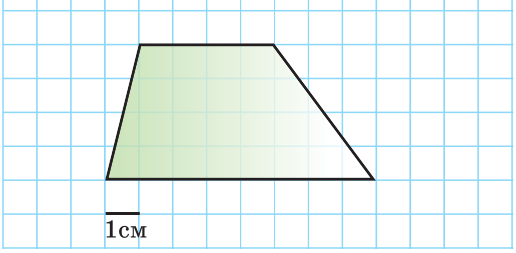
Рис. 205

Доказательство. Нужно доказать, что $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ равновелики (рис. 205). Заметим, что $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ равновелики, так как у них основание AD — общее, а высоты BH и CK равны как расстояния между параллельными прямыми AD и BC. Отняв от площади каждого из этих треугольников площадь $\triangle AOD$, получим, что $S_{AOB} = S_{COD}$. Что и требовалось доказать.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

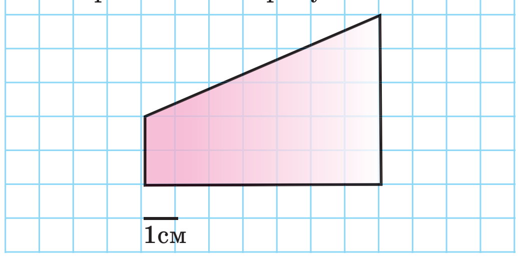
Тест 1

Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



Тест 2

Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



Задания к § 17

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *Дана равнобедренная трапеция* $ABCD$ (рис. 206), $BH = 7$ *см — высота трапеции,* $HD = 10$ *см. Найти площадь трапеции.*

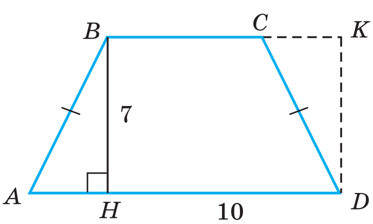


Рис. 206

Решение. *Способ* 1. Перенесем прямоугольный треугольник ABH на место треугольника CKD (см. рис. 206). У четырехугольника $HBKD$ все углы прямые, поэтому это прямоугольник. Площадь прямоугольника $HBKD$ равна площади трапеции $ABCD$, так как прямоугольник и трапеция состоят из равных фигур. Тогда $S_{ABCD} = S_{HBKD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70$ (см^2).

Замечание. Подумайте, откуда следует, что $\angle KCD + \angle DCB = 180°$.

Способ 2. Согласно ключевой задаче **2** § 10 для равнобедренной трапеции $HD = \frac{a+b}{2}$. То есть отрезок HD равен средней линии трапеции. Тогда $S_{ABCD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70$ (см^2).

Ответ: 70 см^2.

Задача 2. *В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $AD = 18$ см, $BC = 8$ см, $AB = 13$ см. Найти площадь трапеции.*

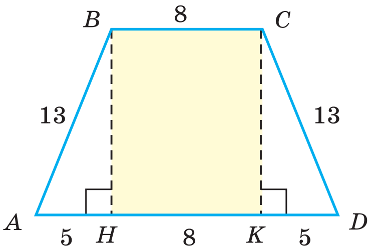


Рис. 207

Решение. *Способ* 1. Проведем высоты BH и CK (рис. 207). Треугольники ABH и DCK равны по катету ($BH = CK$) и гипотенузе ($AB = CD$). Откуда $AH = KD$. У четырехугольника $HBCK$ все углы прямые, поэтому это — прямоугольник. Тогда $HK = BC = 8$ см, $AH = \frac{1}{2}(AD - HK) = \frac{1}{2}(18 - 8) = 5$ (см). Из треугольника ABH по теореме Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ (см). Площадь трапеции $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{18+8}{2} \cdot 12 = 156$ (см^2).

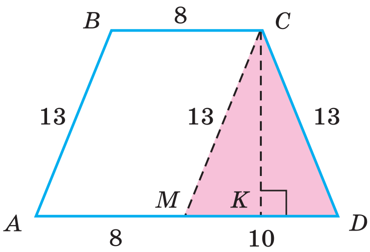


Рис. 208

Способ 2. Проведем $CM \parallel AB$ (рис. 208). Так как $BC \parallel AM$, то $ABCM$ — параллелограмм. У параллелограмма противоположные стороны равны, откуда $AM = BC = 8$ см, $CM = AB = 13$ см. Тогда $MD = AD - AM = 10$ см. Треугольник MCD — равнобедренный. Его высота CK будет и высотой трапеции. Так как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и медианой, то $KD = MK = 5$ см. Из прямоугольного треугольника CKD по теореме Пифагора $CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Получаем $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = \frac{18+8}{2} \cdot 12 = 156$ (см^2).

Ответ: 156 см^2.

Задача 3. *Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$* (рис. 209, *а*) *перпендикулярны и равны 8 см и 10 см. Найти площадь трапеции.*

Решение. *Способ* 1. Проведем $CK \parallel BD$ (рис. 209, *б*). Так как $BC \parallel DK$, то $DBCK$ — параллелограмм. Поэтому $DK = BC$, $CK = BD = 8$ см. Кроме того, $\angle ACK = \angle AOD = 90°$ как соответственные углы при параллельных прямых и секущей. Заметим, что площадь трапеции $ABCD$ равна площади

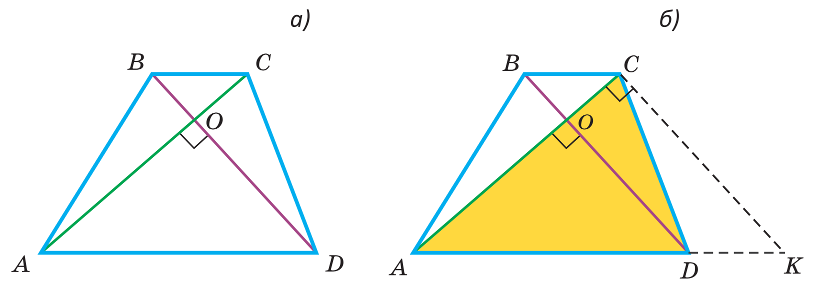


Рис. 209

треугольника ACK. Действительно, треугольник ACD для этих фигур является общим, а треугольники ABC и CDK равновелики, так как у них равны основания BC и DK и высоты, проведенные к ним.

$S_{ABCD} = S_{ACK} = \frac{AC \cdot CK}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40$ (см^2).

Способ 2. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40$ (см^2). То есть площадь выпуклого четырехугольника, у которого диагонали перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей. Ответ: 40 см^2.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

228. а) Найдите площадь трапеции с основаниями 14 см и 9 см и высотой 6 см.

б) Найдите высоту трапеции с площадью 96 см^2 и основаниями, равными 5 см и 11 см.

в) Меньшее основание трапеции равно 6 см, высота 8 см, площадь 80 см^2. Найдите большее основание трапеции.

229. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой:

а) основания 32 см и 18 см, меньшая боковая сторона равна 14 см;
б) основания 2 см и 6 см, большая боковая сторона 5 см.

230. Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной, равной 17 см, и основаниями 10 см и 26 см.

231. Высота трапеции h, средняя линия m, площадь S.

а) $h = 12$ см, $S = 72$ см^2. Найдите m.
б) $m = 9$ см, $S = 36$ см^2. Найдите h.

232. У трапеции $ABCD$ (рис. 210) $\angle A = 90°$, $AD = 14,5$ см, $BC = 7,5$ см и $\angle C = 135°$. Найдите площадь трапеции.

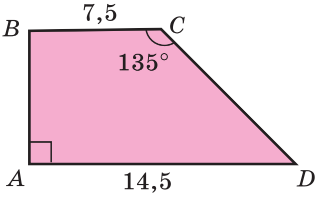


Рис. 210

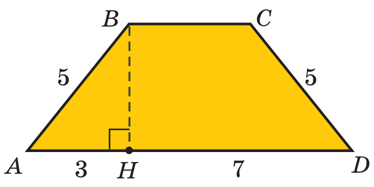


Рис. 211

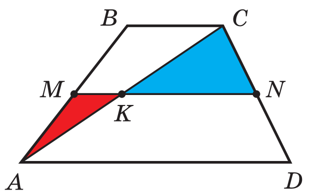


Рис. 212

233. Боковая сторона равнобедренной трапеции $ABCD$ равна 5 см (рис. 211), ее высота BH делит основание AD на отрезки $AH = 3$ см, $HD = 7$ см. Найдите площадь трапеции.

234. Дана трапеция $ABCD$, MN — ее средняя линия (рис. 212). Сумма площадей треугольников AMK и CKN равна 32 см^2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

235. Найдите площадь прямоугольной трапеции с углом 60°, если:

а) основания трапеции равны 4 см и 10 см;

б) большее основание равно 8 см, высота трапеции равна $4\sqrt{3}$ см.

236. Основания трапеции a и b, боковые стороны c и d. Найдите площадь трапеции, если:

а) $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см, $d = 5$ см;
б) $a = 8$ см, $b = 3$ см, $c = 3$ см, $d = 4$ см.

237. Найдите площадь трапеции с основаниями a и b и диагоналями d_1 и d_2, если:

а) $d_1 = d_2 = 15$ см, $a = 8$ см, $b = 12$ см;
б) $d_1 = 12$ см, $d_2 = 5$ см, $a = 9$ см, $b = 4$ см.

238. Вершины равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD лежат на окружности, AD — диаметр (рис. 213). Найдите высоту и площадь трапеции, если $BC = 12$ см и $AD = 20$ см.

239. Найдите площадь трапеции, изображенной на координатной плоскости (рис. 214).

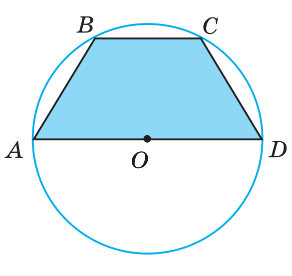


Рис. 213

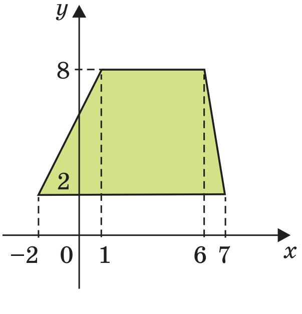


Рис. 214

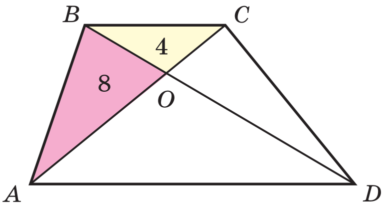


Рис. 215

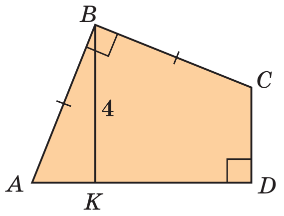


Рис. 216

240*. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, $S_{BOC} = 4$ см^2, $S_{AOB} = 8$ см^2 (рис. 215). Найдите площадь трапеции.

241*. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 4 см, угол при основании равен $60°$, диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите отношение площадей треугольников, на которые диагональ делит трапецию (в ответе укажите отношение меньшей площади к большей).

242*. В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB = 8$ см, расстояние от середины боковой стороны CD до прямой AB равно 10 см. Найдите площадь трапеции.

243*. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, углы B и D — прямые (рис. 216). Перпендикуляр BK к прямой AD равен 4 см. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему Пифагора.
2. Теорему, обратную теореме Пифагора.
3. Как найти диагональ квадрата по его стороне. Как найти сторону квадрата по его диагонали.
4. Формулу площади трапеции.

Умеем

1. Доказывать теорему Пифагора.
2. Выводить формулу площади трапеции.

§ 18*. Решения задач по теме «Площади многоугольников»

Задача 1. *Найти площадь параллелограмма ABCD, если площадь треугольника AMD, где $M \in BC$, равна 16 см^2.*

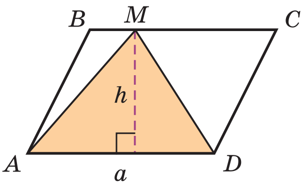


Рис. 217

Решение. Рассмотрим три принципиально различных способа решения этой задачи.

Способ 1. (Алгебраический — работа с формулами и уравнениями.)

В $\triangle AMD$ из вершины M к основанию $AD = a$ проведем высоту h, которая будет и высотой параллелограмма $ABCD$ (рис. 217). Тогда

$S_{AMD} = \frac{1}{2}ah$, $S_{ABCD} = ah = 2S_{AMD} = 2 \cdot 16 = 32$ (см^2).

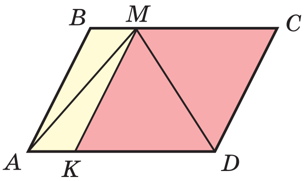


Рис. 218

Способ 2. (Геометрический — разбиение фигуры.)

Проведем $MK \parallel AB$ (рис. 218). Получим два параллелограмма: $ABMK$ и $KMCD$. Диагонали AM и MD делят эти параллелограммы на два соответственно равных треугольника: желтые треугольники равны и красные треугольники равны. Параллелограмм состоит из двух желтых и двух красных треугольников, а треугольник AMD — из одного желтого и одного красного треугольников. Следовательно, площадь треугольника AMD равна половине площади параллелограмма. Отсюда $S_{ABCD} = 2S_{AMD} = 32$ (см^2).

Способ 3. (Геометрический — движение точки.)

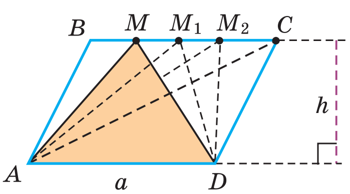


Рис. 219

При движении точки M по прямой BC (рис. 219) будем получать равновеликие треугольники: $S_{AMD} = S_{AM_1D} = S_{AM_2D} = ... = S_{ACD}$. У всех этих треугольников будет общее основание a и высоты, равные h (как расстояния между параллельными прямыми AD и BC). Тогда $S_{ACD} = S_{AMD} = 16$ (см^2). Так как диагональ AC делит параллелограмм на два равных треугольника, то $S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ACD} = 32$ (см^2).

Ответ: 32 см^2.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

244. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 220), если сумма площадей треугольников AOB и COD равна 24 см^2.

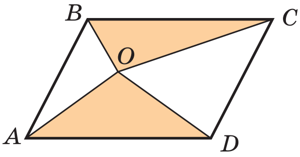


Рис. 220

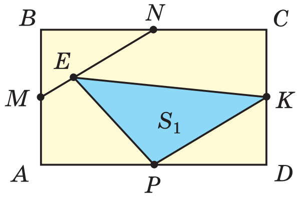


Рис. 221

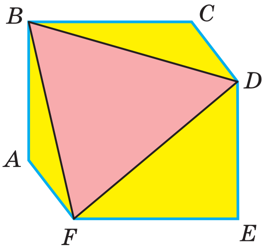


Рис. 222

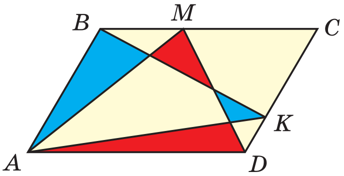


Рис. 223

245. Дан квадрат $ABCD$. Точки M и K — середины сторон AD и CD соответственно. Диагональ AC пересекает отрезки BM и BK в точках G и F соответственно. Найдите, какую часть площади квадрата составляет площадь $\triangle GBF$.

246. На рисунке 221 точки M, N, K и P — середины сторон прямоугольника. Найдите, сколько процентов составляет площадь S_1 треугольника PEK от площади S прямоугольника $ABCD$.

247*. У шестиугольника $ABCDEF$ противоположные стороны равны и параллельны (рис. 222): $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = FE$, $BC \parallel FE$, $AF = CD$, $AF \parallel CD$. Площадь шестиугольника равна 60 см^2. Найдите площадь треугольника BDF.

248*. Докажите, что если $ABCD$ параллелограмм (рис. 223), то сумма площадей красных частей равна сумме площадей синих частей.

249*. Докажите, что площадь четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного выпуклого четырехугольника, равна половине площади данного.

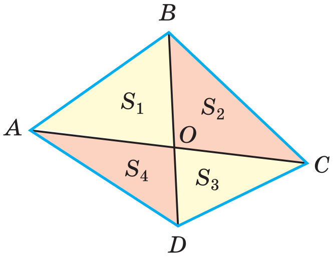


Рис. 224

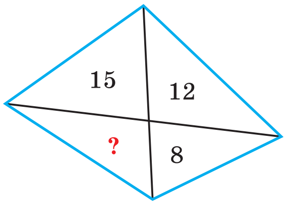


Рис. 225

Задача 2. *Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разделен диагоналями на четыре треугольника (рис. 224). Доказать, что произведения площадей противоположных треугольников равны, т. е. $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.*

Доказательство. Треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведенную из вершины B. Поэтому их площади относятся как основания, т. е. $\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$. Аналогично $\frac{S_{ADO}}{S_{CDO}} = \frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$. Отсюда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Что и требовалось доказать.

Пример. Если $S_1 = 15$ см^2, $S_2 = 12$ см^2, $S_3 = 8$ см^2 (рис. 225), то, используя формулу $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, получим $S_4 \cdot 12 = 15 \cdot 8$, откуда $S_4 = \frac{15 \cdot 8}{12} = 10$ (см^2).

Задача 3. *Выпуклый четырехугольник разделен средними линиями (отрезками, соединяющими середины его противоположных сторон) на четыре четырехугольника* (рис. 226, *а*). *Доказать, что суммы площадей противоположных четырехугольников равны, т. е.* $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.

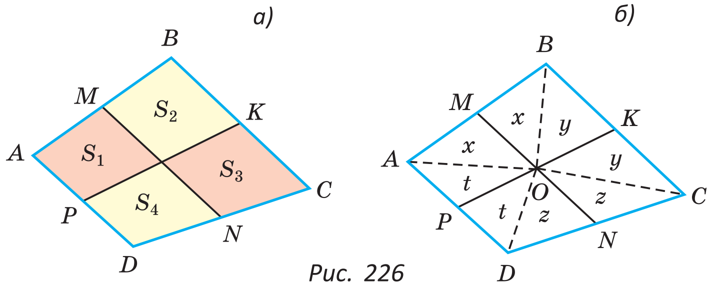


Рис. 226

Доказательство. Соединим точку O пересечения средних линий MN и PK с вершинами A, B, C, D (рис. 226, *б*). В треугольнике AOB отрезок OM — медиана. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Поэтому $S_{AOM} = S_{BOM} = x$. Аналогично, $S_{BOK} = S_{COK} = y$, $S_{CON} = S_{DON} = z$, $S_{POA} = S_{POD} = t$. Так как $S_1 + S_3 = x + t + y + z$, $S_2 + S_4 = x + y + z + t$, то $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$. Что и требовалось доказать.

Пример. Если $S_1 = 11$ см^2, $S_2 = 16$ см^2, $S_3 = 19$ см^2 (рис. 227), то, используя формулу $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, получим $11 + 19 = 16 + S_4$, откуда $S_4 = 11 + 19 - 16 = 14$ (см^2).

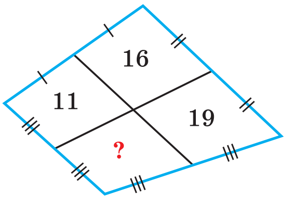


Рис. 227

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

250. Дана трапеция $ABCD$, у которой $BC \parallel AD$, O — точка пересечения диагоналей, $S_{AOD} = 27$ см^2, $S_{BOC} = 3$ см^2. Найдите S_{ABCD}.

251. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Известно, что $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Выразите площадь трапеции через S_1 и S_2.

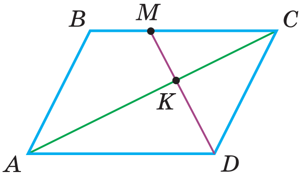


Рис. 228

252. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 228), $S_{KMC} = 9$ см^2, $S_{KCD} = 15$ см^2. Найдите площадь параллелограмма.

253*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены средние линии MN и PK (рис. 229). Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей желтых треугольников.

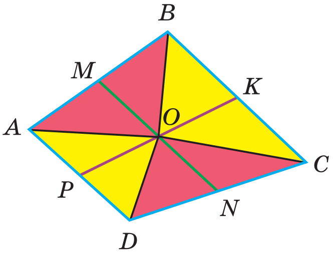


Рис. 229

Задача 4. *В трапеции ABCD точка M — середина боковой стороны CD. Доказать, что площадь треугольника ABM равна половине площади трапеции ABCD.*

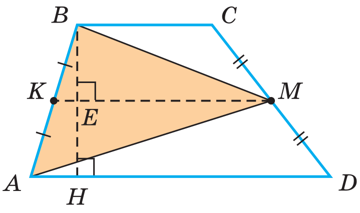


Рис. 230

Доказательство. *Способ* 1. Проведем в трапеции среднюю линию KM и высоту BH (рис. 230). Средняя линия трапеции параллельна основаниям, значит, $KM \parallel AD$. По свойству параллельных прямых $BE \perp KM$, откуда BE — высота $\triangle KBM$. По теореме Фалеса $BE = EH = \frac{1}{2}BH$. Отсюда $S_{KBM} = \frac{1}{2}KM \cdot BE$. Но KM — медиана треугольника ABM. А медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Поэтому $S_{ABM} = 2S_{KBM} = 2 \cdot \frac{1}{2}KM \cdot BE = KM \cdot \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

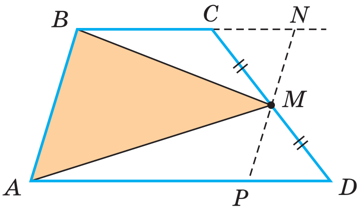


Рис. 231

Способ 2. Проведем через точку M прямую PN, параллельную AB (рис. 231). В силу равенства треугольников CMN и DMP (по 2-му признаку равенства треугольников). Площадь трапеции $ABCD$ равна площади параллелограмма $ABNP$, а площадь треугольника ABM равна половине площади параллелограмма $ABNP$ (см. задачу 1 данного параграфа).

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

254. $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$), M — середина стороны AB, N — середина стороны CD, $S_{MBC} = S_1$, $S_{AND} = S_2$, $S_{AMCN} = S_3$. Докажите, что $S_3 = S_1 + S_2$.

255. В трапеции $ABCD$ точка K принадлежит основанию AD, точка M — основанию BC, $S_{AMD} + S_{BKC} = 36$ см^2. Найдите площадь трапеции.

256. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ относятся как $2 : 5$, $S_{ABC} = 18$ см^2. Найдите площадь трапеции.

257*. В трапеции $ABCD$ точки K и M — середины боковых сторон AB и CD соответственно (рис. 232). Докажите, что площадь синего четырехугольника равна сумме площадей красных треугольников.

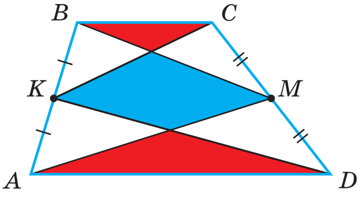


Рис. 232

Метод площадей

При решении некоторых геометрических задач, условие которых не связано с площадью непосредственно, используют свойства площадей. Такой метод решения называется *методом площадей*.

Задача 5. *Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон есть величина постоянная, т. е.* $x + y + z = const$*.

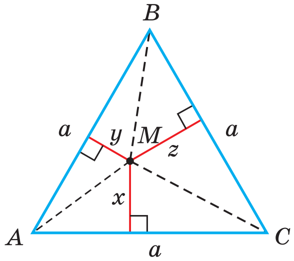


Рис. 233

Доказательство. Пусть $AB = BC = AC = a$; x, y, z — перпендикуляры, опущенные из точки M на стороны треугольника (рис. 233). Соединим точку M с вершинами треугольника отрезками. Треугольник разобьется на три треугольника: $\triangle AMC$, $\triangle AMB$, $\triangle BMC$, сумма площадей которых равна площади $\triangle ABC$. Площадь $\triangle ABC$, с одной стороны, равна $\frac{1}{2}ah$ (где h — высота), а с другой стороны, она равна $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az$. Тогда $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah$. Разделив обе части уравнения на $\frac{1}{2}a$, получим $x + y + z = h$. То есть сумма указанных расстояний равна длине высоты равностороннего треугольника, которая для данного треугольника есть величина постоянная. Что и требовалось доказать.

* Постоянная величина (константа) в общем виде обозначается буквой «c» или латинским словом «const». В частности, имя Константин с древнегреческого означает «постоянный».

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

258. Дан равнобедренный треугольник ABC. На его основании AC взята точка M. Докажите, что сумма длин перпендикуляров, опущенных из точки M на боковые стороны треугольника, есть величина постоянная для данного треугольника.

259. Докажите методом площадей свойство биссектрисы треугольника: «Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам».

260*. Треугольник ABC — равносторонний (рис. 234). Из точки F, взятой внутри треугольника ABC, на его стороны опущены перпендикуляры FM, FK, FN. Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей желтых треугольников.

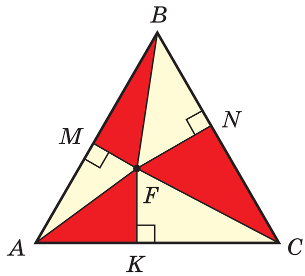
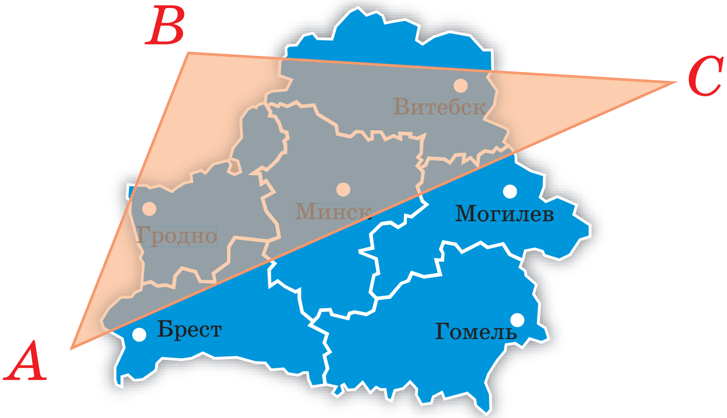


Рис. 234

Гимнастика ума

Существует ли треугольник, все три высоты которого меньше 1 см, а площадь больше площади Беларуси, которая составляет 207 595 км^2?



Моделирование

Супермаркет имеет вращающуюся стеклянную дверь, в основании которой находится круг. В центре этого круга расположен равносторонний треугольник со стороной 1,2 м. Из вершин треугольника выходят перемычки длиной 1,5 м вдоль радиусов, как показано на рисунке 235.

Задача. *Найдите примерный диаметр основания этой двери с точностью до* 0,01 м.

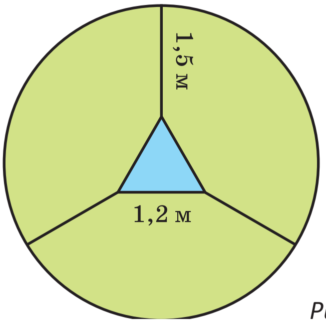


Рис. 235

Реальная геометрия

Трактору «Беларус» необходимо вспахать поле в форме четырехугольника с размерами, указанными на рисунке 236. Две стороны поля параллельны между собой и перпендикулярны третьей стороне.

Известно, что за 1 ч трактор может вспахать 1,2 гектара (га). При этом ему понадобится около 18 л дизельного топлива.

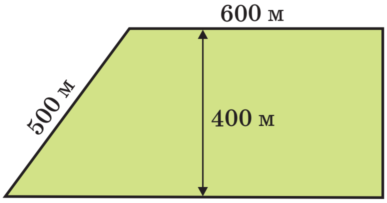


Рис. 236

Задача. *Определите:*
1) площадь данного поля в гектарах;
2) сколько времени потратит трактор на вспашку поля;
3) сколько топлива потребуется на это.

Интересно знать. Минский тракторный завод (МТЗ) был основан 29 мая 1946 г. Сегодня это один из крупнейших производителей сельскохозяйственной техники в мире. На протяжении многих лет завод сохраняет за собой долю в 10 % мирового рынка колесных тракторов и поставляет тракторы с маркой «Беларус» более чем в 60 стран. На заводе работает 17 000 человек. Каждую минуту в мире становится на 4 трактора «Беларус» больше.

Геометрия 3D

Площадь поверхности любого многогранника (иногда говорят *площадь полной поверхности*) равна сумме площадей всех его граней.

Задача. *На рисунке* 237 *изображена прямая четырехугольная призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями, равными* 12 *см и* 6 *см, и острым углом при основании, равным* 60°. *Большая по площади боковая грань призмы является квадратом. Найдите площадь поверхности этой призмы.*

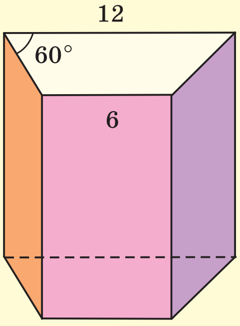


Рис. 237

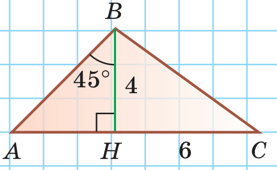
ЗАПОМИНАЕМ

1. Площадь квадрата: $S = a^2$, прямоугольника: $S = ab$, параллелограмма: $S = ah$, треугольника: $S = \frac{1}{2}ah$, трапеции: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.
2. Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{ab}{2}$, ромба: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.
3. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе: $h = \frac{ab}{2}$.
4. Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.
5. Площадь равностороннего треугольника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, высота: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
6. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
7. Площади треугольников с общей высотой относятся как соответствующие этой высоте основания.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

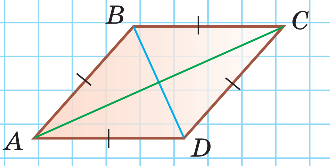
Тест 1

По данным на рисунке найдите площадь треугольника ABC.



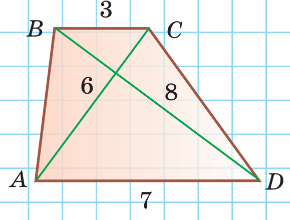
Тест 2

Площадь ромба $ABCD$ равна 120 см^2, диагональ $BD = 10$ см. Найдите периметр ромба.



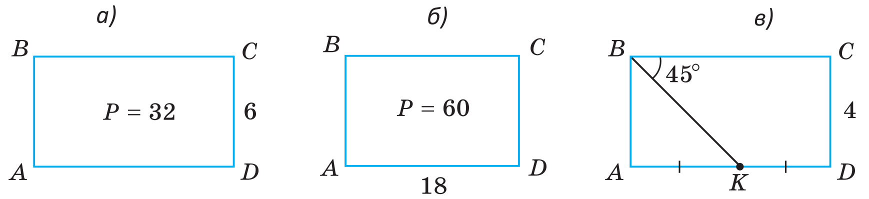
Тест 3

Диагонали трапеции равны 6 см и 8 см, основания 3 см и 7 см. Найдите S_{ABCD}.

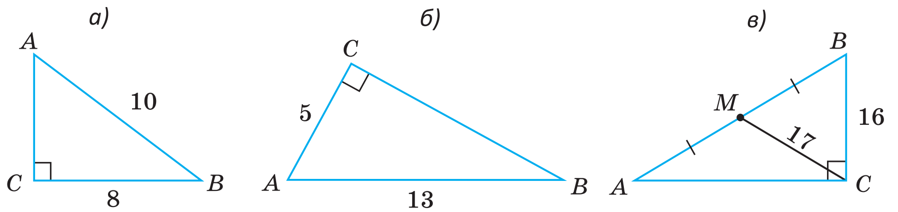


ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2

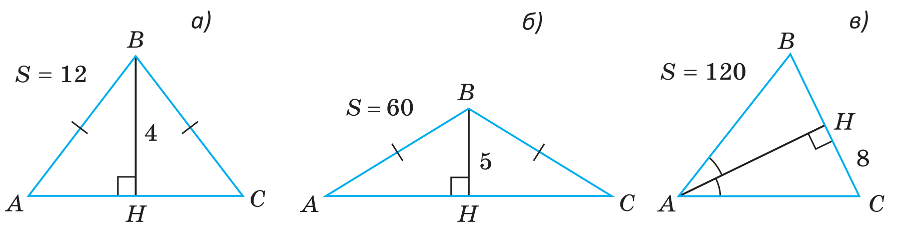
1. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.



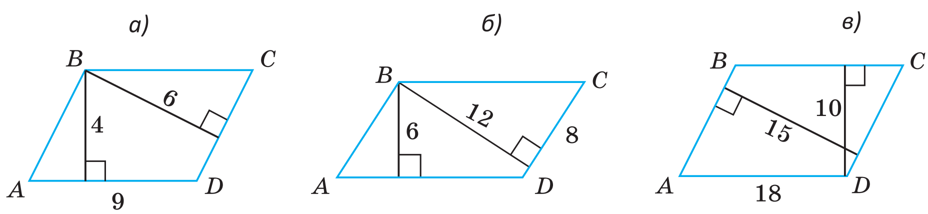
2. Найдите второй катет и площадь $\triangle ABC$.



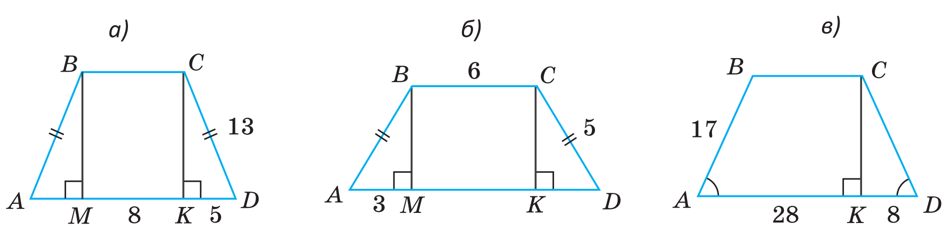
3. Найдите периметр $\triangle ABC$.



4. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.



5. Найдите площадь трапеции $ABCD$.



Повторение главы I и главы II

1. Назовите два различных типа многоугольников. В чем их различие?
2. Перечислите три вида (частных случая) параллелограмма:

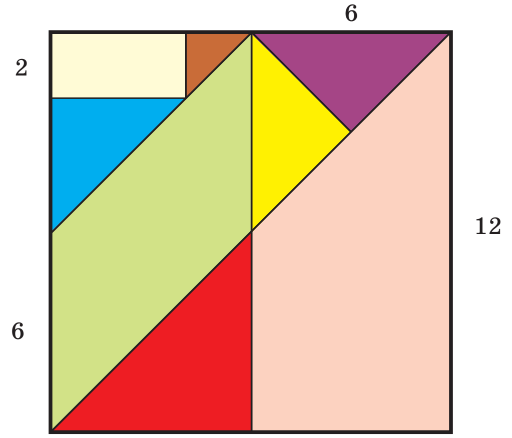
1) ...
2) ...
3) ...

Дайте определение каждому виду параллелограмма.

3. Назовите пять свойств параллелограмма, свойства прямоугольника, ромба и квадрата.
4. Как звучит теорема Фалеса и каким свойством обладает средняя линия треугольника?
5. Сколько видов трапеций вы знаете? Дайте определение каждому виду трапеции. Укажите свойство средней линии трапеции.
6. Запишите 8 формул площадей плоских фигур и теорему Пифагора.

Задание

На рисунке квадрат со стороной 12 разбит на отдельные фигуры отрезками, составляющими со сторонами квадрата 90° или 45°.



Найдите площадь каждой фигуры, используя размеры на рисунке. Проверьте, будет ли сумма найденных вами площадей равна площади всего квадрата.

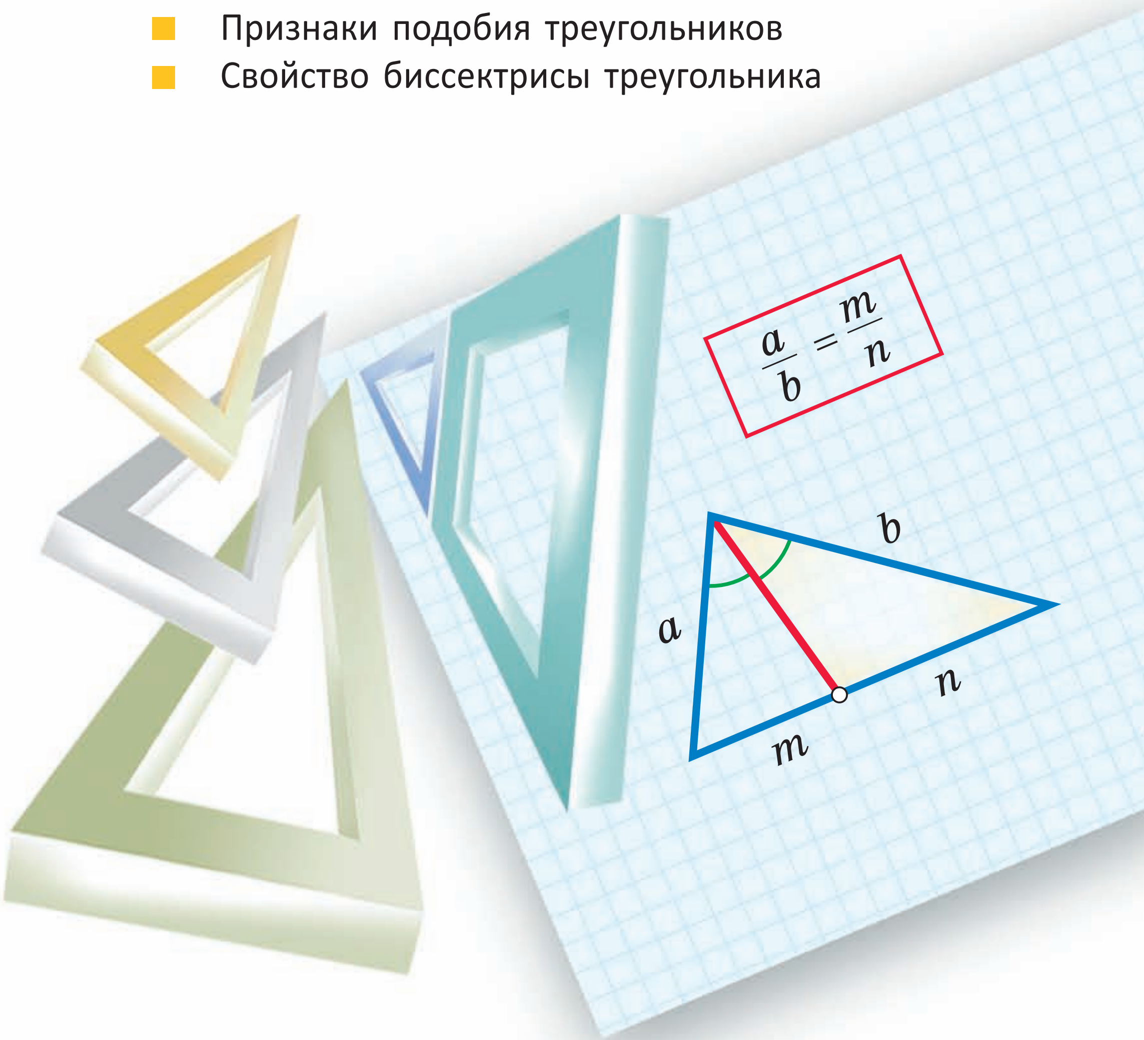
Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия. 8 кл.» можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, раздел «Математика», курс «Математика. 8 кл.».

Глава III

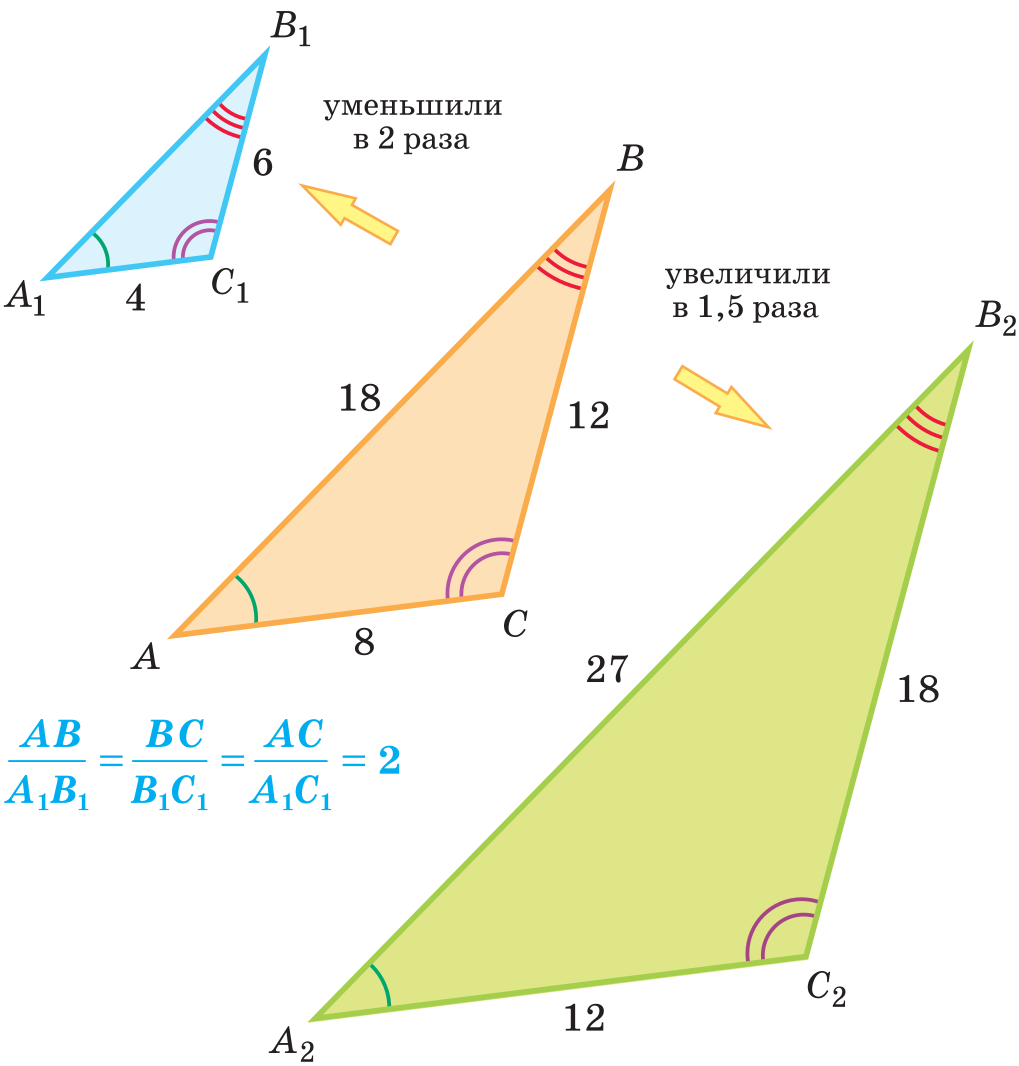
Подобие треугольников

В этой главе вы узнаете:

- Какие треугольники называются подобными
- Признаки подобия треугольников
- Свойство биссектрисы треугольника



Подобие



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$$

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{A_2C_2} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \quad k = 2$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2, \quad k = \frac{2}{3}$$

§ 19. Обобщенная теорема Фалеса

Под *отношением* отрезков a и b понимают отношение их длин, то есть число $\frac{a}{b}$. Пусть имеются две пары отрезков: a и b, c и d. Говорят, что отрезки a и b *пропорциональны* отрезкам c и d, если их отношения равны, то есть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Например, отрезки $AB = 5$ см и $CD = 10$ см пропорциональны отрезкам $A_1B_1 = 4$ см и $C_1D_1 = 8$ см, так как $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

Если для отрезков a, b, c и d справедливо равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то по свойству пропорции: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (рис. 238).

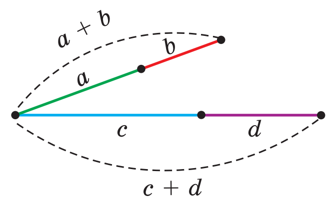


Рис. 238

Прибавив единицу к обеим частям последней пропорции, получим: $\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

Понятие пропорциональности рассматривается и для большего числа отрезков. Так, отрезки a, b и c пропорциональны отрезкам m, n и k, если $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}$, или по-другому — $a : b : c = m : n : k$.

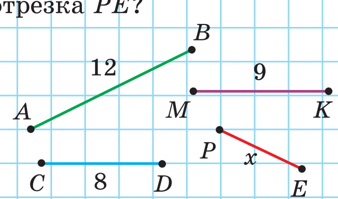
А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

Тест 1

Если $AC : CB = 5 : 3$, то чему равно отношение:
а) $BC : AC$; б) $AC : AB$?

Тест 2

Если $\frac{AB}{CD} = \frac{MK}{PE}$, то чему равна длина отрезка PE?



В Главе I нами доказана теорема Фалеса «*Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки*». Эту теорему можно обобщить на случай произвольных отрезков.

Теорема Фалеса обобщенная (теорема о пропорциональных отрезках).
Если на одной стороне угла отложить несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся отрезки, пропорциональные данным.

Можно использовать сокращенную формулировку теоремы: «*Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки*».

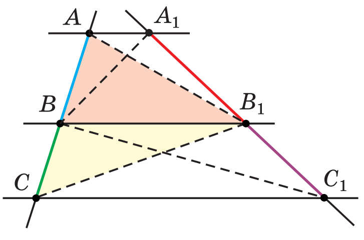


Рис. 239

Дано: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 239).

Доказать: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Доказательство. Проведем отрезки AB_1, CB_1, A_1B и C_1B. Так как $\triangle AB_1B$ и $\triangle CB_1B$ имеют общую высоту, проведенную из вершины B_1, то их площади относятся как основания: $\frac{S_{AB_1B}}{S_{CB_1B}} = \frac{AB}{BC}$. Так как $\triangle A_1BB_1$ и $\triangle C_1BB_1$ имеют общую высоту, проведенную из вершины B, то $\frac{S_{A_1BB_1}}{S_{C_1BB_1}} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Но $\triangle AB_1B$ и $\triangle A_1BB_1$ равновелики: у них общее основание BB_1 и равные высоты, проведенные из вершин A и A_1 (в силу $AA_1 \parallel BB_1$). Также равновелики $\triangle CB_1B$ и $\triangle C_1BB_1$: у них общее основание BB_1 и равные высоты, проведенные из вершин C и C_1 (в силу $CC_1 \parallel BB_1$). Поэтому $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема Фалеса обобщенная также справедлива для трех и более отложенных отрезков, и не только для сторон угла, но и для произвольных прямых.

Теорема (обратная обобщенной теореме Фалеса).
Если на сторонах угла от его вершины последовательно отложить пропорциональные отрезки, то прямые, проходящие через их соответствующие концы, будут параллельны, т. е. если $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$, то $BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 240).

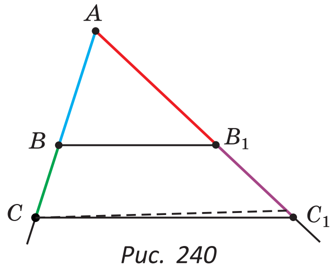


Рис. 240

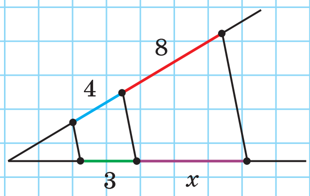
Докажите данную теорему самостоятельно, используя метод от противного и доказанную выше прямую теорему Фалеса.

Следует иметь в виду, что обратная теорема Фалеса справедлива только для отрезков, отложенных от вершины угла.

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4**.

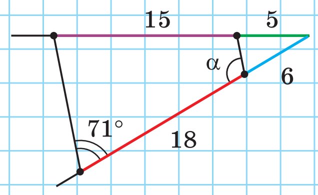
Тест 3

Стороны угла пересечены параллельными прямыми. Найдите длину отрезка x.



Тест 4

По размерам, данным на рисунке, найдите величину угла α.



Задания к § 19

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В трапеции проведены отрезки p и k, параллельные основаниям a и b трапеции* (рис. 241). *Найти x и y по размерам, указанным на рисунке. В ответе указать значение xy.*

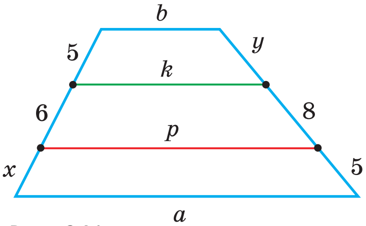


Рис. 241

Решение. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{x}{6} = \frac{5}{8}$ и $\frac{y}{8} = \frac{5}{6}$.

Тогда $x = \frac{6 \cdot 5}{8} = 3\frac{3}{4}$, $y = \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3}$,

$xy = \frac{6 \cdot 5}{8} \cdot \frac{8 \cdot 5}{6} = 25$.

Ответ: 25.

Задача 2. *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BH. Точка K делит высоту BH в отношении* 1 : 3, *считая от основания AC. Прямая AK пересекает сторону BC в точке M. Найти отношение $\frac{BM}{MC}$.*

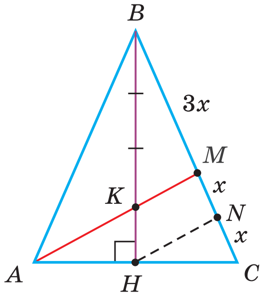


Рис. 242

Решение. В равнобедренном треугольнике ABC высота BH будет и медианой, поэтому $AH = HC$. Проведем $HN \parallel AM$ (рис. 242). По теореме Фалеса (для угла C) $\frac{MN}{NC} = \frac{AH}{HC}$, откуда $MN = NC = x$. Так как $\frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$ (по условию) и $HN \parallel KM$, то по обобщенной теореме Фалеса (для угла HBC) $\frac{MN}{BM} = \frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$.

Тогда $BM = 3MN = 3x$, $\frac{BM}{MC} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

Ответ: 3 : 2.

Задача 3. *При помощи циркуля и линейки: а) разделить данный отрезок a в отношении $m : n$; б) по данным отрезкам a, b и c построить отрезок x, который является четвертым членом пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ (построение четвертого пропорционального отрезка).*

Решение. а) Пусть дан отрезок $AB = a$ и отрезки m и n (рис. 243). Из точки A проведем произвольный луч AK и отложим на нем отрезки $AC = m$ и $CD = n$. Проведем отрезок BD. Строим $CM \parallel BD$. По обобщенной теореме Фалеса $AM : MB = AC : CD = m : n$.

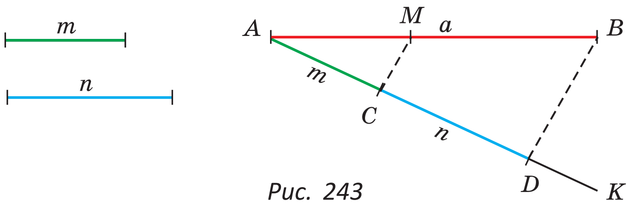


Рис. 243

Замечание. Если отношение отрезков дано в виде отношения натуральных чисел m и n, на луче AK откладывают последовательно m произвольных равных отрезков, а затем n таких же отрезков. Дальнейшее построение совпадает.

б) Строим произвольный угол A (рис. 244). На одной его стороне откладываем отрезки $AB = a$, $BC = b$. На другой стороне — отрезок $AD = c$. Проводим отрезок BD. Строим $CK \parallel BD$, $K \in AD$. Отрезок $DK = x$ — искомый, так как из обобщенной теоремы Фалеса следует $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

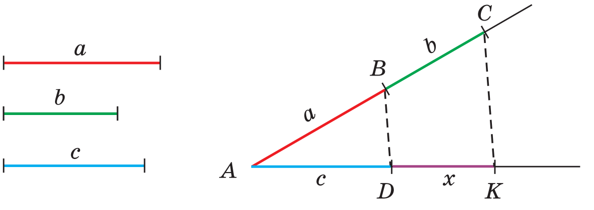


Рис. 244

Задача 4*. *Площадь треугольника ABC равна 36 см^2, $BM = \frac{1}{3}AB$, $MK \parallel AC$. Найти площади S_1, S_2 и S_3 треугольников MBK, AMK и AKC* (рис. 245).

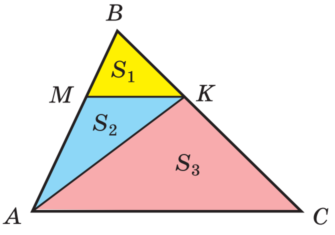


Рис. 245

Решение. Из условия следует $BM : AB = 1 : 3$. Так как BM содержит 1 часть, AB — 3 части, то MA — 2 части. Отсюда $BM : MA = 1 : 2$. По теореме о пропорциональных отрезках $BK : KC = BM : MA = 1 : 2$. Так как $\triangle AKC$ и $\triangle ABK$ имеют общую высоту, проведенную из вершины A, то их площади относятся как основания BK и KC, то есть $1 : 2$. Тогда

$S_3 = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3}\cdot 36 = 24$ (см^2), $S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot 36 = 12$ (см^2). Так как $\triangle MBK$ и $\triangle AMK$ имеют общую высоту, опущенную из вершины K, то их площади относятся как основания BM и MA, то есть, $1 : 2$. Тогда $S_1 = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4$ (см^2), $S_2 = \frac{2}{3}S_{ABK} = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8$ (см^2).

Ответ: 4 см^2, 8 см^2, 24 см^2.

Замечание. Решение можно сократить:

1) $S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, $S_{MBK} = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{9}S_{ABC} = \frac{1}{9}\cdot 36 = 4$ (см^2),

2) $S_{AMK} = 2S_{MBK} = 2\cdot 4 = 8$ (см^2), $S_{AKC} = 36 - 4 - 8 = 24$ (см^2).

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

261. Даны два отрезка: $a = 3$ см, $b = 4$ см. Какие из следующих пар отрезков пропорциональны отрезкам a и b:

а) $m = 6$ мм, $n = 8$ мм;
б) $c = 1\frac{1}{2}$ км, $p = 2$ км;
в) $k = 9$ см, $p = 16$ см;
г) $l = 3{,}6$ м, $g = 180$ см?

262. На рисунках 246, *а)*—*в)* $m \parallel n \parallel k$. Найдите длину отрезка x (все размеры даны в см).

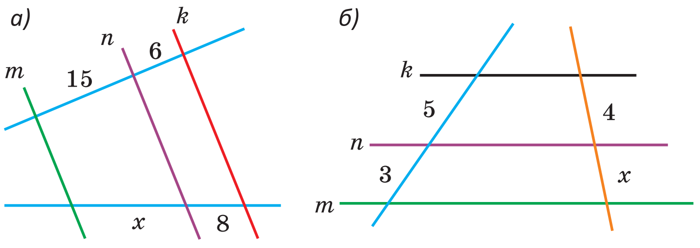


Рис. 246

263. На рисунке 247 отрезки MN и PK параллельны отрезку BC. Найдите:

а) отрезки AN и KC;
б) периметр $\triangle ABC$ (все размеры даны в см).

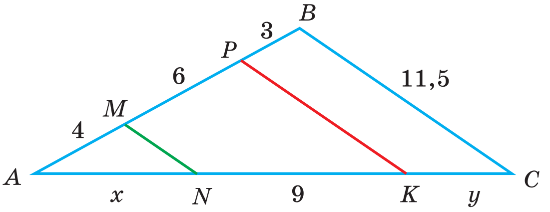


Рис. 247

264. На рисунке 248 $AGFE$ — параллелограмм, $GB = 4$ см, $BF = 5$ см, $FC = 10$ см. Периметр треугольника ABC равен 45 см. Найдите:
а) отрезки AG, AC, AE;
б) периметр параллелограмма $AGFE$.

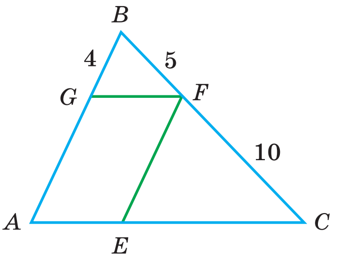


Рис. 248

265. В $\triangle ABC$ проведена биссектриса AK и отрезок KM, параллельный стороне AC, где точка M принадлежит стороне AB; $MB = 6$ см, $BK : KC = 2 : 3$. Найдите:

а) отрезок AM;
б) отрезок MK.

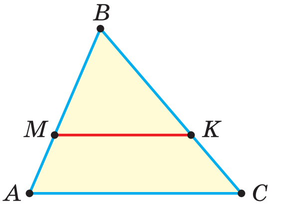


Рис. 249

266. На рисунке 249 $MK \parallel AC$. Найдите:
а) MB, если $AB = 32$ см, $BK : KC = 5 : 3$;
б) AB, если $AM = 18$ см, $BC : BK = 3 : 2$;
в) BK, если $BM = 12$ см, $AM : KC = 4 : 5$;
г) BC, если $AM : AB = 2 : 7$, $BK - KC = 6$ см.

267. При помощи циркуля и линейки разделите данный отрезок в отношении: а) $2 : 3$; б) $3 : 5$ (для проведения параллельных прямых можно использовать чертежный треугольник).

268. В трапеции $ABCD$ (рис. 250) проведены отрезки FP и HT, параллельные основаниям, MK — средняя линия трапеции, $CD = 60$ см. Если $MF : FB = 2 : 3$, $MH : HA = 1 : 2$, то чему равна длина отрезка PT?

269*. В треугольнике ABC проведена медиана BM, точка F — ее середина. Прямая CF пересекает сторону AB в точке K. Площадь четырехугольника $AKFM$ равна 50 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

270*. Точки M, N, K и P — середины сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 251). Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 120 см^2. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

271*. Даны отрезки a и b. Найдите алгоритм построения при помощи циркуля и линейки отрезка x, если $x = \frac{a^2}{b}$.

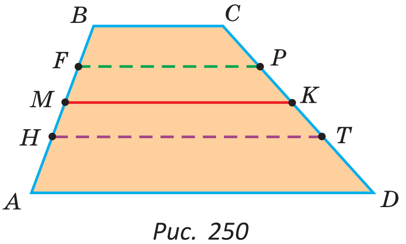


Рис. 250

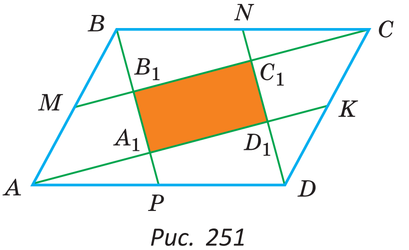


Рис. 251

§ 20. Подобие треугольников

Подобными являются фигуры одинаковой формы, но разных размеров. Например, подобны две окружности (252, *а*) разного радиуса, два квадрата с разной длиной стороны (рис. 252, *б*) и вообще две фигуры F_1 и F_2, каждая из которых представляет собой уменьшенную или увеличенную копию другой, например как на рисунке 252, *в*).

Для указания подобия фигур F_1 и F_2 используется знак «$\backsim$». Пишут $F_1 \backsim F_2$.

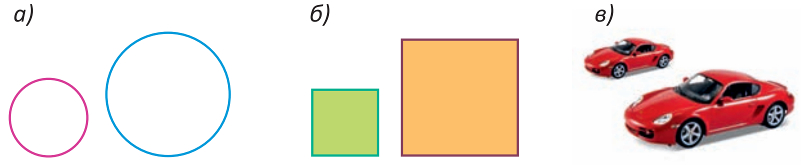


Рис. 252

Определение. **Два треугольника называются подобными, если у них соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.**

Соответствующими сторонами подобных треугольников называются стороны, лежащие против соответственно равных углов этих треугольников.

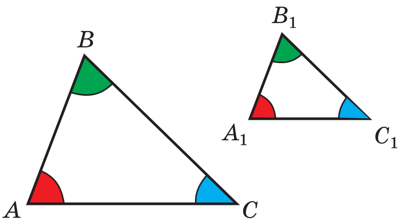


Рис. 253

Если для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 253) выполняются два условия:

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;

2) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то треугольники подобны.

Для удобства подобные треугольники обычно записывают и называют в порядке следования соответствующих вершин. Так, если $\triangle ABC \backsim \triangle MNK$, то вершины A и M, B и N, C и K — соответствующие.

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия треугольников*. Если $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то $\dfrac{AB}{A_1B_1} = k$ — коэффициент подобия. Для определения коэффициента подобия находят отношение стороны первого из записанных или названных подобных треугольников к соответствующей стороне второго треугольника. Например, если $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = 2$, то $k = 2$. При этом $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

Можно выделить следующие свойства подобных треугольников:

1. Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, а $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$.
2. Если $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ и $k = 1$, то $\triangle ABC = \triangle MNK$.

Теорема (о параллельной прямой).
Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

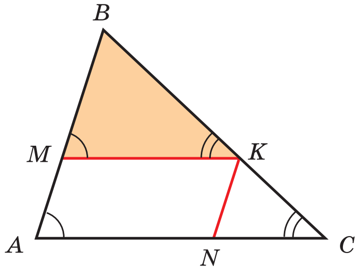


Рис. 254

В теореме речь идет о прямой, которая пересекает стороны треугольника.

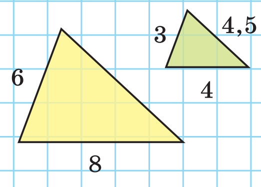
Дано: $\triangle ABC$, $MK \parallel AC$ (рис. 254).
Доказать: $\triangle MBK \sim \triangle ABC$.
Доказательство. У треугольников MBK и ABC углы равны: $\angle BMK = \angle BAC$, $\angle BKM = \angle BCA$ как соответственные при параллельных прямых MK и AC, $\angle B$ — общий.

Докажем, что у треугольников MBK и ABC соответствующие стороны пропорциональны. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{KC}$, откуда $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC}$. Проведем $KN \parallel AB$. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{AN}{NC} = \frac{BK}{KC}$, откуда $\frac{AN}{AC} = \frac{BK}{BC}$. Но $AMKN$ — параллелограмм ($MK \parallel AC$, $KN \parallel AB$). Поэтому $MK = AN$ и $\frac{MK}{AC} = \frac{BK}{BC}$. Тогда $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{MK}{AC}$. Так как у треугольников MBK и ABC углы равны, а стороны пропорциональны, то треугольники подобны. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

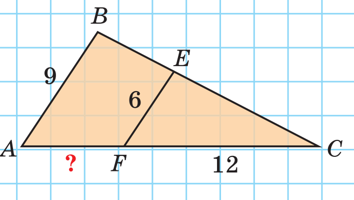
Тест 1

Если желтый и зеленый треугольники подобны, то периметр желтого треугольника равен ...
а) 20; б) 18; в) 24; г) 23.



Тест 2

Если $EF \parallel AB$, то $AF = ...$
а) 6; б) 7; в) 8; г) 6,5.



Задания к § 20

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что периметры подобных треугольников относятся как их соответствующие стороны.*

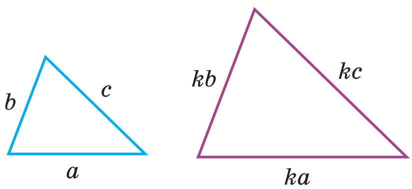


Рис. 255

Доказательство. Пусть стороны одного из подобных треугольников равны a, b и c. Тогда стороны подобного ему треугольника — ka, kb и kc, где k — коэффициент подобия (рис. 255). Отношение периметров

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = \frac{k(a + b + c)}{a + b + c} = k.$$

Получили, что отношение периметров равно коэффициенту подобия. А коэффициент подобия равен отношению соответствующих сторон подобных треугольников.

Замечание. У подобных треугольников отношение любых соответствующих линейных элементов (высот, биссектрис, медиан и т. д.) равно коэффициенту подобия.

Задача 2. *Треугольники на рисунке* 256 *подобны. Причем* $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle F$, $AB = 18$ см, $AC = 21$ см, $EF = 10$ см, $EG = 14$ см. *Найти длины сторон* BC *и* FG.

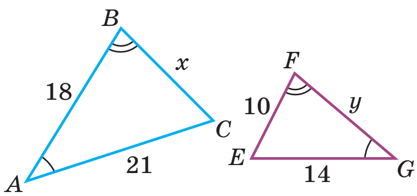


Рис. 256

Решение. Так как $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle F$, то $\angle C = \angle E$. Стороны AC и EG, AB и FG, BC и FE — соответствующие, так как лежат против равных углов. Пусть $BC = x$ см, $FG = y$ см. Поскольку у подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны, то $\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{GE}$, или $\frac{x}{10} = \frac{21}{14}$, откуда $x = \frac{10 \cdot 21}{14} = 15$, $BC = 15$ см. Аналогично, $\frac{FG}{BA} = \frac{GE}{AC}$, $\frac{y}{18} = \frac{14}{21}$, $y = \frac{18 \cdot 14}{21} = 12$, $FG = 12$ см.

Ответ: $BC = 15$ см, $FG = 12$ см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

272. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ на рисунках 257, *а*), *б*) (см. с. 126) подобны. По указанным размерам найдите неизвестные стороны треугольников, обозначенные знаком вопроса (все размеры даны в см).

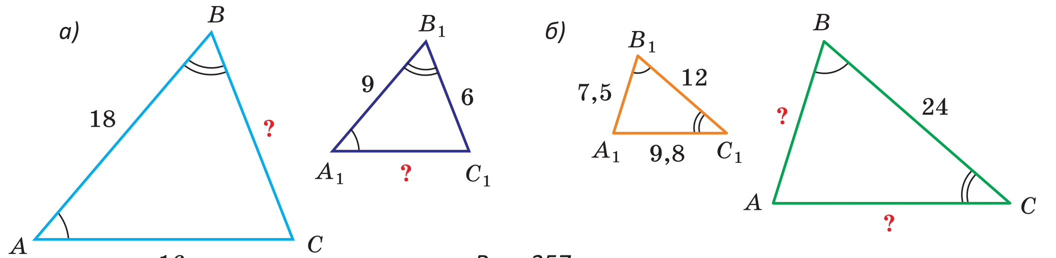


Рис. 257

273. Треугольники ABC и MNK на рисунках 258, *а*), *б*) подобны, $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle K$. Найдите:

а) сумму $AC + MN$;
б) периметр треугольника MNK (все размеры даны в см).

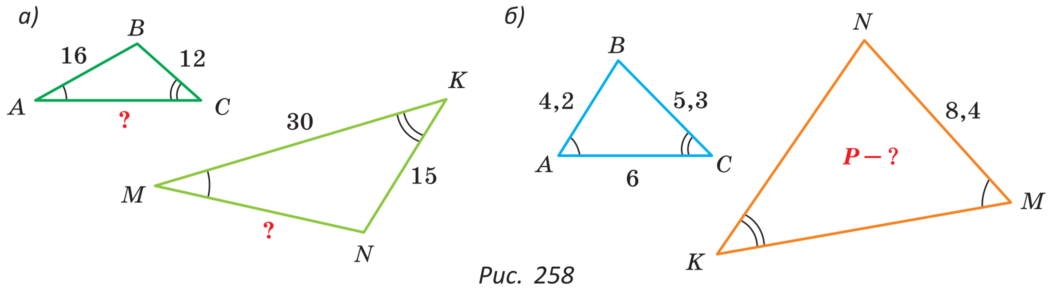


Рис. 258

274. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. Найдите:

а) величину угла B, если $\angle M = 80°$, $\angle K = 40°$;
б) величину угла K, если $\angle N = 75°$, $\angle A = \angle B$;
в) длину стороны AB, если $BC = 15$ см, $MN = 21$ см, $NK = 45$ см;
г) площадь треугольника MNK, если $\angle A = 90°$, $BC = 15$ см, $AB = 12$ см, $NK = 5$ см.

275. На рисунке 259 $MK \parallel AC$, $MK = 6$ м, $MB = 4$ м, $AM = 2$ м. Найдите AC.

276. На рисунке 260 $\angle BAC = 90°$, $HK \perp AC$, $AK = 4$ см, $KC = 12$ см, $AB = 8$ см. Найдите HK.

277. На рисунке 261 $AK = 4$ см, $KB = 8$ см, $EC = 12$ см. Найдите периметр параллелограмма $KBEF$.

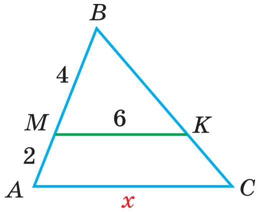


Рис. 259

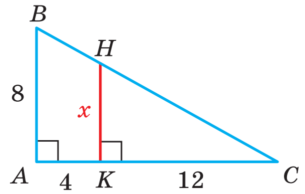


Рис. 260

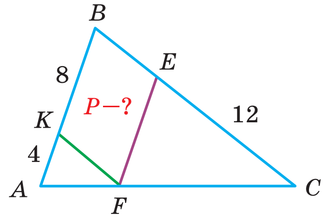


Рис. 261

278. Равнобедренные треугольники на рисунке 262 подобны, $\angle C = 71°$. Найдите величину угла N.

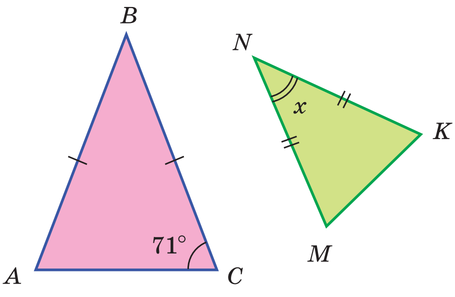


Рис. 262

279. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Периметр $\triangle ABC$ равен 24 см, периметр $A_1B_1C_1$ равен 36 см. Сторона AB равна 8 см. Найдите соответствующую ей сторону A_1B_1.

280. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ с коэффициентом подобия $k = 3$ $\left(\frac{AB}{MN} = k\right)$. Найдите периметр $\triangle MNK$, если $AB = 4$ см, $BC = 5\frac{1}{3}$ см, $AC = 2\frac{2}{3}$ см.

281. Докажите, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

282. Изобразите треугольник ABC. Через его вершины проведите прямые, параллельные противоположным сторонам. Докажите, что образованный ими треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC.

283. Дана трапеция $ABCD$, $AD = 15$ см, $BC = 6$ см — основания трапеции, $AB = 6$ см, $CD = 12$ см. Боковые стороны трапеции продолжены до пересечения в точке K. Найдите длины отрезков BK и CK.

284. Дана трапеция $ABCD$. Точка K принадлежит боковой стороне AB, точка P — боковой стороне CD, $KP \parallel AD$; $BC = 4$ см, $AD = 11$ см, $KP = 6$ см. Найдите отношение $CP : PD$.

285. На рисунке 263 $MBCK$ — трапеция со сторонами, равными 10 м, 15 м, 4 м и 6 м. Найдите отношение периметра треугольника ABC к периметру трапеции.

286*. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $AC = 12$ см (рис. 264). Найдите периметр ромба $AMNK$.

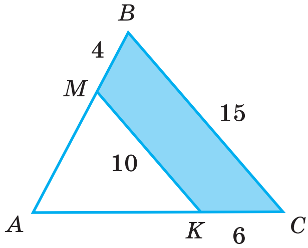


Рис. 263

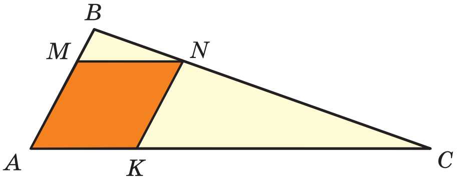


Рис. 264

287*. $\triangle ABC$ подобен $\triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия $k = \frac{2}{3}$. Известно, что $AB + BC = 24$ см, $A_1B_1 - B_1C_1 = 6$ см. Найдите AB.

288*. Стороны одного из двух подобных треугольников равны 6 см и 12 см, другого — 12 см и 18 см. Найдите неизвестные стороны каждого из треугольников, если коэффициент подобия 2-го треугольника 1-му: а) целое число; б) дробное число.

289*. На координатной плоскости дан треугольник OAB, где $O(0; 0)$, $A(3; 5)$, $B(3; 0)$. Постройте какой-либо треугольник OA_1B_1, подобный данному, стороны которого в 2 раза больше сторон треугольника OAB. Укажите координаты точек A_1 и B_1.

§ 21. Признаки подобия треугольников

Теорема (1-й признак подобия треугольников).
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

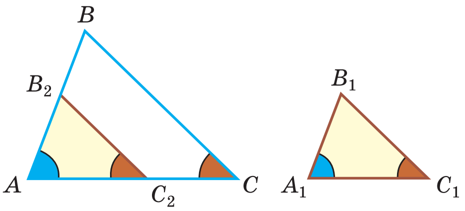


Рис. 265

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Отложим на стороне AC треугольника ABC отрезок AC_2, равный стороне A_1C_1, и проведем $C_2B_2 \parallel CB$ (рис. 265). Получим $\triangle AB_2C_2$. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Поскольку $\angle C_2 = \angle C$ как соответственные при параллельных прямых BC и B_2C_2 и секущей AC, а $\angle C = \angle C_1$ по условию, то $\angle C_2 = \angle C_1$ и $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ по 2-му признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Следствие.

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны. В данном случае говорят, что прямоугольные треугольники подобны по острому углу.

На рисунке 266 прямоугольные треугольники MKC и BAC подобны, так как у них $\angle C$ — общий. Причем $\frac{KM}{AB} = \frac{KC}{AC} = \frac{MC}{BC}$.

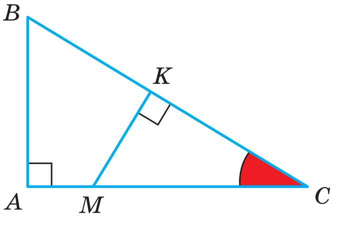


Рис. 266

Теорема (2-й признак подобия треугольников).
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

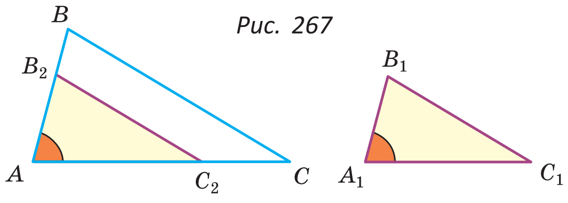


Рис. 267

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \ \angle A = \angle A_1.$$

Доказать: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Отложим на стороне AC треугольника ABC отрезок AC_2, равный стороне A_1C_1, и проведем $C_2B_2 \parallel CB$ (рис. 267). Получим $\triangle AB_2C_2$. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$. Тогда $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$ (1). По условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. С учетом $A_1C_1 = AC_2$ получаем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2}$ (2). Сравнивая пропорции (1) и (2), приходим к выводу, что $AB_2 = A_1B_1$. Тогда $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ по 1-му признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Теорема (3-й признак подобия треугольников).
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

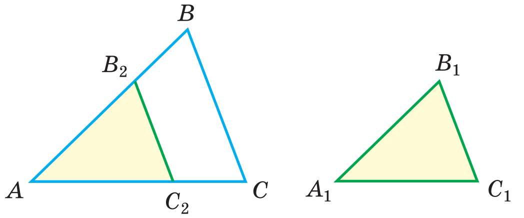


Рис. 268

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

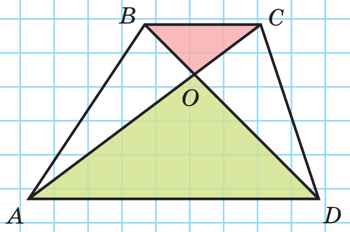
Доказать: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Отложим на стороне AC треугольника ABC отрезок AC_2, равный стороне A_1C_1, и проведем $C_2B_2 \parallel CB$ (рис. 268). Получим $\triangle AB_2C_2$. Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$. Тогда $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$ (1). По условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. С учетом $AC_2 = A_1C_1$ получаем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (2). Сравнивая равенства (1) и (2), приходим к выводу, что $AB_2 = A_1B_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$. Тогда $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ по 3-му признаку равенства треугольников. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

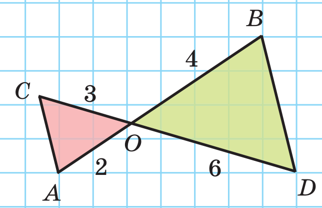
Тест 1

$ABCD$ — трапеция. По какому признаку $\triangle BOC \sim \triangle DOA$?



Тест 2

Подобны ли $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$? Если да, то по какому признаку?



Гимнастика ума

В треугольнике провели три высоты (рис. 269). Сколько пар подобных треугольников образовалось при этом?

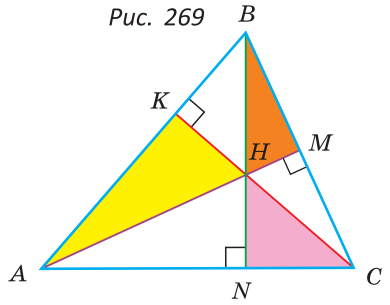
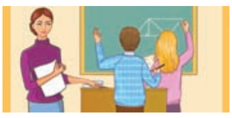


Рис. 269



Задания к § 21

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *По размерам, указанным на рисунке* 270, *найти длины отрезков* AD *и* DE.

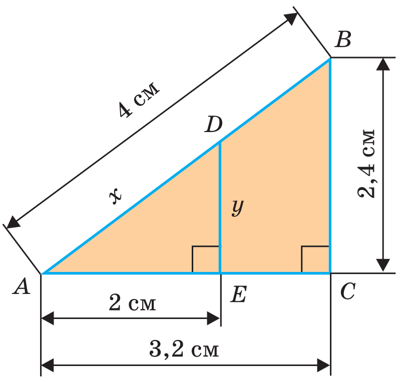


Рис. 270

Решение. Прямоугольные треугольники ABC и ADE подобны по острому углу ($\angle A$ — общий). Поэтому их соответствующие стороны пропорциональны.

Найдем отрезок AD: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, или $\frac{x}{4} = \frac{2}{3,2}$, $x = \frac{4 \cdot 2}{3,2} = 2,5$ (см).

Найдем отрезок DE: $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, или $\frac{y}{2,4} = \frac{2}{3,2}$, $y = \frac{2,4 \cdot 2}{3,2} = 1,5$ (см).

Ответ: $AD = 2,5$ см, $DE = 1,5$ см.

Замечание. Условие задачи содержит избыточное данное. Так, для задания прямоугольного треугольника ABC достаточно знать длины только двух его сторон, а третью сторону можно найти по теореме Пифагора.

Задача 2. *$ABCD$ — трапеция, $AD = 30$ см и $BC = 15$ см — ее основания, $AC = 27$ см, $BD = 33$ см — диагонали трапеции, которые пересекаются в точке O. Найти периметр треугольника AOD* (рис. 271).

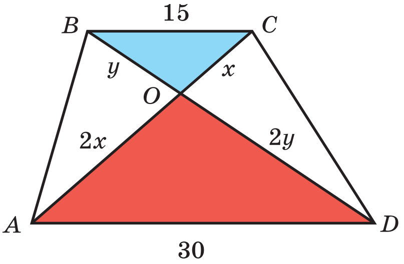


Рис. 271

Решение. Треугольники BOC и DOA подобны по 1-му признаку подобия треугольников: $\angle CBO = \angle ADO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BD, $\angle COB = \angle AOD$ как вертикальные. Из подобия треугольников следует: $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$. То есть $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$ и $\frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}$. Если $OC = x$ см, то $OA = 2x$ см. Отсюда $2x + x = 27$, $x = 9$, $OC = 9$ см, $OA = 18$ см. Если $OB = y$ см, то $OD = 2y$. Отсюда $y + 2y = 33$, $y = 11$, $OB = 11$ см, $OD = 22$ см. $P_{AOD} = AO + OD + AD = 18 + 22 + 30 = 70$ (см).

Ответ: 70 см.

Задача 3. *В треугольнике ABC проведен отрезок BK так, что $\angle ABK = \angle ACB$, $AK = 9$ см, $KC = 7$ см. Найти сторону AB* (рис. 272).

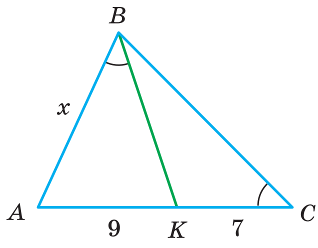


Рис. 272

Решение. У треугольников ABC и AKB угол A — общий, $\angle ABK = \angle ACB$ по условию. Поэтому $\triangle ABC \backsim \triangle AKB$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\angle ABC = \angle AKB$ и $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB}$. Если $AB = x$ см, то $\frac{x}{16} = \frac{9}{x}$, $x^2 = 9 \cdot 16$, $x = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$, $AB = 12$ см.

Ответ: 12 см.

Замечание. Когда речь идет о двух парах соответствующих сторон подобных треугольников, удобно составлять отношение двух сторон одного треугольника и приравнивать его к отношению двух соответствующих сторон другого треугольника.

Задача 4. *Дана трапеция $ABCD$, ее основания $AD = 18$ и $BC = 4{,}5$, диагональ $AC = 9$. Если $\alpha + \beta = 64°$, то чему равен угол α* (рис. 273)?

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle DCA$: $\frac{BC}{AC} = \frac{4{,}5}{9} = \frac{1}{2}$, $\frac{AC}{AD} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, $\angle ACB = \angle CAD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). Тогда $\triangle ABC \backsim \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними (по 2-му признаку подобия треугольников). Тогда $\angle BAC = \angle ADC$ как соответственные углы в подобных треугольниках, т. е. $\alpha = \beta$. Отсюда $\alpha = \frac{64°}{2} = 32°$.

Ответ: 32°.

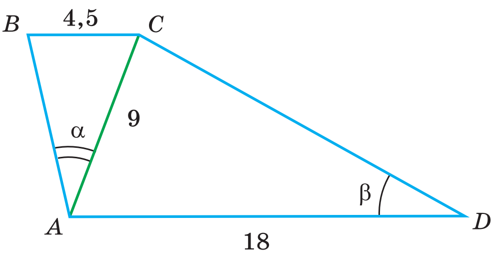


Рис. 273

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

290. Изобразите произвольный $\triangle ABC$. На луче AB за точку B отложите отрезок BB_1, в 2 раза больший отрезка AB, на луче AC за точку C отложите отрезок CC_1, в 2 раза больший отрезка AC. Объясните, почему $\triangle AB_1C_1$ подобен $\triangle ABC$. Чему равен коэффициент подобия?

291. Найдите, при какой длине стороны A_1C_1 треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будут подобны (рис. 274)? Укажите признак подобия.

292. Какие из треугольников, изображенных на рисунке 275, подобны и почему?

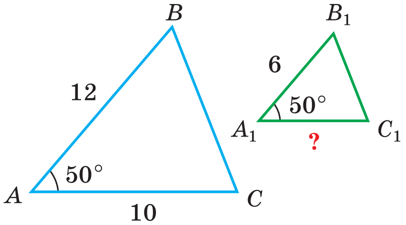


Рис. 274

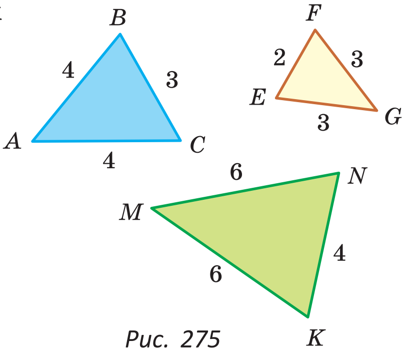


Рис. 275

293. По данным на рисунках 276, *а*), *б*) докажите подобие треугольников. Найдите длину стороны, обозначенной знаком вопроса (все размеры даны в см).

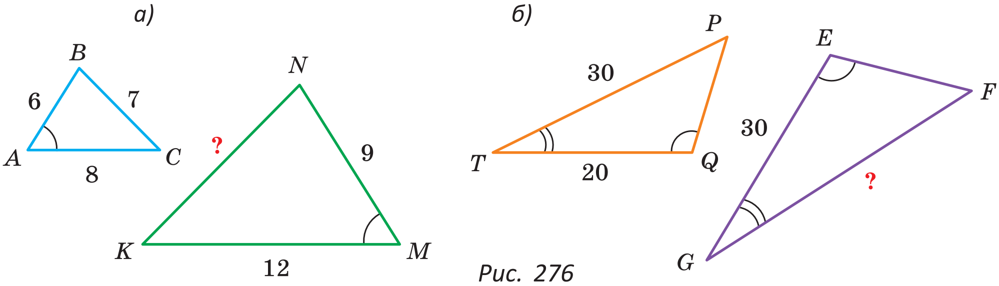


Рис. 276

294. Докажите, что если у равнобедренных треугольников равны углы при вершине, то такие треугольники подобны.

295. Докажите, что равнобедренные треугольники на рисунке 277 подобны. Найдите отношение периметров этих треугольников: $P_{ABC} : P_{KNM}$.

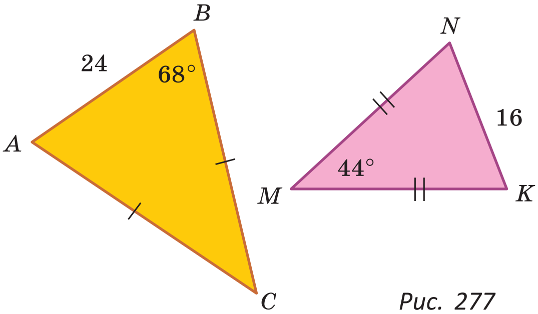


Рис. 277

296. Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

а) Если $AB = 21$ см, $BC = 27$ см, $B_1C_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 10$ см, то чему равен периметр треугольника ABC?

б) Если $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 6$ см, $A_1C_1 = 8$ см, периметр $\triangle ABC$ равен 27 см, то чему равна длина наибольшей стороны $\triangle ABC$?

297. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 278) $\angle A = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. Из середины гипотенузы BC восстановлен перпендикуляр MK. Найдите длину отрезка MK.

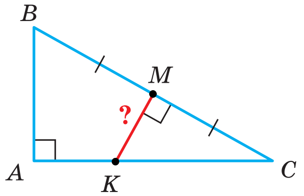


Рис. 278

298. В треугольнике ABC провели средние линии MK, KN и MN, $M \in AB$, $N \in BC$, $K \in AC$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle NKM$.

299. Точки M, N и K — соответственно середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC, $MN : KN : MK = 5 : 3 : 4$, $P_{ABC} = 48$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

300. а) В трапеции $ABCD$ (рис. 279, *а*) $BC = 9$ см, $AD = 18$ см, $OD = 8$ см. Найдите BO.

б) В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 279, *б*) $BC = 18$ см, $AK = 5$ см, $KC = 15$ см. Найдите MD.

в) В параллелограмме $ABCD$ (рис. 279, *в*) $AD = 12$ см, $MC = 4$ см, $KM = 6$ см. Найдите AK.

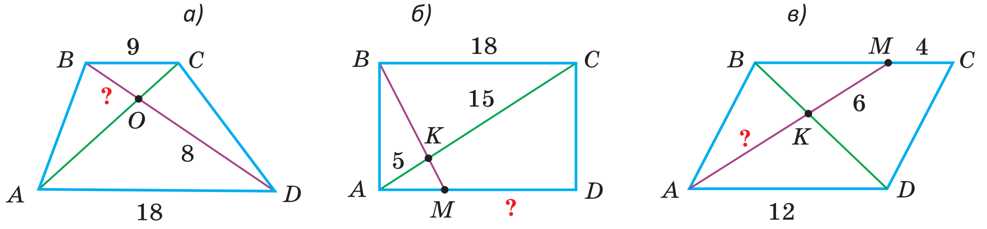


Рис. 279

301. Докажите, что если катет a и гипотенуза c одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны катету a_1 и гипотенузе c_1 другого прямоугольного треугольника $\left(\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}\right)$, то такие треугольники подобны.

302. Докажите, что у подобных треугольников:

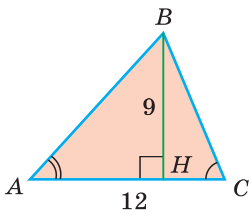
а) соответствующие высоты;

б) соответствующие биссектрисы;

в) соответствующие медианы

относятся как соответствующие стороны этих треугольников.

303. Даны $\triangle ABC$ и $\triangle MNK$ (рис. 280). По размерам на рисунке найдите площадь $\triangle MNK$ (все размеры даны в см).



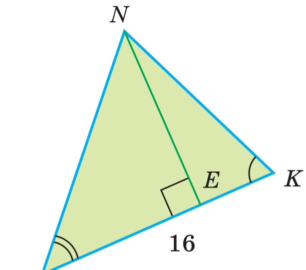


Рис. 280

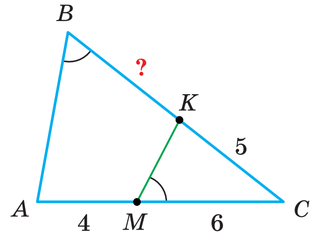


Рис. 281

304. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 21$ см, $BC = 7$ см. Диагонали трапеции равны $AC = 20$ см, $BD = 16$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите периметр $\triangle AOD$.

305. На рисунке 281 $\angle KMC = \angle ABC$, $AM = 4$ см, $MC = 6$ см, $KC = 5$ см. Найдите длину отрезка BK.

306. На рисунке 282 AM и CK — высоты треугольника ABC, $CM = 9$ см, $BM = 3$ см, $BK = 4$ см. Найдите длину отрезка AK.

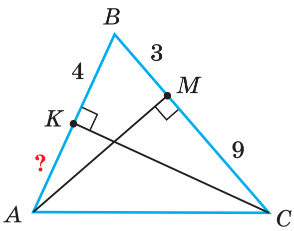


Рис. 282

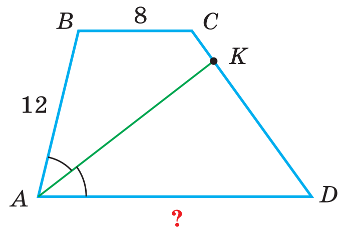


Рис. 283

307. На рисунке 283 $ABCD$ — трапеция, AK — биссектриса угла BAD, $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $CK : KD = 1 : 5$. Найдите длину основания AD.

308. На рисунках 284, *а)*—*в)* изображены параллелограмм, трапеция и прямоугольник. По данным на рисунках найдите длину отрезка x.

а) б) в)

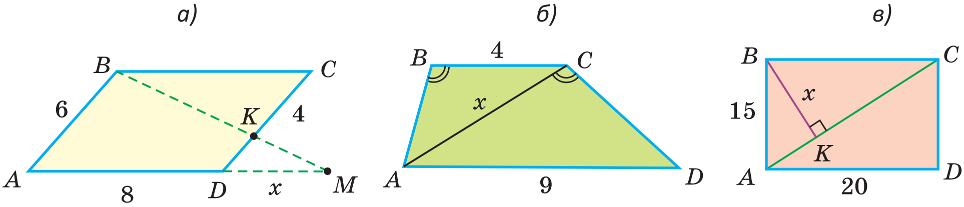


Рис. 284

309. Изобразите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), проведите высоту CH. Укажите все пары полученных подобных треугольников и для каждой пары запишите отношение соответствующих сторон.

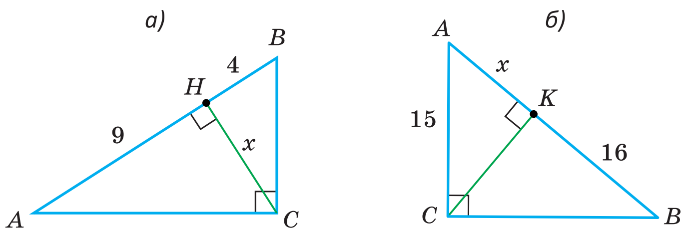


Рис. 285

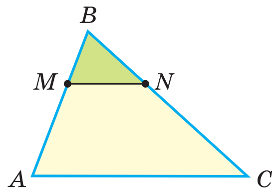


Рис. 286

310. По размерам, данным на рисунках 285, *а*), *б*), найдите:
а) высоту CH;
б) отрезок AK (проекцию катета AC на гипотенузу AB).

311. В равнобедренном треугольнике ABC, у которого $AB = BC$ и $\angle B = 36°$, провели биссектрису AK. Определите, какие из полученных треугольников подобны.

312. Периметр трапеции $AMNC$ равен 22 см (рис. 286), периметр треугольника ABC равен 24 см, периметр треугольника MBN равен 8 см. Найдите: а) MN; б) AC.

313. а) В треугольнике ABC провели отрезок BM (M лежит на стороне AC), $\angle BMC = \angle ABC$, $AM = 7$ м, $MC = 9$ м. Найдите сторону BC.
б) В треугольнике ABC провели отрезок BM (M лежит на стороне AC), $\angle ABM = \angle ACB$, $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Найдите отрезки AM и MC.
в) В треугольнике ABC провели отрезок BM (M лежит на стороне AC), $\angle ABM = \angle ACB$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $BM = 3$ см. Найдите сторону AC.

314. а) В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 5 : 7$. Луч DM пересекает луч AB в точке K. Найдите BK, если $AB = 42$ см.
б) В параллелограмме $ABCD$ на продолжении стороны AB за точку B взята точка M. Прямая DM пересекает диагональ AC в точке K так, что $AK : KC = 11 : 4$. Найдите длину отрезка BM, если $AB = 640$ м.

315*. Квадрат вписан в треугольник, как показано на рисунке 287. Если $AC = 70$ см, $BH = 30$ см — высота, то чему равна длина стороны квадрата?

316*. Дан прямоугольник $ABCD$ с площадью 210 см^2. На стороне AD взята точка K, на стороне CD — точка M так, что $AK : KD = 2 : 1$, $CM : MD = 2 : 3$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника APK.

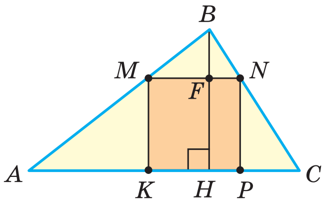


Рис. 287

317*. Основания трапеции $ABCD$ равны $AD = a$ см и $BC = b$ см. Отрезок KM проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, его концы лежат на боковых сторонах трапеции. Докажите, что $KM = \frac{2ab}{a+b}$.

При помощи **Интернета** выясните, как Фалес Милетский определил высоту египетской пирамиды, поразив своими знаниями фараона Амасиса.

Объясните решение Фалеса по нахождению высоты пирамиды. Подумайте, как Фалес нашел длину той части тени, которая находится в основании пирамиды и недоступна для непосредственного измерения.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение подобных треугольников.
2. Теорему о пропорциональных отрезках (обобщенную теорему Фалеса).
3. Теорему о прямой, параллельной стороне треугольника.
4. Три признака подобия треугольников.
5. Признак подобия прямоугольных треугольников.

Умеем

1. Определять соответствующие стороны подобных треугольников и записывать отношения их длин в виде пропорций.
2. Определять, по какому признаку подобны треугольники.
3. Доказывать три признака подобия треугольников.

§ 22. Свойство биссектрисы треугольника

Теорема. **Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.**

Дано: $\triangle ABC$, CK — биссектриса.

Доказать: $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$.

Доказательство. Из точки A проведем луч, параллельный биссектрисе CK до пересечения его в точке D с продолжением стороны BC (рис. 288, см. с. 137). $\angle BCK = \angle BDA$ как соответственные при параллельных прямых CK и DA и секущей BD; $\angle KCA = \angle DAC$ как накрест лежащие при параллельных прямых CK и DA и секущей AC. В силу того, что $\angle BCK$ и $\angle KCA$ (CK — биссектриса), получим, что $\angle CDA = \angle CAD$. Тогда $\triangle ACD$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), $CD = CA$. По обобщенной теореме Фалеса $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{CD}$, откуда $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$. Теорема доказана.

Теорему также называют *«свойством биссектрисы угла треугольника»*.

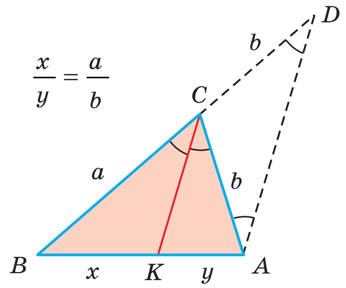
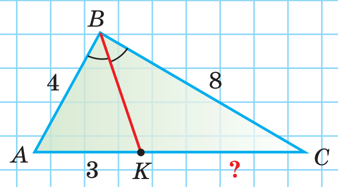


Рис. 288

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

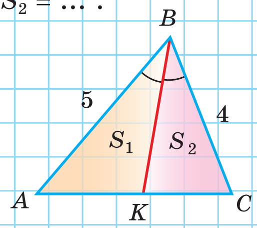
Тест 1

Если $\angle ABK = \angle CBK$, то $KC = \ldots$.



Тест 2

Если BK — биссектриса угла ABC, то $S_1 : S_2 = \ldots$.



Задания к § 22

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти отрезки, на которые биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу.*

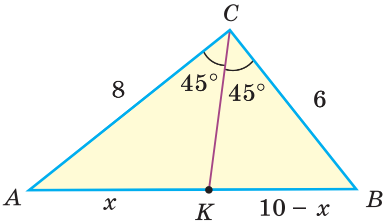


Рис. 289

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $AC = 8$, CK — биссектриса (рис. 289). По теореме Пифагора $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Обозначим $AK = x$, $KB = 10 - x$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC}$, то есть $\frac{x}{10 - x} = \frac{8}{6}$ или $\frac{x}{10 - x} = \frac{4}{3}$. Тогда $3x = 4(10 - x)$, $7x = 40$, $x = \frac{40}{7}$. Отсюда $10 - x = 10 - \frac{40}{7} = \frac{30}{7}$.

Получили: $AK = 5\frac{5}{7}$, $KB = 4\frac{2}{7}$.

Ответ: $5\frac{5}{7}$; $4\frac{2}{7}$.

Задача 2. *Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает диагональ BD в точке K, а сторону BC — в точке M. Известно, что MC = 4, BK : KD = 1 : 2. Найти периметр параллелограмма* (рис. 290).

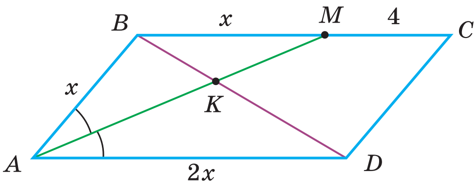


Рис. 290

Решение. Рассмотрим $\triangle ABD$, AK — его биссектриса. А биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть $\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{KD} = \frac{1}{2}$, $AB = x$, $AD = 2x$. Так как $\angle BAM = \angle DAM$ (AM — биссектриса), а $\angle DAM = \angle AMB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AM, то $\angle BAM = \angle BMA$. Тогда $\triangle AMB$ — равнобедренный, $AB = BM = x$, $BC = x + 4$. С другой стороны, $BC = AD = 2x$. Тогда $2x = x + 4$, $x = 4$, $AB = 4$, $AD = 8$, $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(4 + 8) = 24$.

Ответ: 24.

Замечание. Для решения задачи можно было воспользоваться подобием треугольников BKM и DKA.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

318. На рисунках 291, *а)*—*в)* в каждом треугольнике проведена биссектриса. Найдите длину отрезка x (все размеры даны в см).

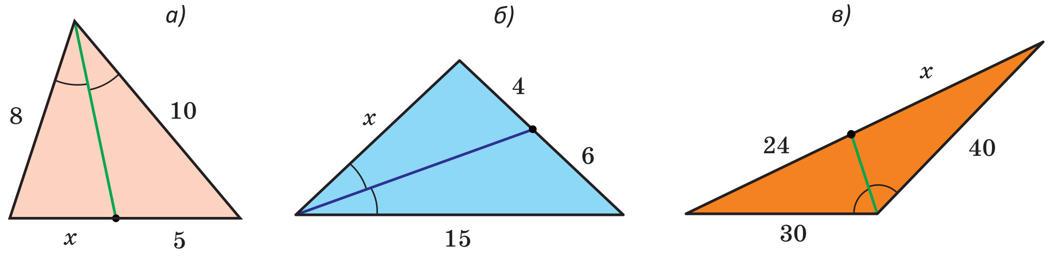


Рис. 291

319. В $\triangle ABC$ $AC = 8$ см. На стороне BC взята точка F так, что $\angle BAF = \angle CAF$, $BF = 3$ см, $FC = 4$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$.

320. В равнобедренном $\triangle ABC$, где $AC = BC = 16$ см, проведена биссектриса BK, $AK : KC = 1 : 4$. Найдите основание AB.

321. Стороны треугольника равны 6 см, 7 см и 8 см. Найдите длины отрезков, на которые биссектриса среднего по величине угла треугольника делит противолежащую сторону.

322. Найдите длину биссектрисы AK прямоугольного треугольника ABC, если катет $AC = 6$ см, гипотенуза $AB = 10$ см.

323. В треугольнике ABC AC = 48 см, BC = 36 см. На стороне AB отмечена точка D, такая, что $AD : DB = 4 : 3$, $\angle BDC + \angle ACD = 104°$. Найдите $\angle ACB$.

324*. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого AB = 15 см, AD = 30 см. Точка M лежит на диагонали BD и равноудалена от сторон BC и CD. Найдите площадь треугольника CMD.

325*. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине B пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $AK : CK = AB : BC$.

§ 23. Свойство площадей подобных треугольников

Часто школьникам задают «провокационный» вопрос: «Если стороны квадрата увеличить в 2 раза, то во сколько раз увеличится площадь квадрата?» При этом часто получают ответ: «В 2 раза!», который является неправильным.

Убедимся в этом. На рисунке 292 сторона малого квадрата равна 2 см, а площадь 4 см^2. Увеличив все стороны квадрата в 2 раза, получим большой квадрат со стороной 4 см и площадью 16 см^2. Как видим, площадь квадрата увеличилась в 4 раза!

Легко понять, что если стороны квадрата увеличить в 3 раза, то его площадь увеличится в 3^2 раз, то есть в 9 раз.

Аналогичное утверждение справедливо и для треугольников. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

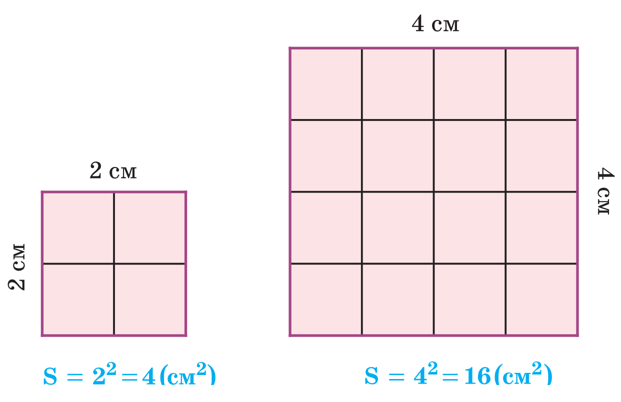


Рис. 292

Теорема (о площадях подобных треугольников).
Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.

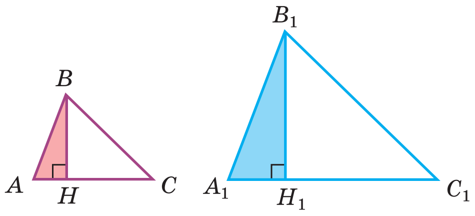


Рис. 293

Дано: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (рис. 293).

Доказать: $\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{A_1B_1^2}{AB^2}$.

Доказательство. Пусть k — коэффициент подобия $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$, где $\angle A$ — острый. Тогда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Проведем высоты BH и B_1H_1 данных треугольников. Так как $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, то $\angle A_1 = \angle A$. Прямоугольные треугольники $A_1B_1H_1$ и ABH подобны по острому углу. Отсюда $\dfrac{B_1H_1}{BH} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = k$, $B_1H_1 = k \cdot BH$.

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1H_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (k \cdot AC) \cdot (k \cdot BH)}{\frac{1}{2}AC \cdot BH} = k^2 = \left(\frac{A_1C_1}{AC}\right)^2 = \frac{A_1C_1^2}{AC^2}.$$

Теорема доказана.

Существует и другая формулировка этой теоремы.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Задания к § 23

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого составляет* $\frac{1}{4}$ *площади данного.*

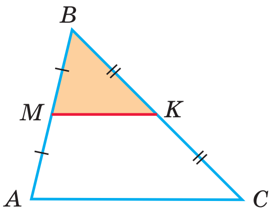


Рис. 294

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (рис. 294) MK — средняя линия. Средняя линия параллельна основанию и равна его половине, то есть $MK \parallel AC$ и $MK = \frac{1}{2}AC$. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. Тогда $\triangle MBK \sim \triangle ABC$. Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, то $\dfrac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \dfrac{MK^2}{AC^2} = \left(\dfrac{MK}{AC}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, то есть $S_{MBK} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. *Дана трапеция* $ABCD$ *с основаниями* AD *и* BC (рис. 295). *Диагонали трапеции пересекаются в точке* O, $S_{BOC} = 4$ см^2, $S_{AOB} = 12$ см^2. *Найти площадь трапеции.*

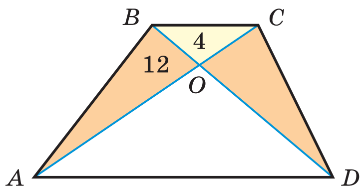


Рис. 295

Решение. *Способ* 1. Диагонали трапеции делят ее на 4 треугольника. Ранее нами доказано, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, а прилежащие к основаниям — подобны. То есть, $S_{AOB} = S_{DOC}$, $\triangle BOC \sim \triangle DOA$. Отсюда $S_{DOC} = 12$ см^2. Далее заметим, что $\triangle BOC$ и $\triangle AOB$ имеют общую высоту, опущенную из вершины B. Потому их площади относятся как соответствующие этой высоте основания: $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{CO}{AO}$. То есть $\frac{CO}{AO} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Стороны CO и AO являются соответствующими сторонами подобных треугольников BOC и DOA (они лежат против равных углов OBC и ODA). По теореме о площадях подобных треугольников $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \frac{CO^2}{AO^2} = \left(\frac{CO}{AO}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Отсюда $S_{DOA} = 9S_{BOC} = 9 \cdot 4 =$ $= 36$ (см^2). Искомая площадь трапеции: $S_{ABCD} = 12 + 12 + 4 + 36 = 64$ (см^2).

Способ 2. Треугольники COD и AOD имеют общую высоту, проведенную из вершины D. Тогда их площади относятся как основания CO и AO, то есть $1 : 3$. Значит, $S_{AOD} = 3S_{COD} = 3 \cdot 12 = 36$ (см^2), $S_{ABCD} = 64$ см^2.
Ответ: 64 см^2.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

326. Как изменится площадь треугольника, если все его стороны:

а) увеличить в 2 раза;
б) увеличить в 3 раза;
в) увеличить в 2,5 раза;
г) уменьшить в 10 раз?

327. Для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ выполняется $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 1{,}5$ см, $S_{ABC} = 90$ см^2. Найдите $S_{A_1B_1C_1}$.

328. а) Периметры двух подобных треугольников относятся как $2 : 3$. Найдите отношение площадей данных треугольников.
б) Площади двух подобных треугольников относятся как $64 : 25$. Найдите отношение периметров этих треугольников.

329. Найдите отношение площади $\triangle KMN$ к площади $\triangle EPG$ (рис. 296), если $\angle K = \angle E$.

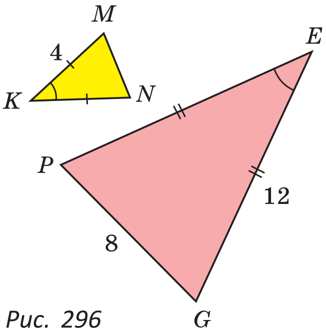


Рис. 296

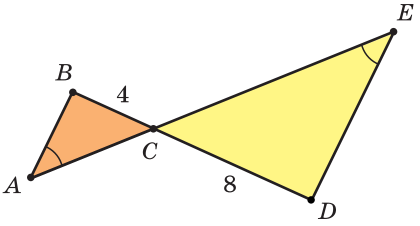


Рис. 297

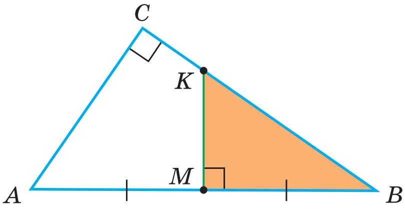


Рис. 298

330. На рисунке 297 $\angle A = \angle E$, $BC = 4$ см, $CD = 8$ см, $S_{ABC} = 10$ см^2. Найдите S_{EDC}.

331. На рисунке 298 $\angle C = 90°$, $AC = 6$ м, $BC = 8$ м, $AM = MB$, $KM \perp AB$. Найдите площадь треугольника KMB.

332. На рисунке 299 $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$, $MB : AM = 1 : 2$, $S_{ABC} = 360$ см^2. Найдите S_{AMNK}.

333. Площадь трапеции $AMKC$ (рис. 300) равна 80 м^2, $AM : MB = 4 : 3$. Найдите площадь треугольника MBK.

334. На рисунке 301 $AMKE$ — параллелограмм, $S_{MBK} = S_1 = 16$ см^2, $S_{EKC} = S_2 = 9$ см^2.

а) Найдите площадь параллелограмма $AMKE$.
б) Выразите площадь параллелограмма S_{AMKE} через S_1 и S_2.
в) Выразите площадь треугольника ABC через S_1 и S_2.

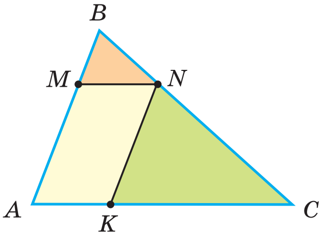


Рис. 299

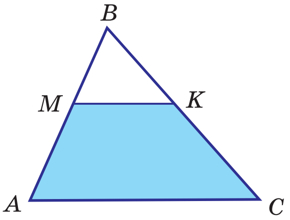


Рис. 300

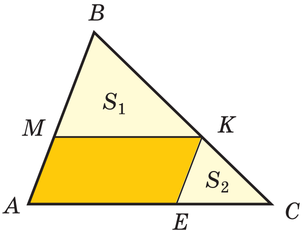


Рис. 301

335. а) В трапеции $ABCD$ (рис. 302) $BC = \frac{1}{3}AD$, $S_1 + S_2 = 60$ см^2. Найдите площадь S трапеции $ABCD$.
б)* Выведите формулу зависимости площади S трапеции $ABCD$ от площадей S_1 и S_2.

336. На рисунке 303 $\triangle ABC$ — равносторонний, $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$. Если площадь треугольника ABC равна 72 см^2, то чему равна площадь треугольника MNK?

337. Через центр равностороннего треугольника (точку пересечения медиан) провели прямые, параллельные его сторонам (рис. 304).

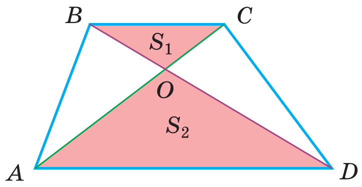


Рис. 302

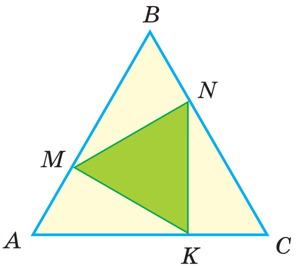


Рис. 303

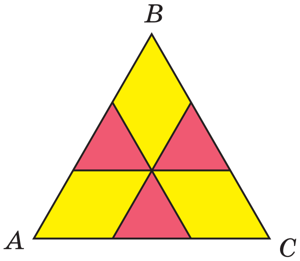


Рис. 304

Какую часть площади треугольника ABC занимает часть, занятая красными треугольниками?

338*. AK и CH — высоты треугольника ABC (рис. 305), $BK : AB = 2 : 5$, $S_{ABC} = 50$ см^2. Найдите площадь треугольника HBK.

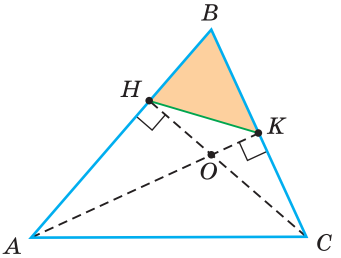


Рис. 305

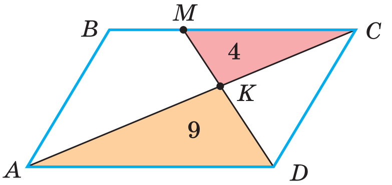


Рис. 306

339*. В параллелограмме $ABCD$ проведен отрезок DM (рис. 306), который пересекает диагональ AC в точке K. Известно, что $S_{MCK} = 4$ см^2, $S_{DKA} = 9$ см^2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

340*. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота BH. Известно, что $S_{ABH} = 4$ см^2, $S_{CBH} = 16$ см^2. Найдите гипотенузу AC.

341*. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 4$ см и $AD = 8$ см и высотой, равной 3 см. Боковые стороны трапеции продлили до пересечения в точке K. Найдите площадь треугольника BKC.

342*. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям, который делит трапецию на две равновеликие части.

343*. Разделите при помощи циркуля и линейки данный треугольник на две равновеликие части прямой, параллельной его стороне.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Свойство биссектрисы треугольника.
2. Теорему об отношении площадей подобных треугольников.
3. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если его стороны увеличить в 2 раза, в 3 раза, в k раз.

Умеем

1. Находить площадь одного из двух подобных треугольников, если известна площадь другого и отношение соответствующих сторон.
2. Доказывать теорему о свойстве биссектрисы треугольника.
3. Доказывать теорему об отношении площадей подобных треугольников.

Геометрия 3D

Как уже говорилось, любые два круга являются подобными (рис. 307, *а*). Подобными также являются любые два квадрата (рис. 307, *б*). Коэффициент подобия в первом случае может быть определен как отношение радиусов кругов, а во втором — как отношение сторон квадратов, то есть $k = \frac{R_1}{R_2}$ или $k = \frac{a_1}{a_2}$.

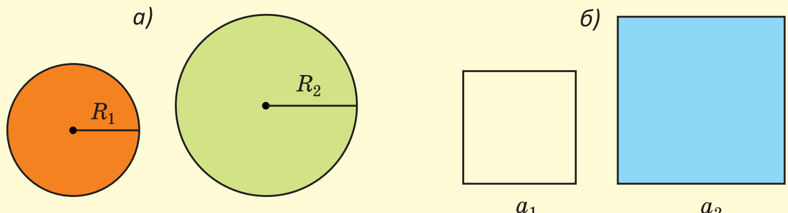


Рис. 307

Два многоугольника называются подобными, если у них соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны (рис. 308, *а*).

Фигуры F и F_1 называются *подобными*, если между их точками можно установить такое соответствие, что для любых пар точек M и N и соответственных им точек M_1 и N_1 (рис. 308, *б*) выполняется условие $\frac{MN}{M_1N_1} = k$. Число k — коэффициент подобия. Можно доказать, что отношение периметров подобных фигур равно k, а отношение их площадей — k^2.

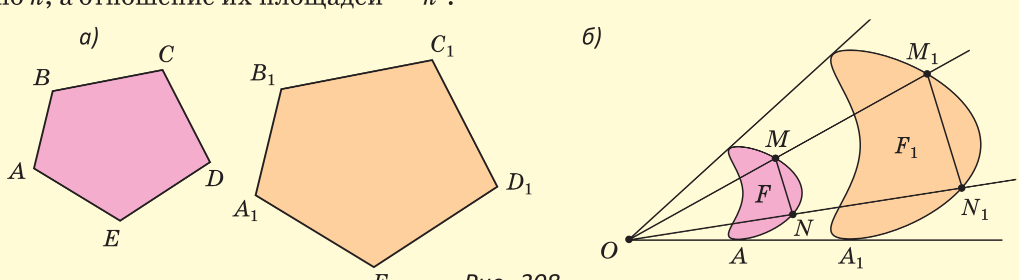


Рис. 308

Подобие также определяется и для пространственных фигур. Так, подобными являются любые два шара или любые два куба (рис. 309).

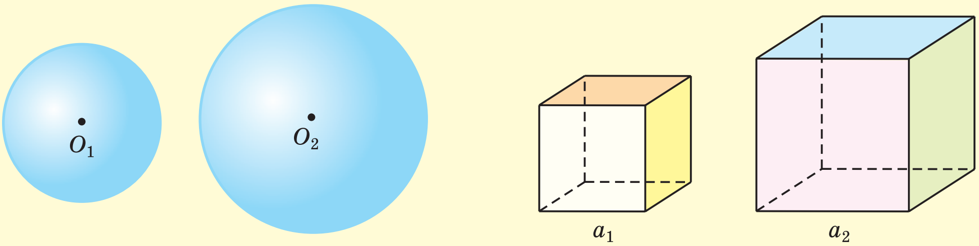


Рис. 309

Увеличив длину всех ребер любого многогранника в одно и то же число раз и сохранив величины всех углов, получим многогранник, подобный данному (рис. 310).

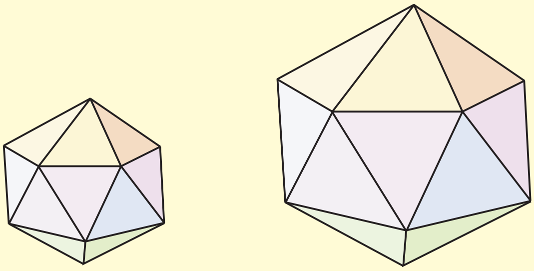


Рис. 310

Мы знаем, что прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. Аналогично, в пространстве плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от нее пирамиду, подобную данной (рис. 311, *а*, *б*). То есть отсеченная пирамида будет иметь такую же форму, но отличаться размерами. Если отбросить отсеченную пирамиду, то получится усеченная пирамида (рис. 311, *в*).

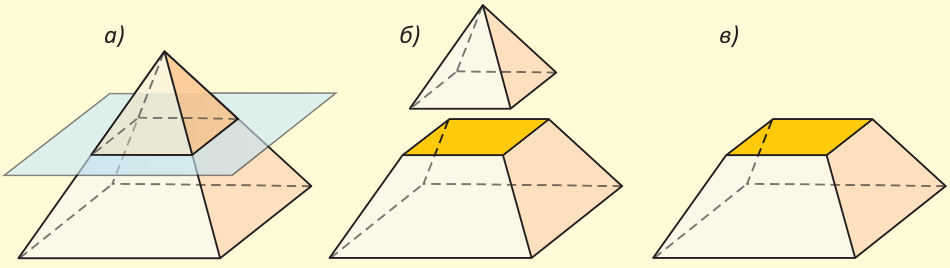


Рис. 311

Усеченная пирамида имеет два основания: верхнее и нижнее, которые являются подобными многоугольниками, а боковые грани являются трапециями.

В основании *правильной четырехугольной пирамиды* лежит квадрат, и все ее боковые ребра равны. Если от нее отсечь плоскостью, параллельной основанию, пирамиду, то получим *правильную усеченную пирамиду*. Основания ее — квадраты, а боковые грани — равные равнобедренные трапеции.

Задача. Найдите площадь полной поверхности правильной усеченной четырехугольной пирамиды (рис. 312), у которой стороны оснований равны 20 см и 10 см, а боковое ребро равно 13 см.

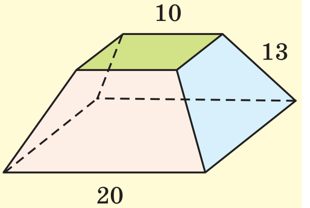


Рис. 312

Моделирование

На рисунке 313 изображен план участка под Не́свижским за́мком в масштабе 1 : 1500. При помощи линейки определите размеры внутреннего двора (отмечен коричневым цветом) и найдите его площадь, используя формулы площади прямоугольника и трапеции. Найдите периметр и площадь реального участка при помощи свойств подобных многоугольников.

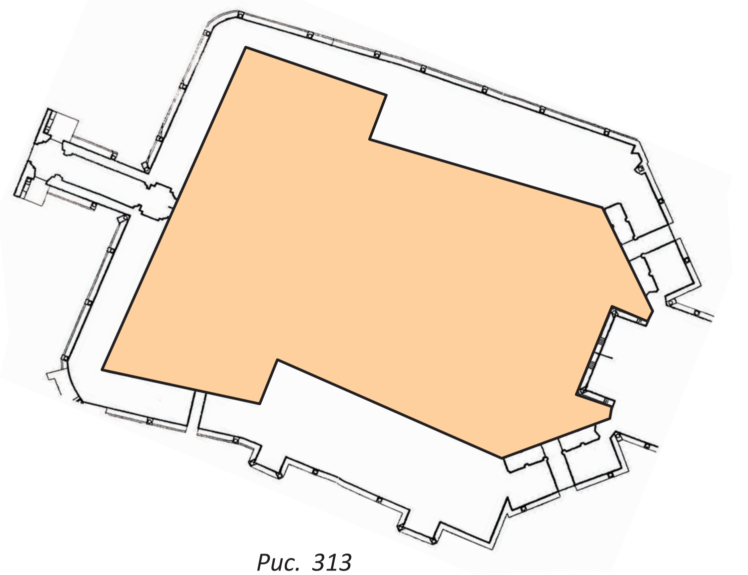


Рис. 313

Интересно знать. Несвижский замок — дворцово-парковый комплекс, находящийся в северо-восточной части города Несвижа в Минской области Беларуси. В XVI—XIX веках — центр резиденции ее владельцев из рода Радзивиллов. Архитектурный ансамбль Несвижского замка в настоящее время представляет собой историко-культурный музей-заповедник. С 2005 года внесен во Всемирное наследие ЮНЕСКО. Несвижский замок изображен на нашей 100-рублевой купюре.

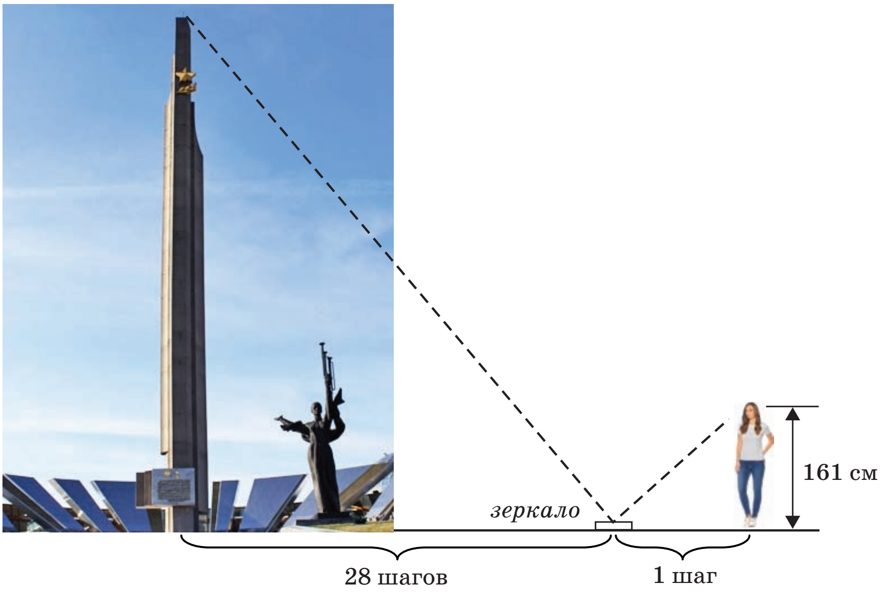
Реальная геометрия

Задача для девочек. Глядя на рисунок, составьте план, как при помощи зеркала, зная собственный рост, можно определить примерную высоту стелы «Минск — город герой» — главного символа столицы Беларуси.

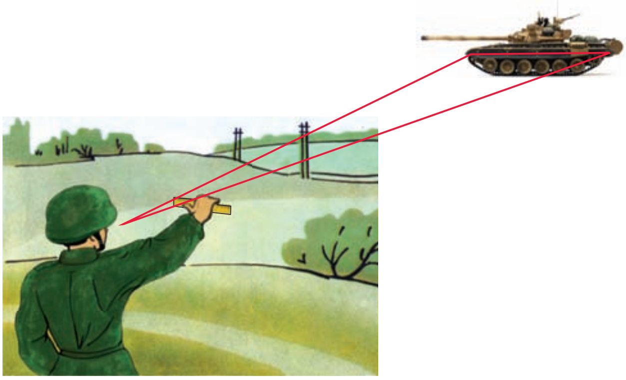
Найдите высоту стелы, используя данные на рисунке.

При решении задачи учтите закон отражения солнечного света, который звучит так: «Угол падения равен углу отражения».

Вместо зеркала можно использовать экран телефона или планшета.



Задача для мальчиков. В армии учат определять расстояние до цели при помощи вытянутой руки и линейки (патрона или даже пальца). Определите расстояние от наблюдателя до танка, если длина части линейки, перекрывающей танк, равна 5 см, длина руки от плеча до линейки — 50 см и известно, что длина данного танка равна 6,86 м.



§ 24*. Решение задач по теме «Подобие треугольников»

Задача 1. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CN, которые пересекаются в точке H (рис. 314). Доказать, что:*
а) $AH \cdot KH = CH \cdot NH$; б) $\triangle KBN \sim \triangle ABC$; в) $\angle NKB = \angle CAB$.

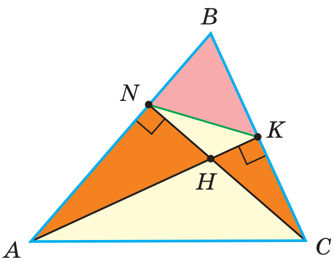


Рис. 314

Доказательство. а) $\triangle AHN \sim \triangle CHK$ по острому углу ($\angle AHN = \angle CHK$ как вертикальные). Отсюда $\frac{NH}{AH} = \frac{KH}{CH}$, $AH \cdot KH = CH \cdot NH$;

б) $\triangle ABK \sim \triangle CBN$ по острому углу ($\angle B$ — общий). Поэтому $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC}$. Тогда $\triangle KBN \sim \triangle ABC$ по двум сторонам и углу между ними;

в) так как $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{KN}{AC}$, то $\angle NKB = \angle CAB$.

Следствие.

Треугольник NKM (рис. 315) с вершинами в основаниях высот данного остроугольного треугольника ABC имеет углы, равные $180° - 2\angle A$, $180° - 2\angle B$, $180° - 2\angle C$. Его биссектрисы лежат на высотах треугольника ABC.

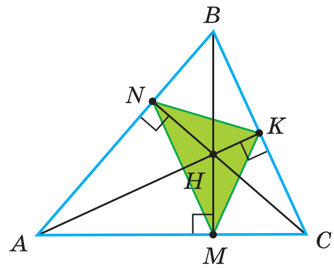


Рис. 315

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

344. На рисунке 316 $KH = 2$, $HC = 10$, $AH = 5$. Найдите HM.

345. На рисунке 317 $CH = 12$, $BH \cdot HK = 108$. Найдите CN.

346. На рисунке 318 $BP = 4$, $BC = 10$, $PF = 6$. Найдите AC.

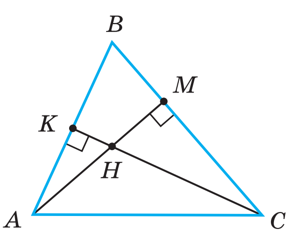


Рис. 316

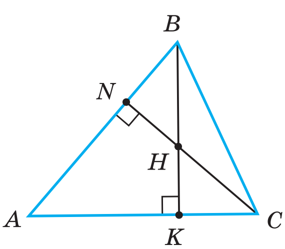


Рис. 317

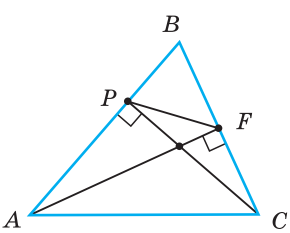


Рис. 318

Задача 2. *а) Доказать, что точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и середины оснований лежат на одной прямой. б) Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции и середины оснований лежат на одной прямой.*

Доказательство.

а) Пусть K — середина основания AD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, и прямая PK пересекает отрезок BC в точке M. Докажем, что M — середина BC (рис. 319, *а*).

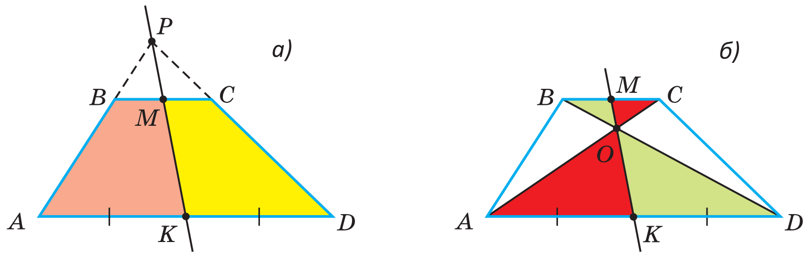


Рис. 319

Так как $\triangle BPM \sim \triangle APK$ ($BC \parallel AD$), то $\frac{BM}{AK} = \frac{PM}{PK}$. Аналогично, так как $\triangle CPM \sim \triangle DPK$, то $\frac{CM}{DK} = \frac{PM}{PK}$. Отсюда $\frac{BM}{AK} = \frac{CM}{DK}$ или $\frac{BM}{CM} = \frac{AK}{DK}$. Но $\frac{AK}{DK} = 1$, откуда $\frac{BM}{CM} = 1$, $BM = MC$, точка M — середина BC.

б) Пусть K — середина основания AD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей, и прямая KO пересекает отрезок BC в точке M. Докажем, что M — середина BC (рис. 319, *б*).

Так как $\triangle BOM \sim \triangle DOK$ (по двум углам), то $\frac{BM}{DK} = \frac{MO}{KO}$. Аналогично, так как $\triangle COM \sim \triangle AOK$, то $\frac{CM}{AK} = \frac{MO}{KO}$. Отсюда $\frac{BM}{DK} = \frac{CM}{AK}$ или $\frac{BM}{CM} = \frac{DK}{AK}$. Но $\frac{DK}{AK} = 1$, откуда $\frac{BM}{CM} = 1$, $BM = MC$, точка M — середина BC.

Следствия.

1. *Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.*

2. *В треугольнике медиана делит пополам любой отрезок с концами на сторонах треугольника, паралельный стороне, к которой проведена медиана.*

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

347. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 20$, $BC = 12$, $\angle A = 65°$, $\angle D = 25°$. Найдите длину отрезка, соединящего середины оснований.

348. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

Метод подобия

Если при решении геометрической задачи, которая может быть решена разными способами, используют подобия треугольников, то говорят, что задача решена *методом подобия*.

Задача 3. *Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), высоты BK и AM пересекаются в точке H* (рис. 320). *Найти высоту BK, если $AH = 5$, $HM = 3$.*

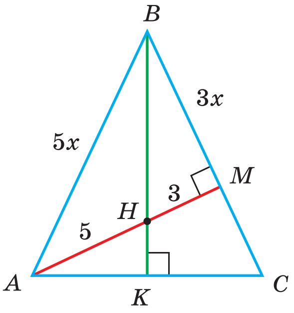


Рис. 320

Решение. Так как высота BK будет и биссектрисой, то BH — биссектриса треугольника ABM. По свойству биссектрисы треугольника получим: $\frac{AB}{BM} = \frac{AH}{HM} = \frac{5}{3}$. Пусть $AB = 5x$, $BM = 3x$.

По теореме Пифагора для треугольника AMB: $AB^2 = AM^2 + BM^2$, $(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2$, $x^2 = 4$, $x = 2$. Тогда $AB = 5 \cdot 2 = 10$, $BM = 3 \cdot 2 = 6$.

По теореме Пифагора для треугольника HMB:

$$BH = \sqrt{BM^2 + HM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Треугольники BKC и BMH подобны по острому углу ($\angle KBC$ — общий). Из подобия следует, что $\frac{BK}{BC} = \frac{BM}{BH}$, то есть $\frac{BK}{10} = \frac{6}{3\sqrt{5}}$. Отсюда $BK = \frac{10 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Замечание. Найти BK можно и не используя подобие. *Способ 2*: $MC = 4$, $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = 4\sqrt{5}$, $KC = 2\sqrt{5}$, $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = 4\sqrt{5}$. *Способ 3* (*метод площадей*): $MC = 4$, $AC = 4\sqrt{5}$, $2S_{ABC} = AC \cdot BK = BC \cdot AM$, $4\sqrt{5} \cdot BK = 10 \cdot 8$, $BK = 4\sqrt{5}$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

349. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 20$. Площадь треугольника равна 160. Высоты BK и AM пересекаются в точке H. Найдите площадь треугольника ABH.

350. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высоты BE и AK пересекаются в точке M, $BM = 4$, $ME = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

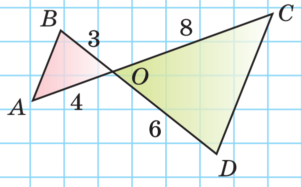
ЗАПОМИНАЕМ

1. У подобных треугольников соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны.
2. Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.
3. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.
4. Признаки подобия треугольников:
   1) по двум углам;
   2) по двум сторонам и углу между ними;
   3) по трем сторонам.
5. Прямоугольные треугольники подобны по острому углу.
6. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.
7. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

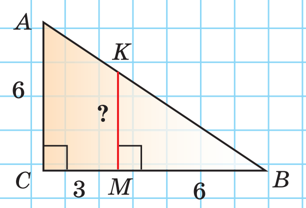
Тест 1

По данным на рисунке докажите, что $AB \parallel CD$.



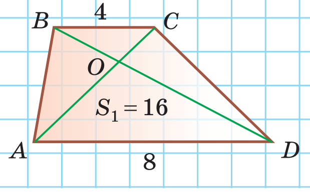
Тест 2

По данным на рисунке найдите длину отрезка KM.



Тест 3

$S_{AOD} = 16$ см^2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

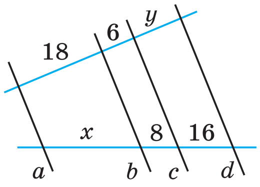


Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия. 8 кл.» можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, раздел «Математика», курс «Математика. 8 кл.».

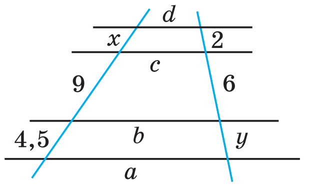
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 3

1. Найдите значение $x + y$, если $a \parallel b \parallel c \parallel d$.

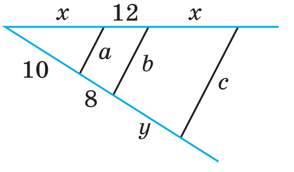
а)



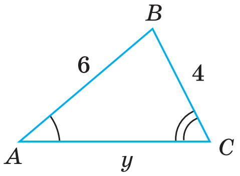
б)

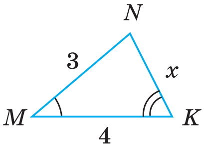


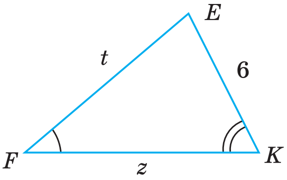
в)



2. $\triangle ABC \sim \triangle MNK$, $\triangle MNK \sim \triangle FEK$. Найдите:
а) x и y; б) t и z; в) $P_{ABC} : P_{FEK}$.

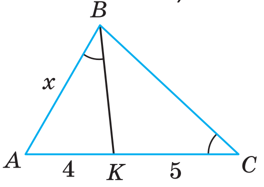




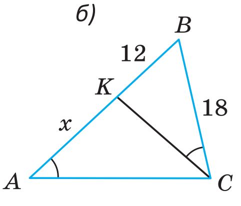


3. Найдите длину отрезка x.

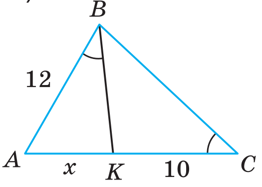
а)



б)

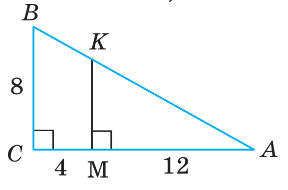


в)

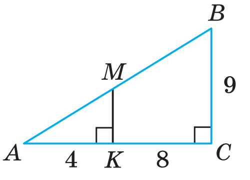


4. Найдите S_{AMK}.

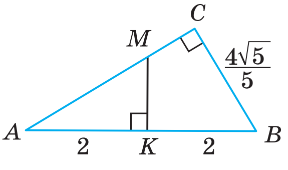
а)



б)

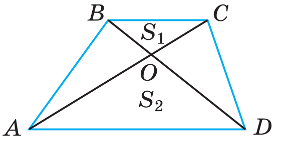


в)

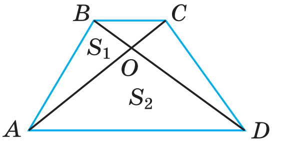


5. Найдите отношение $BC : AD$, если:
а) $S_1 = 4$, $S_2 = 25$; б) $S_1 = 6$, $S_2 = 18$; в) $S_1 = 8$, $S_2 = 16$.

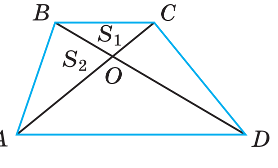
а)



б)



в)

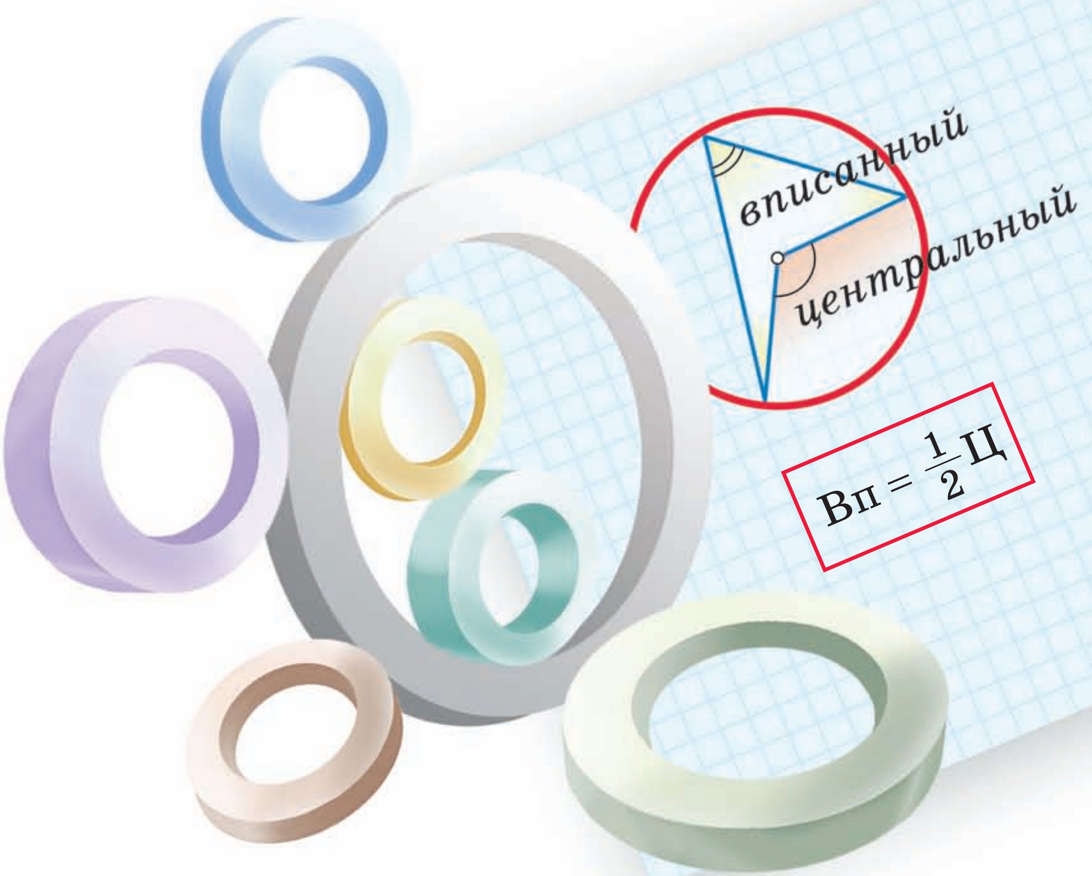


Глава IV

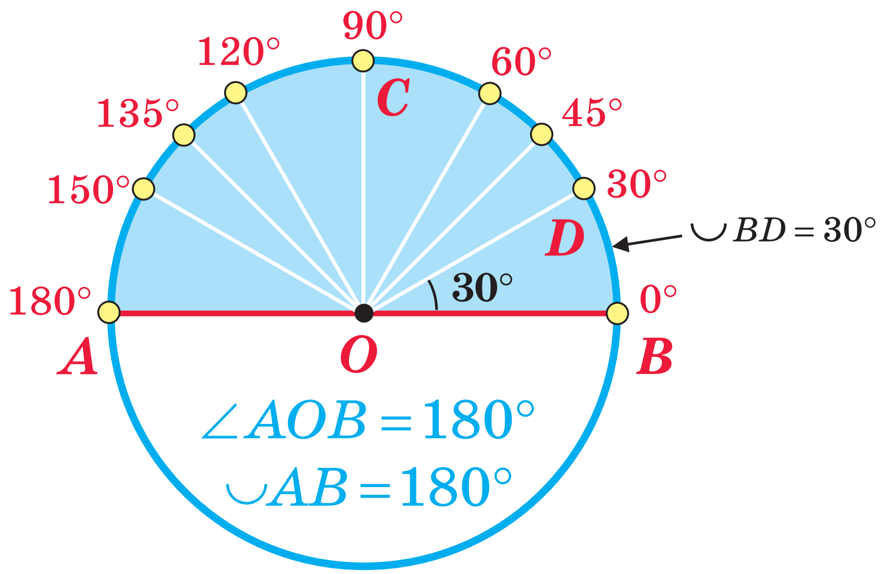
Окружность

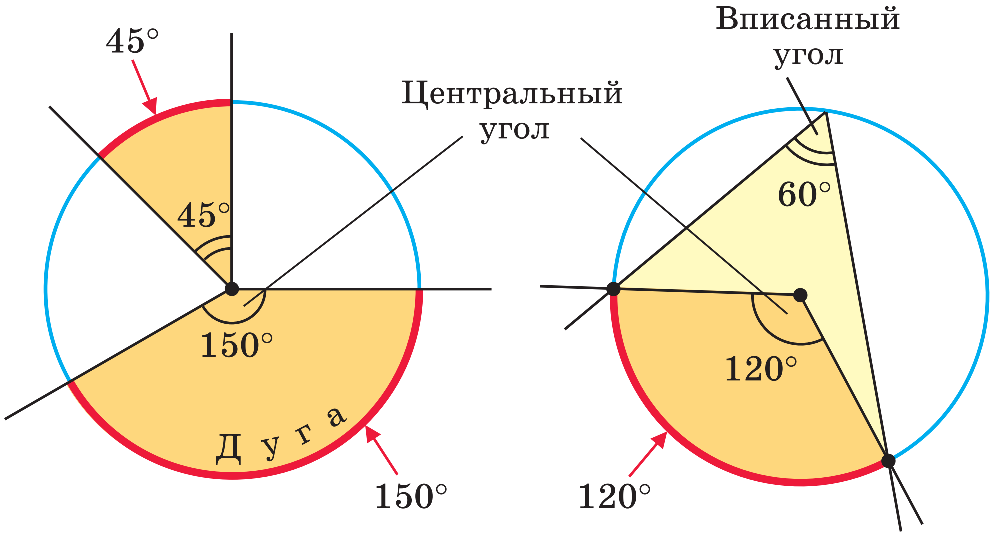
В этой главе вы узнаете:

- Какая прямая называется касательной к окружности
- Какой угол называют вписанным в окружность
- Свойство пересекающихся хорд окружности



Углы в окружности





Вписанный $= \frac{1}{2}$ **Центрального**

§ 25. Касательная к окружности

Окружность — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от ее центра, которое равно радиусу окружности. Если расстояние от центра до точки больше радиуса окружности, то говорят, что точка находится *вне* окружности, а если меньше радиуса, то — *внутри* окружности. Все точки плоскости, находящиеся от центра окружности на расстоянии, меньшем или равном радиусу, образуют *круг*.

На рисунке 321 точки A, E, D принадлежат окружности с радиусом R и центром O, точка B находится внутри окружности (внутри круга), точка C — вне окружности (вне круга), $OA = OE = OD = R$, $OB < R$, $OC > R$.

Можно установить, что прямая и окружность могут иметь только три различных взаимных положения (рис. 322): прямая и окружность не имеют общих точек (прямая a), имеют одну общую точку (прямая b), имеют две общие точки (прямая c).

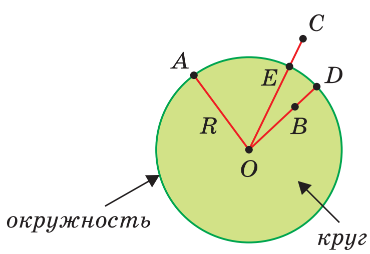


Рис. 321

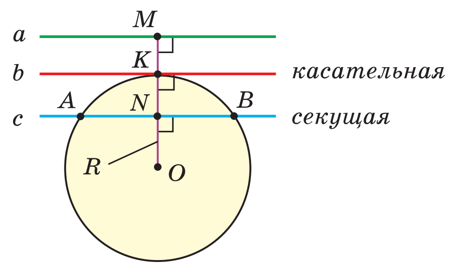


Рис. 322

В первом случае расстояние от центра до прямой больше радиуса ($OM > R$), во втором — равно радиусу ($OK = R$), в третьем — меньше радиуса ($ON < R$). Говорят, что прямая b касается окружности в точке K, где K — точка касания прямой и окружности, а прямая c пересекает окружность в точках A и B.

Определение. Прямая, проходящая через две точки окружности, называется **секущей** к окружности.

Определение. Прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности.

Теорема (признак касательной).
Если прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.

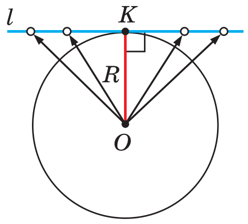


Рис. 323

Доказательство. Пусть OK — радиус окружности, прямая l проходит через точку K и перпендикулярна OK (рис. 323). Нужно доказать, что l — касательная.

Так как наклонная длиннее перпендикуляра, то расстояние от точки O до всех остальных точек прямой l больше радиуса OK. Поэтому все точки прямой, кроме точки K, лежат вне окружности. Следовательно, прямая l и окружность имеют единственную общую точку K, и прямая l по определению является касательной. Теорема доказана.

Доказанная теорема гарантирует, что касательная к окружности существует в каждой ее точке, и дает способ построения касательной.

Теорема (свойство касательной).
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

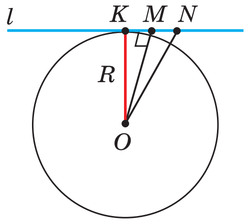


Рис. 324

Доказательство. Пусть l — касательная к окружности с центром в точке O, где K — точка касания, OK — радиус (рис. 324). Нужно доказать, что $OK \perp l$.

Пусть радиус OK не перпендикулярен l, а перпендикуляром является отрезок OM. На прямой l отложим $MN = KM$. Получим равные прямоугольные треугольники OMK и OMN (по двум катетам), откуда $ON = OK$. Так как отрезок ON равен радиусу, то точка N принадлежит окружности. Тогда прямая l и окружность имеют, по крайней мере, две общие точки, что противоречит определению касательной. Следовательно, $OK \perp l$. Теорема доказана.

Заметим, что из точки вне окружности к одной окружности можно провести ровно две касательные, которые обладают следующим свойством.

Теорема (о касательных, проведенных из одной точки).
Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности (соединяющих данную точку и точку касания), равны между собой.

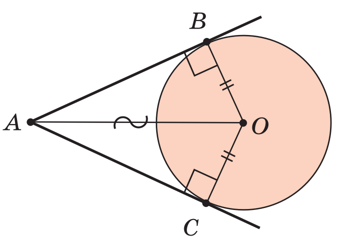


Рис. 325

Доказательство. Пусть AB и AC — касательные к окружности, где B и C — точки касания. Нужно доказать, что $AB = AC$ (рис. 325). Проведем отрезок AO и радиусы OB и OC. Так как радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $OB \perp AB$, $OC \perp AC$. Прямоугольные треугольники ABO и ACO равны по катету ($OB = OC$ как радиусы) и гипотенузе (гипотенуза AO — общая). Из равенства треугольников следует, что $AB = AC$. Теорема доказана.

Говорят, что окружность касается луча (отрезка), если она касается прямой, содержащей этот луч (отрезок) в точке, принадлежащей лучу (отрезку).

Определение. Если окружность касается сторон угла, то она называется **вписанной в угол.**

Теорема (об окружности, вписанной в угол).
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла.

Докажите эту теорему самостоятельно, используя рисунок 325.

Из теоремы вытекает, что центры всех окружностей, вписанных в угол, лежат на биссектрисе угла (рис. 326).

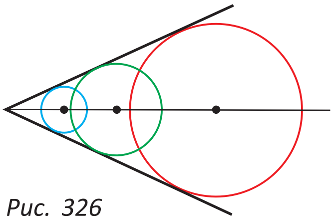
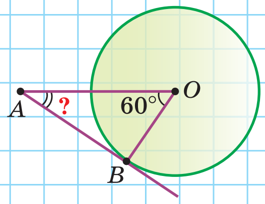


Рис. 326

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

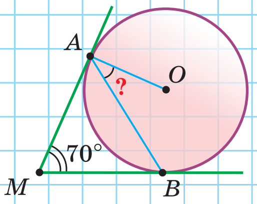
Тест 1

Найдите угол A, если AB — касательная.



Тест 2

A и B — точки касания.
Найдите $\angle BAO$.



Задания к § 25

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

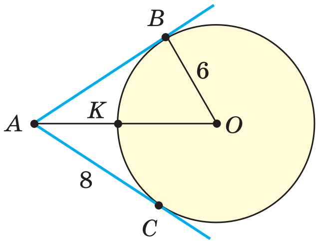


Рис. 327

Задача 1. *Из точки A к окружности с центром O проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания, OB = 6 см, AC = 8 см. Найти длину отрезка AK* (рис. 327).

Решение. Воспользуемся тем, что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, и тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между

собой. Тогда $AB = AC = 8$ см, $OB \perp AB$ и $\triangle ABO$ — прямоугольный. По теореме Пифагора $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см). Так как $OK = OB = 6$ см как радиусы одной окружности, то $AK = AO - OK = 10 - 6 = 4$ (см).
Ответ: 4 см.

Задача 2. *В угол A вписана окружность, прямая MN — касательная* (рис. 328). *Найти периметр треугольника AMN, если $AB = 12$ см.*

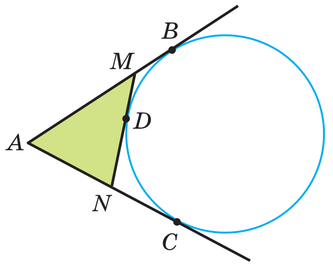


Рис. 328

Решение. Пусть B, C и D — точки касания. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $AC = AB = 12$ см, $MB = MD$ и $NC = ND$.
Тогда $AM + MD = AM + MB = AB = 12$ см,
$AN + ND = AN + NC = AC = 12$ см,
$P_{AMN} = (AM + MD) + (AN + ND) = AB + AC = 12 + 12 = 24$ (см).
Ответ: 24 см.

Замечание. Полезно запомнить: $P_{AMN} = 2AB$.

Задача 3. *Построить при помощи циркуля и линейки касательную к данной окружности, проведенную через точку, взятую вне окружности.*

Решение. Пусть дана окружность с заданным центром O и точка M вне окружности (рис. 329, *а*).

Построение.

1-й *шаг*. Проводим отрезок MO и на нем как на диаметре строим окружность (рис. 329, *б*). Для чего отрезок MO делим пополам, находим его середину O_1 и радиусом O_1M строим окружность.

2-й *шаг*. Отмечаем точку K пересечения построенной окружности и данной. Проводим прямую MK, которая и будет искомой касательной к данной окружности (рис. 329, *в*).

Доказательство. Угол MKO — прямой, так как его вершина лежит на окружности и он опирается на диаметр (доказано в 7-м классе). Поэтому $OK \perp MK$, и тогда по признаку касательной прямая MK является касательной к окружности.

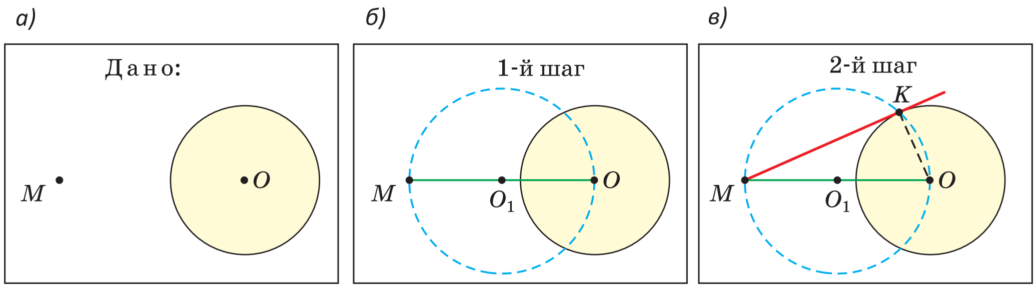


Рис. 329

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

351. Изобразите окружность с центром в точке O и радиусом 3 см. Вне окружности отметьте точку A, где $OA = 5$ см. Проведите из точки A касательную к данной окружности. Обозначьте точку касания буквой B. Объясните, почему $\triangle AOB$ — прямоугольный. Проведите другую касательную AC, где C — точка касания. Объясните, откуда следует, что $AB = AC$. Найдите при помощи теоремы Пифагора длину отрезка AB. Проверьте полученный результат измерением.

352. На рисунках 330, *а*)—*в*) из точки A проведены касательные к окружности с центром в точке O. Найдите величину угла, отмеченного знаком вопроса.

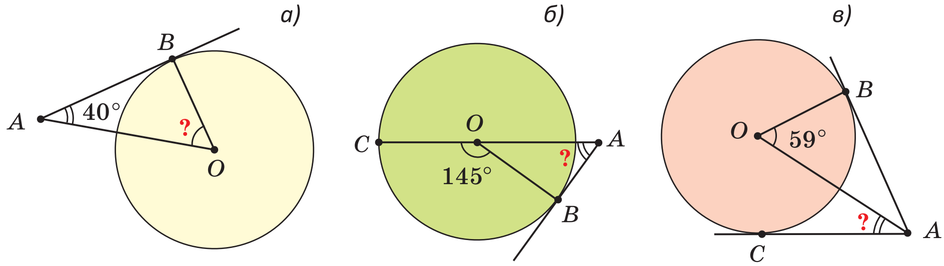


Рис. 330

353. На рисунках 331, *а*)—*в*) точка O — центр окружности, прямые MA и MB — касательные, A и B — точки касания. Найдите:

а) величину угла α (рис. 331, *а*);
б) сумму углов $\alpha + \beta$, если $MK = OA = 5$ см (рис. 331, *б*);
в) длину отрезка BM, если $OA = 6$ см, $KM = 4$ см (рис. 331, *в*).

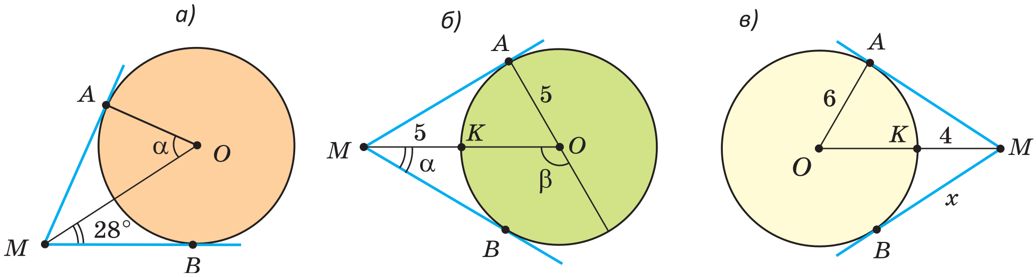


Рис. 331

354. На рисунках 332, *а*), *б*) AB — касательная к окружности, B — точка касания, O — центр окружности. Найдите:

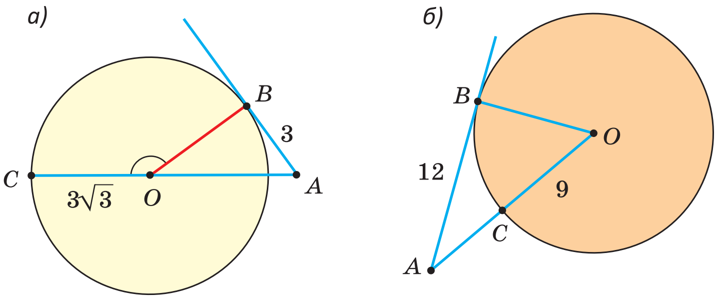


Рис. 332

а) $\angle BOC$, если $OC = 3\sqrt{3}$ см, $AB = 3$ см (рис. 332, *а*);
б) AC, если $AB = 12$ см, $OC = 9$ см (рис. 332, *б*).

355. К окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AC, проходящая через центр O окружности, $\angle A = 60°$, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Найдите диаметр окружности (рис. 333).

356. Окружность с центром в точке O касается сторон AB и AC треугольника ABC, $\angle B = 56°$, $\angle C = 74°$ (рис. 334). Найдите $\angle ALB$.

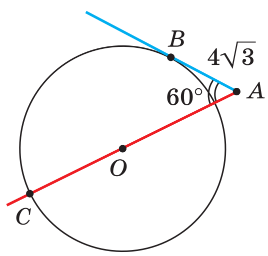


Рис. 333

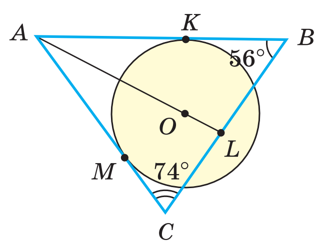


Рис. 334

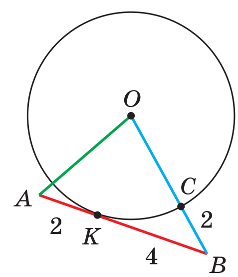


Рис. 335

357. Окружность с центром в точке O касается стороны AB треугольника AOB в точке K и пересекает сторону OB в точке C (рис. 335); $BC = 2$ см, $AK = 2$ см, $KB = 4$ см. Найдите:

а) OB; б) S_{AOB}.

358. Окружность с центром O вписана в угол BAC, B и C — точки касания. Отрезки AO и BC пересекаются в точке K, $OK = 2$ см, $OB = 4$ см. Найдите длину отрезка AK.

359. Точка M лежит вне окружности с центром в точке O. Точка K принадлежит окружности. Докажите, что если $\angle KMO + \angle MOK = 90°$, то прямая MK — касательная к окружности.

360. Из точки A к окружности с центром O проведены секущая и касательная AB (где B — точка касания). Расстояние от центра окружности до секущей равно 6 см, длина отрезка секущей внутри окружности равна 16 см, $AO = 26$ см. Найдите длину отрезка AB.

361. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Окружность касается двух меньших сторон треугольника, а ее центр лежит на большей стороне. Найдите длины отрезков, на которые центр окружности делит большую сторону.

362*. На координатной плоскости задана окружность с центром $P(3;\ 2)$ и радиусом, равным 2. Из точки $A(-2;\ 0)$ к окружности проведена касательная, отличная от оси абсцисс, которая касается окружности в точке B. Найдите площадь треугольника APB.

363*. Постройте при помощи циркуля и линейки окружность заданного радиуса m, которая касается данной прямой l в отмеченной на ней точке K.

364*. При помощи циркуля и линейки впишите в данный угол A окружность данного радиуса R.

365*. Найдите геометрическое место центров окружностей, если все окружности проходят через две данные точки A и B.

§ 26. Взаимное расположение окружностей

Если две окружности имеют только одну общую точку, то они называются *касающимися* друг друга в этой точке. А если они имеют две общие точки, то — *пересекающимися*. Прямая, которая проходит через центры двух окружностей, называется *линией центров* этих окружностей.

Справедливо свойство: **«Точка касания двух касающихся окружностей принадлежит линии центров этих окружностей».**

Действительно. Пусть две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами R и r касаются в точке A, которая является их единственной общей точкой.

Предположим, что точка A не принадлежит прямой O_1O_2 (рис. 336). Построим симметричную ей точку A_1 относительно прямой O_1O_2. Так как O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1, то $O_1A = O_1A_1 = R$, $O_2A = O_2A_1 = r$. Значит, точка A_1 принадлежит каждой из данных окружностей, то есть является их второй общей точкой. Но по условию общая точка одна. Следовательно, точка A принадлежит линии центров.

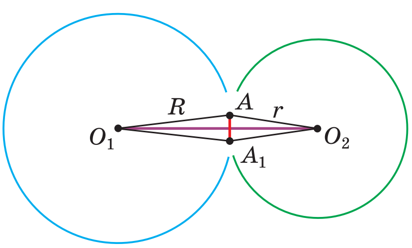


Рис. 336

Две касающиеся окружности имеют *общую касательную*, которая проходит через их общую точку (рис. 337). Пусть K — точка касания окружностей с центрами O_1 и O_2, она

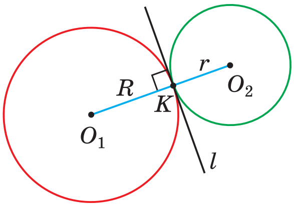


Рис. 337

принадлежит прямой O_1O_2. Проведем через точку K прямую $l \perp O_1O_2$. По признаку касательной прямая l является касательной к каждой из окружностей, т. е. l — общая касательная двух окружностей. Касающиеся окружности могут располагаться как по разные стороны от их общей касательной, так и по одну сторону от нее (см. рис. 338, *г*). В первом случае говорят, что они касаются *внешним образом*, во втором, — что они касаются *внутренним образом*.

Для двух окружностей с радиусами R и r ($R > r$) и расстоянием $d = O_1O_2$ между их центрами можно выделить шесть случаев их различного взаимного расположения на плоскости (рис. 338, *а*)—*е*)):

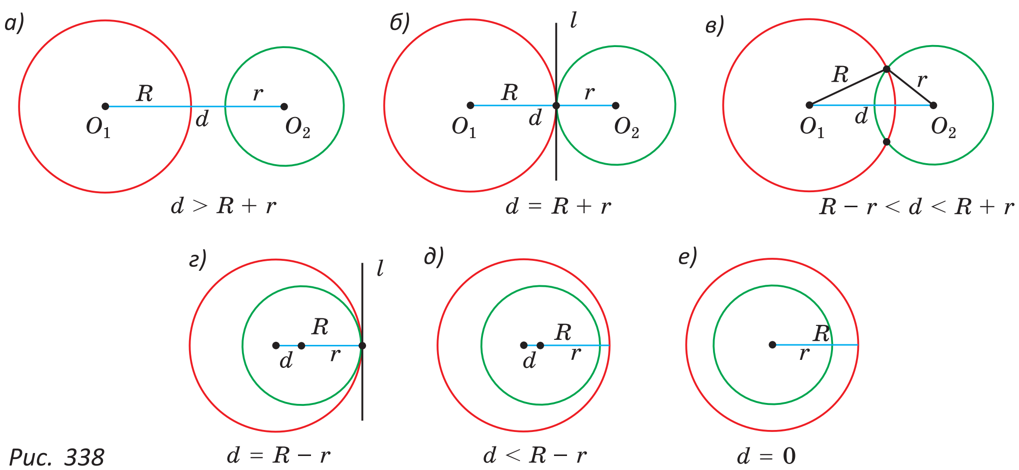


Рис. 338

а) окружности расположены внешним образом и не касаются: $d > R + r$;

б) окружности касаются внешним образом: $d = R + r$;

в) окружности пересекаются (в 2 точках): $R - r < d < R + r$ (неравенство треугольника);

г) окружности касаются внутренним образом: $d = R - r$;

д) окружности расположены внутренним образом, не касаются, и их центры не совпадают: $d < R - r$;

е) окружности расположены внутренним образом, их центры совпадают (*концентрические* окружности): $d = 0$.

Из сказанного следует, что из трех отрезков можно построить треугольник, если каждый из них меньше суммы двух оставшихся.

А теперь выполните **Тест 1.**

Тест 1

Радиусы двух окружностей равны 12 см и 16 см. Расстояние между их центрами 24 см. Сколько общих точек имеют эти окружности:
а) одну; б) две; в) три; г) ни одной?

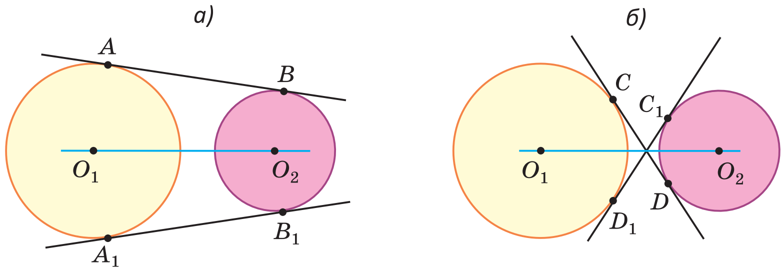


Рис. 339

Если две окружности расположены внешним образом или пересекаются, то можно построить их общую касательную, такую, что окружности будут лежать по одну сторону от этой касательной. Такая касательная называется *общей внешней касательной* по отношению к данным окружностям. На рисунке 339, *а*) это касательные AB и A_1B_1.

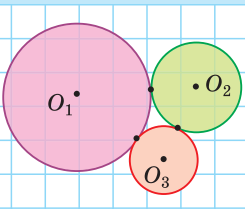
Для окружностей, расположенных внешним образом, можно построить такую общую касательную, что окружности будут лежать по разные стороны от нее. Такая касательная называется *общей внутренней касательной* по отношению к двум данным окружностям. На рисунке 339, *б*) это касательные CD и C_1D_1.

Существуют две внешние и две внутренние касательные к двум указанным окружностям. Эти касательные симметричны относительно линии центров O_1O_2. Отрезки этих касательных, заключенные между точками касания, равны между собой ($AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$), а точки пересечения двух внешних касательных (в случае неравных окружностей) и двух внутренних касательных лежат на линии центров.

А теперь выполните **Тест 2.**

Тест 2

Три окружности с диаметрами 6 см, 8 см и 10 см попарно касаются друг друга. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$, где O_1, O_2, O_3 — центры окружностей.



Задания к § 26

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии их центров и делится ею пополам.*

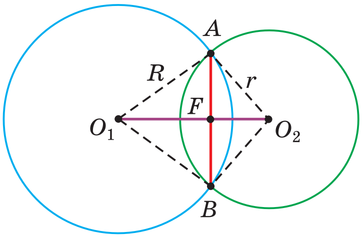


Рис. 340

Доказательство. Пусть две окружности с радиусами R и r соответственно с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 340). Так как точка O_1 равноудалена от точек A и B ($O_1A = O_1B = R$), то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Точка O_2 также равноудалена от концов отрезка AB ($O_2A = O_2B = r$), следовательно, она также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Поскольку через две точки проходит единственная прямая, то O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AB, то есть $O_1O_2 \perp AB$, $AF = FB$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. *Две окружности с радиусами R и r касаются внешним образом. Найти длину отрезка общей внешней касательной этих окружностей, заключенного между точками касания.*

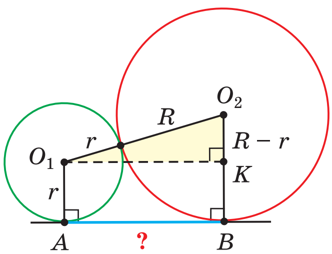


Рис. 341

Решение. Пусть AB — общая внешняя касательная двух касающихся внешним образом окружностей с центрами O_1 и O_2 (рис. 341), AB — искомый отрезок. Проведем радиусы $O_1A = r$ и $O_2B = R$ в точки касания. По свойству касательной $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$. Из точки O_1 проведем перпендикуляр O_1K к прямой O_2B. Четырехугольник AO_1KB — прямоугольник, так как все его углы прямые. Отсюда $O_1K = AB$, $BK = AO_1 = r$. В прямоугольном $\triangle O_1O_2K$ $O_2K = O_2B - BK = R - r$, $O_1O_2 = R + r$. По теореме Пифагора: $O_1K = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2K^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$. Значит, $AB = 2\sqrt{Rr}$.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$.

Задача 3. *В угол вписаны две касающиеся внешним образом окружности. Радиус большей из них равен* 6, *расстояние от ее центра до вершины угла равно* 30. *Найти радиус меньшей окружности* (рис. 342).

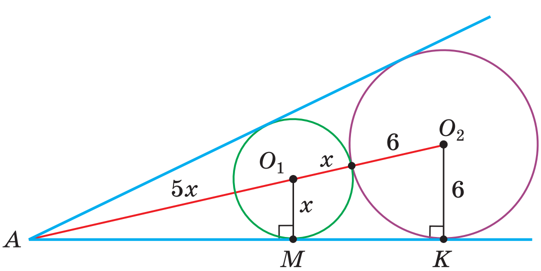


Рис. 342

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, вписанных в угол A, M и K — точки касания окружностей со стороной угла, O_1M, O_2K — радиусы. Тогда $O_2K \perp AK$, $O_1M \perp AK$, $O_2K = 6$, $O_1M = x$, $AO_2 = 30$. Из подобия прямоугольных треугольников AO_1M и AO_2K (по общему острому углу O_2AK)

следует, что $\frac{O_1M}{AO_1} = \frac{O_2K}{AO_2} = \frac{6}{30}$, то есть $\frac{x}{AO_1} = \frac{1}{5}$. Отсюда $AO_1 = 5x$, $O_1O_2 = x + 6$, $AO_2 = AO_1 + O_1O_2$, $5x + (x + 6) = 30$, $6x = 24$, $x = 4$. Искомый радиус $O_1M = 4$.

Ответ: 4.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

366. Даны две окружности с радиусами R и r и расстоянием d между их центрами. Определите, как расположены окружности относительно друг друга, если:

а) $R = 12$ см, $r = 5$ см, $d = 10$ см;
б) $R = 36$ см, $r = 12$ см, $d = 48$ см;
в) $R = 45$ см, $r = 15$ см, $d = 70$ см.

367. Две окружности с диаметрами 16 м и 6 м касаются внешним образом. Найдите расстояние между центрами окружностей.

368. Две окружности касаются внутренним образом. Расстояние между центрами окружностей 224 см. Радиус меньшей окружности равен 56 см. Найдите радиус большей окружности.

369. Три окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами, равными 2 см, 4 см и 6 см, попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника $O_1O_2O_3$.

370. Три равных окружности с центрами в точках A, B и C попарно касаются друг друга. Периметр треугольника ABC равен 24 см. Найдите радиус этих окружностей.

371. Даны две равные пересекающиеся окружности с радиусом 5 м. Длина их общей хорды AB равна 8 м. Найдите расстояние между центрами окружностей.

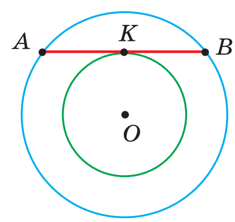


Рис. 343

372. Диаметры двух концентрических окружностей равны 6 м и 10 м. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности (рис. 343). Найдите длину хорды AB.

373. Даны две касающиеся внешним образом окружности (рис. 344, с. 166). Радиус меньшей окружности равен 4 см. Длина отрезка AB внешней касательной, где A и B — точки касания, равна 12 см. Найдите радиус большей окружности.

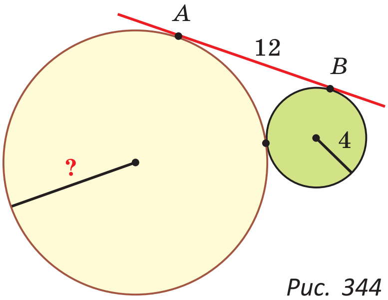


Рис. 344

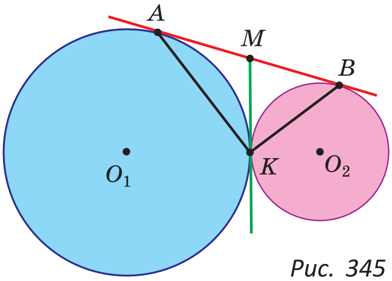


Рис. 345

374. Две окружности касаются внешним образом в точке K (рис. 345). Прямая AB — их общая внешняя касательная, где A и B — точки касания. Прямая KM — общая внутренняя касательная этих окружностей. Докажите, что:

а) $KM = \frac{1}{2}AB$; б) $\angle AKB = 90°$.

375. Прямая AB — общая внешняя касательная двух окружностей с центрами O_1 и O_2, которые касаются внешним образом (рис. 346), A и B — точки касания прямой AB и окружностей, точка F — середина отрезка AB, $\angle O_1O_2F = 37°$. Найдите $\angle FO_1O_2$.

376*. Даны две окружности с радиусами 9 см и 4 см. Третья окружность касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной a. Найдите радиус этой окружности. Рассмотрите все варианты.

377*. Прямая MN — общая внутренняя касательная двух окружностей, радиусы которых равны 3 см и 5 см, M и N — точки касания (рис. 347). Расстояние между центрами окружностей равно 10 см. Найдите длину отрезка MN.

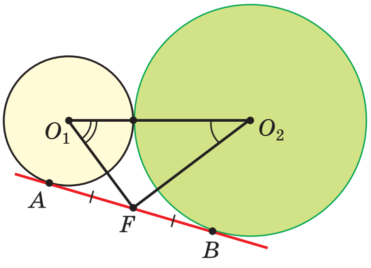


Рис. 346

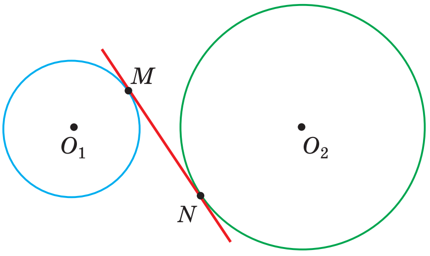


Рис. 347

378*. Даны радиусы R и r двух окружностей. При помощи циркуля и линейки постройте:

а) две окружности с радиусами R и r, касающиеся друг друга внешним образом;

б) две окружности с радиусами R и r, касающиеся друг друга внутренним образом.

379*. Даны две окружности, расположенные внешним образом ($d > R + r$). При помощи циркуля и линейки постройте:

а) их общую внешнюю касательную;
б) их общую внутреннюю касательную.

Гимнастика ума

Диаметр большой окружности с центром в точке O равен 24 см (рис. 348). Вторая окружность с центром в точке A касается большой окружности внутренним образом. Третья окружность с центром в точке B касается первой окружности внутренним, а второй — внешним образом. Найдите периметр треугольника ABO.

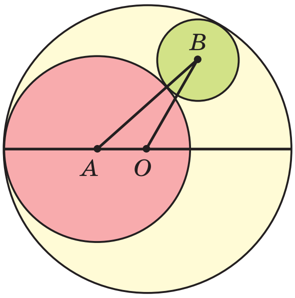


Рис. 348

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение касательной к окружности.
2. Свойство касательной и признак касательной.
3. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Свойство окружности, вписанной в угол.
5. Все случаи взаимного расположения двух окружностей.

Умеем

1. Доказывать признак касательной.
2. Доказывать теорему о свойстве касательной.
3. Доказывать теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Строить при помощи циркуля и линейки касательную к данной окружности, проходящую через точку, данную вне окружности.

§ 27. Центральный и вписанный углы

Определение. **Центральным углом** окружности называется угол, вершина которого находится в центре окружности.

Дуга окружности, заключенная внутри центрального угла, и этот центральный угол называются *соответствующими друг другу*.

Определение. **Градусной мерой** дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

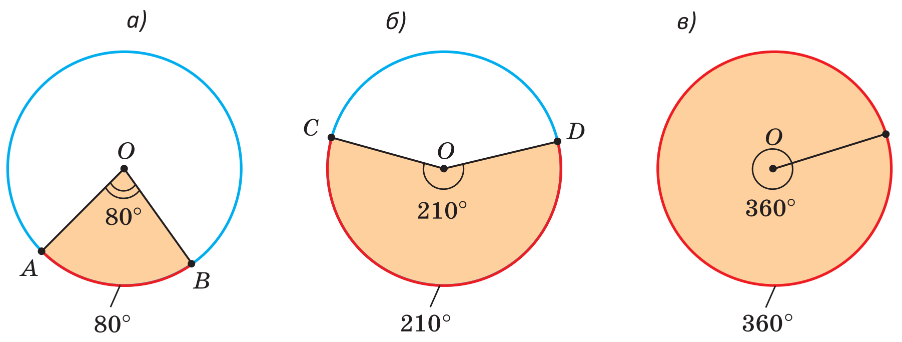


Рис. 349

На рисунке 349, *а*) изображен центральный угол AOB, равный 80°. Ему соответствует дуга AB, заключенная внутри угла. Поэтому $\smile AB = 80°$. На рисунке 349, *б*) центральный угол COD равен 210°, соответствующая ему дуга CD также равна 210°. Полному центральному углу (рис. 349, *в*) соответствует вся окружность. Поэтому окружность содержит 360°. Центральный угол и соответствующая ему дуга могут изменяться от 0° до 360°.

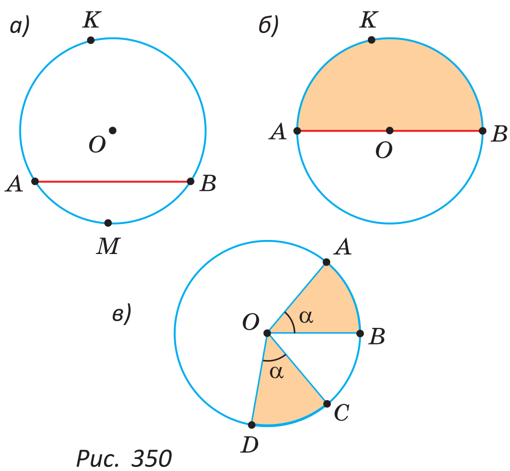


Рис. 350

На рисунке 350, *а*) дуги AKB и AMB являются *дополнительными* (дополняют друг друга до окружности), поэтому сумма их градусных мер 360°. Говорят, что хорда AB *стягивает* дугу AMB и дугу AKB.

На рисунке 350, *б*) диаметр AB стягивает полуокружность AKB, которая равна 180°, т. к. ей соответствует центральный $\angle AOB$, который является развернутым.

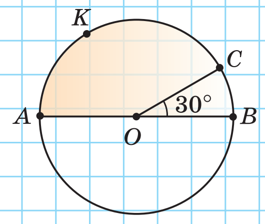
Дуги одной окружности или равных окружностей называются равными, если равны их градусные меры. Большей считается та дуга, которая имеет бо́льшую градусную меру. Если $\angle AOB = \alpha$ и $\angle DOC = \alpha$ (рис. 350, *в*), то $\smile AB = \smile DC$.

Отметим, что окружность и любая ее дуга характеризуются и длиной, и градусной мерой. Говорят «дуга окружности равна 6 см», также говорят «дуга окружности равна 30°». Длина дуги прямо пропорциональна ее градусной мере. Дуги одной окружности, имеющие равные градусные меры, равны по длине и наоборот.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Если AB — диаметр, O — центр окружности, то:
а) $\smile CB = ...°$
б) $\smile AKC = ...°$
в) $\smile ABC = ...°$



Определение. **Вписанным углом** называется угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность.

В определении вписанного угла имеется в виду угол, меньший 180°.

На рисунке 351, *а*) $\angle MKN$ — вписанный. Ему соответствует дуга MN, заключенная внутри этого вписанного угла, и центральный $\angle MON$. Говорят, что $\angle MKN$ и $\angle MON$ *опираются* на дугу MN.

На рисунке 351, *б*) $\angle PLE$ — вписанный. Ему соответствует дуга PGE и содержащий эту дугу центральный угол POE, который больше 180°.

Любой вписанный угол в 2 раза меньше соответствующего центрального угла и дуги, на которую он опирается. Если $\angle MKN = 40°$, то $\angle MON = \smile MN = 80°$, если $\angle PLE = 120°$, то $\angle POE = \smile PGE = 240°$.

То есть $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile AC$ (рис. 351, *в*). Докажем это утверждение.

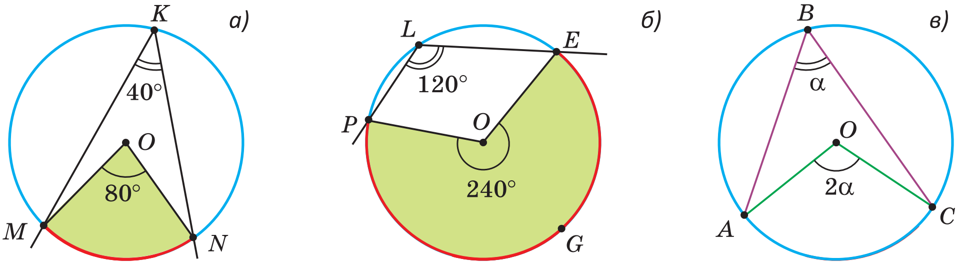


Рис. 351

Теорема (о вписанном угле).
Вписанный угол равен половине соответствующего ему центрального угла, а также половине дуги, на которую он опирается.

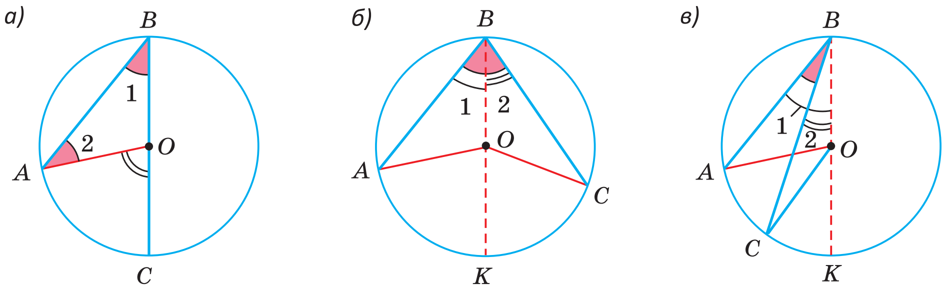


Рис. 352

Доказательство. Рассмотрим три случая.

а) Пусть центр O окружности лежит на стороне BC вписанного угла ABC (рис. 352, *а*). Тогда BC — диаметр, $OA = OB$ как радиусы, $\triangle AOB$ — равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$ как углы при его основании; $\angle AOC$ — внешний для $\triangle AOB$. По свойству внешнего угла треугольника $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle ABC$, откуда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile AC$.

б) Пусть центр окружности лежит внутри вписанного угла ABC (рис. 352, *б*). Проведем диаметр BK. По доказанному в п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile KC$, тогда $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\smile AK + \smile KC) = \frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

в) Пусть центр окружности лежит вне вписанного угла ABC (рис. 352, *в*). Проведем диаметр BK. По доказанному в п. а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AK$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile CK$, тогда $\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}(\smile AK - \smile CK) = \frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

Теорема доказана.

Следствия.

1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.*

2. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой. И обратно, если вписанный угол — прямой, то он опирается на диаметр.*

На рисунке 353, *а*) $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = \angle AB_4C$, поскольку все эти вписанные углы опираются на общую дугу AC, а, следовательно, их градусные меры равны половине градусной меры дуги AC.

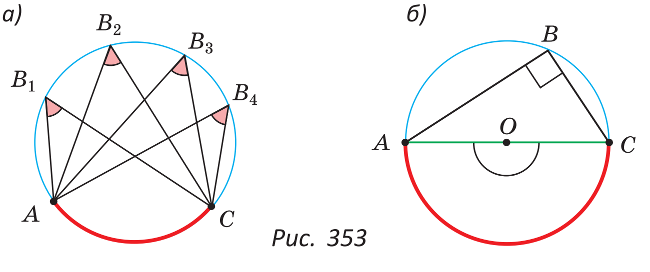


Рис. 353

На рисунке 353, *б*) вписанный угол ABC опирается на диаметр AC. Так как соответствующий углу ABC центральный угол AOC — развернутый, а соответствующая дуга AC является полуокружностью, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.

А теперь выполните **Тест 2**.

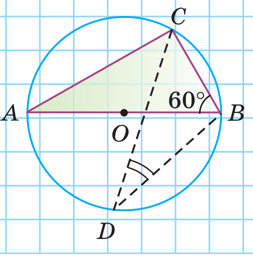
Тест 2

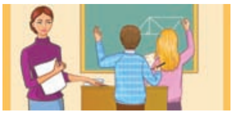
Если AB — диаметр, $\angle ABC = 60^\circ$, то

а) $\angle ACB = ...$

б) $\angle CAB = ...$

в) $\angle CDB = ...$





Задания к § 27

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Доказать, что равные хорды одной окружности стягивают равные дуги (речь идет о дугах одновременно меньших (бо́льших) полуокружности).*

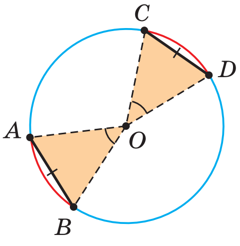


Рис. 354

Доказательство. Пусть хорды AB и CD равны (рис. 354). Эти хорды стягивают соответственно дуги AB и CD. Так как $\triangle AOB = \triangle COD$ по трем сторонам ($OA = OB = OC = OD$ как радиусы одной окружности), то $\angle AOB = \angle COD$. Отсюда следует, что $\smile AB = \smile CD$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Задача 2. *Доказать, что дуги, заключенные между параллельными секущими к окружности, равны между собой.*

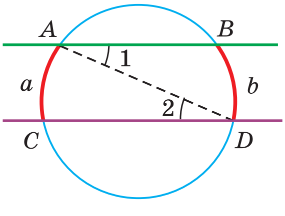


Рис. 355

Доказательство.

Пусть $AB \parallel CD$ (рис. 355). Проведем хорду AD. Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых.

Из равенства вписанных углов следует равенство дуг, на которые они опираются, то есть $\smile AC = \smile BD$.

Задача 3. *Доказать теорему:* **«Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри угла».**

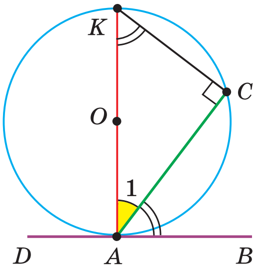


Рис. 356

Доказательство. Пусть DB — касательная к окружности с центром в точке O, где A — точка касания, AC — хорда. Докажем, что $\angle CAB = \frac{1}{2} \smile AC$ (рис. 356). Проведем диаметр AK. По свойству касательной $\angle KAB = 90°$ и $\angle CAB$ дополняет $\angle 1$ до $90°$. С другой стороны, $\angle C = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр, поэтому $\angle AKC$ также дополняет $\angle 1$ до $90°$. Поэтому $\angle CAB = \angle AKC$. Но $\angle AKC = \frac{1}{2} \smile AC$. Откуда $\angle CAB = \frac{1}{2} \smile AC$. Что и требовалось доказать.

Случай, когда угол между хордой и касательной прямой ($\angle BAK$) или тупой ($\angle CAD$), рассмотрите самостоятельно.

Замечание. Полезно запомнить свойство: **«Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную между касательной и хордой »** (рис. 357).

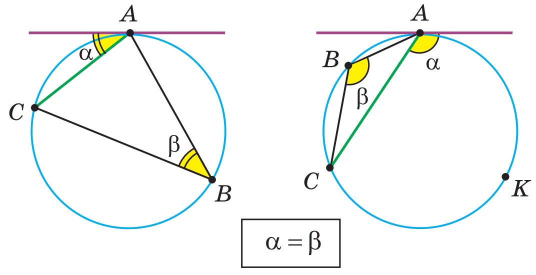


Рис. 357

Задача 4. *Доказать следующие утверждения: а) Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам; б) Диаметр, проведенный через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде и делит стягиваемые ею дуги пополам; в) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности и делит стягиваемые хордой дуги пополам* (рис. 358, *а—в*).

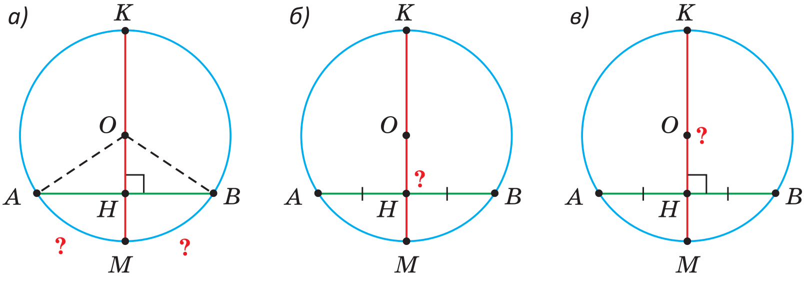


Рис. 358

Доказательство. а) $\triangle AOB$ — равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы), а его высота OH, проведенная к основанию AB, является медианой и биссектрисой (рис. 358, *а*). Поэтому $AH = HB$, $\angle AOM = \angle BOM$, $\smile AM = \smile BM$. Утверждения б) и в) докажите самостоятельно (рис. 358, *б*, *в*).

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

380. Нарисуйте окружность, изобразите центральный угол AOB и вписанный угол AKB, опирающиеся на ту же дугу, если центральный угол равен: а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) 270°. Запишите, сколько градусов содержит в каждом случае вписанный угол и соответствующая дуга.

381. По данным на рисунках 359, *а*)—*в*) найдите градусную меру угла или дуги, которые обозначены знаком вопроса (O — центр окружности).

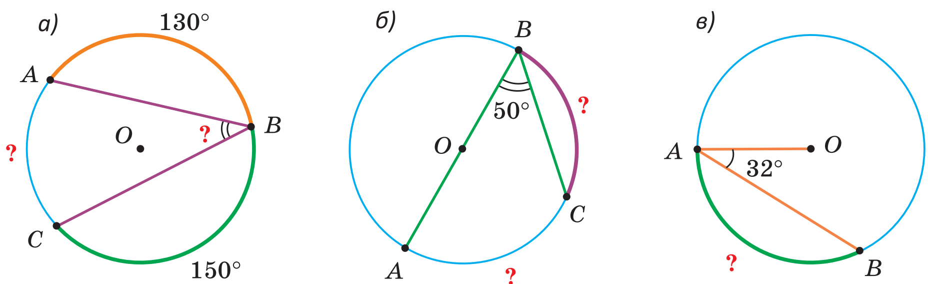


Рис. 359

382. Радиус окружности равен 24 см. Найдите длину хорды, которая стягивает дугу, содержащую:

а) 60°; б) 90°; в) 180°; г) 300°.

383. На рисунках 360, *а*)—*в*) O — центр окружности. Найдите угол A, если:

а) $BM \perp KC$; б) $\triangle BOC$ — равносторонний; в) $\angle 1 + \angle 2 = 126°$.

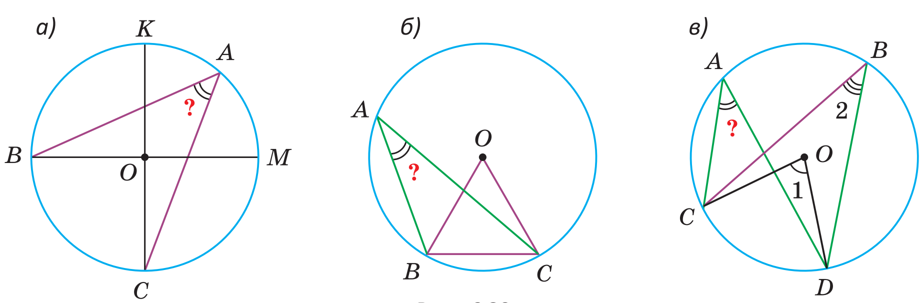


Рис. 360

384. Точки A, B и C лежат на окружности и являются вершинами равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и углом при вершине, равным $78°$. Найдите градусные меры дуг AB, BC и AC, которые заключены внутри углов треугольника ABC.

385. а) Вписанный угол ABC на $32°$ меньше соответствующего центрального угла AOC. Найдите центральный угол AOC.
б) Центральный и соотвествующий ему вписанный угол вместе составляют $63°12'$. Найдите эти углы.
в) Вписанный угол, соответствующий ему центральный угол и дуга, на которую эти углы опираются, вместе составляют $200°$. Найдите градусные меры этих углов и дуги.

386. Точка O — центр окружности (рис. 361), $\angle B = 110°$. Найдите $\angle AOC$.

387. По рисунку 362 найдите величину угла B.

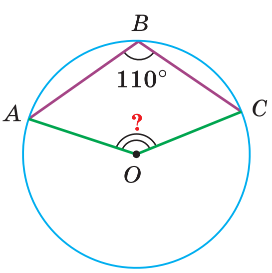


Рис. 361

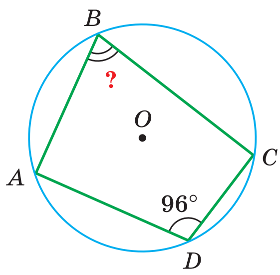


Рис. 362

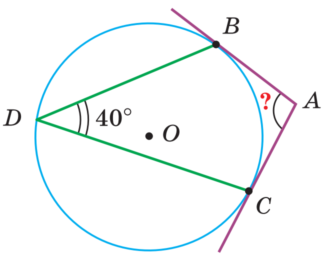


Рис. 363

388. Окружность вписана в угол BAC, B и C — точки касания прямых AB и AC и окружности (рис. 363). Угол BDC равен $40°$. Найдите величину угла A.

389. а) В окружности, радиус которой равен 10 см, проведена хорда длиной 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, содержащей эту хорду.
б) Хорда окружности равна 24 см, расстояние от центра окружности до прямой, содержащей хорду, равно 5 см. Найдите диаметр окружности.
в) В окружности, радиус которой 5 см, проведены две параллельные хорды длиной 6 см и 8 см по разные стороны от центра. Найдите расстояние между хордами.

390. а) Докажите, что дуга окружности, равная $60°$, стягивается хордой, равной радиусу окружности.
б) Докажите, что вписанный угол, равный $30°$, опирается на хорду, равную радиусу окружности.

391. Дана окружность с центром O и радиусом R и вписанный в нее $\angle ABC$. Найдите площадь треугольника AOC, если:
а) $\angle ABC = 30°$, $R = 4$ см; б) $\angle ABC = 45°$, $AC = 8\sqrt{2}$ см.

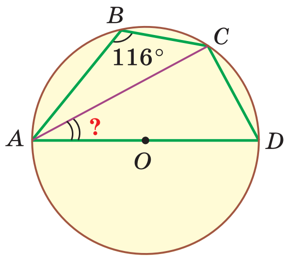


Рис. 364

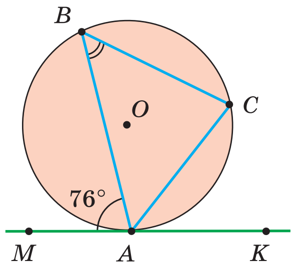


Рис. 365

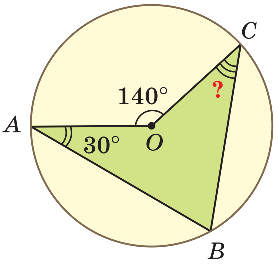


Рис. 366

392. Точка O является центром окружности (рис. 364), $\angle ABC = 116°$. Найдите $\angle CAD$.

393. Прямая MK касается окружности в точке A, $\angle BAM = 76°$, AC — биссектриса угла BAK (рис. 365). Найдите величину угла ABC.

394. Окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке K, проходит через его вершину B и пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N, $\angle CKN = 40°$, $\angle AKM = 60°$, $\angle A = 50°$. Найдите $\angle C$.

395. а) Докажите, что прямой вписанный угол опирается на диаметр.

б) На окружности с радиусом 9 см отмечены точки A, B и C такие, что $\angle BAC = 52°$, $\angle ACB = 38°$. Найдите длину хорды AC.

в) Вершины треугольника ABC принадлежат окружности, радиус которой равен 8,5 см, $\angle A + \angle B = 90°$, $AC = 8$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

396. Хорда AC окружности равна 6 см и стягивает дугу AC, равную 60°. Хорда AB проходит через центр окружности. Найдите площадь $\triangle ABC$.

397. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

398*. По данным на рисунке 366 найдите $\angle BCO$, где O — центр окружности.

399*. В окружности проведены три произвольные хорды AB, BC и CD (рис. 367). Точки M, N и K — соответственно середины данных хорд. Докажите, что $\angle BKN = \angle CMN$.

400*. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, проведенных из одной точки окружности.

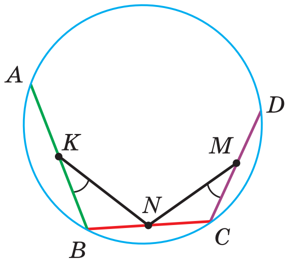


Рис. 367

Гимнастика ума

На плоскости изображена окружность, ее диаметр AB и точка M вне окружности (рис. 368). При помощи односторонней линейки опустите перпендикуляр из точки M на диаметр. (Односторонняя линейка без делений позволяет проводить только прямые линии.)

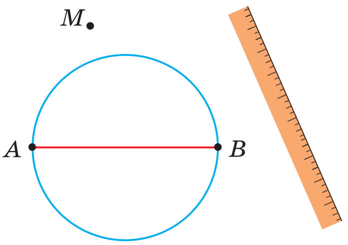


Рис. 368

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

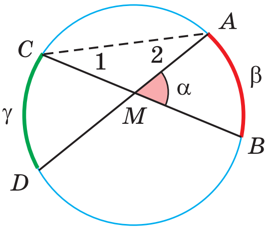
1. Определение вписанного и центрального углов.
2. Как определяется градусная мера дуги окружности и сколько градусов содержит вся окружность.
3. Теорему о величине вписанного и центрального углов окружности.
4. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу.
5. Свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.
6. Чему равен угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности.

Умеем

1. Доказывать теорему о том, что вписанный угол равен половине центрального угла.
2. Доказывать теорему об угле между хордой и касательной.

§ 28. Углы, образованные хордами, секущими и касательными

Теорема. **Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, заключенных внутри данного угла и угла, вертикального данному, то есть $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ (рис. 369).**



$\alpha = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$

Рис. 369

Доказательство. Нужно доказать, что угол AMB равен полусумме $\smile AB = \beta$ и $\smile CD = \gamma$ (см. рис. 369). Проведем хорду AC. Для $\triangle AMC$ угол AMB — внешний, поэтому $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. Но углы 1 и 2 — вписанные. По свойству вписанного угла $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile CD$. Тогда $\angle AMB = \frac{1}{2}\smile AB + \frac{1}{2}\smile CD = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$. Теорема доказана.

Теорема. **Угол между секущими, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла, то есть $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ (рис. 370).**

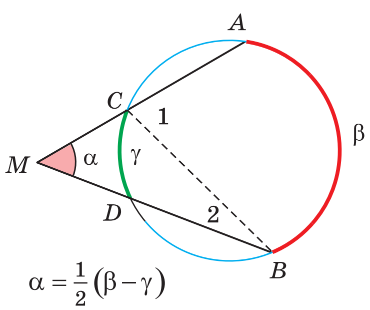


Рис. 370

Доказательство. Нужно доказать, что угол AMB равен полуразности $\smile AB = \beta$ и $\smile CD = \gamma$ (см. рис. 370). Проведем хорду BC. Для $\triangle MBC$ $\angle 1$ — внешний, поэтому $\angle 1 = \alpha + \angle 2$, откуда $\alpha = \angle 1 - \angle 2$. Но углы 1 и 2 — вписанные. По свойству вписанного угла $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile CD$.

Тогда $\angle AMB = \frac{1}{2}\smile AB - \frac{1}{2}\smile CD = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

Теорема доказана.

Свойство 1. Угол между секущей и касательной, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла и ограниченных точками пересечения и точкой касания.

Свойство 2. Угол между двумя касательными, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла и ограниченных точками касания.

На рисунке 371, *а*) угол M, равный α, является углом между касательной и секущей, на рисунке 371, *б*) — углом между касательными. В обоих случаях $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Докажите указанные свойства самостоятельно.

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}$$

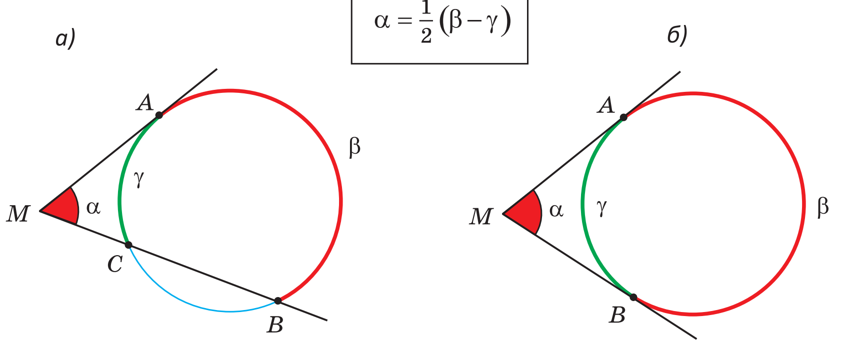
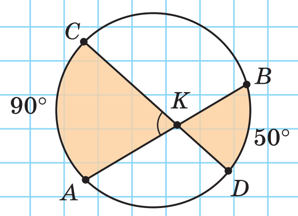


Рис. 371

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2.**

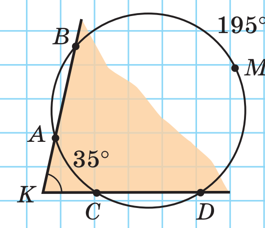
Тест 1

Если $\smile AC = 90°$, $\smile BD = 50°$, то $\angle AKC =$...



Тест 2

Если $\smile BMD = 195°$, $\smile AC = 35°$, то $\angle BKD =$...



Задания к § 28

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
Ключевые задачи

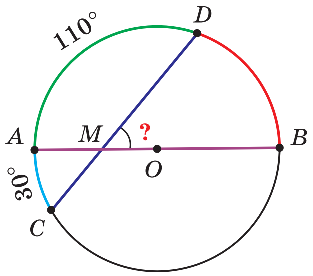


Рис. 372

Задача 1. *Найти угол DMB между хордой CD и диаметром AB, если известно, что дуга AC равна* 30°, *а дуга AD равна* 110° (рис. 372).

Решение. Так как AB — диаметр, то дуга ADB равна 180°. Тогда дуга DB равна $180° - 110° = 70°$. Искомый угол DMB равен полусумме дуг BD и AC, т. е. $\angle DMB = \frac{1}{2}(\smile DB + \smile AC) = \frac{1}{2}(70° + 30°) = 50°$.

Ответ: 50°.

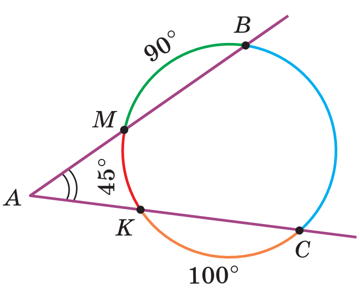


Рис. 373

Задача 2. *Найти угол A, если* $\smile KM = 45°$, $\smile MB = 90°$, $\smile KC = 100°$ (рис. 373).

Решение. Вся окружность содержит 360°. Найдем градусную меру дуги BC. Получим $\smile BC = 360° - \smile KC - \smile MK - \smile MB = 360° - 100° - 45° - 90° = 125°$.

Искомый угол A равен полуразности градусных мер дуг BC и MK, т. е.

$$\angle A = \frac{1}{2}(\smile BC - \smile MK) = \frac{1}{2}(125° - 45°) = 40°.$$

Ответ: 40°.

Задача 3. *Вершины четырехугольника ABCD принадлежат окружности, диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что* $\angle DBC = 26°$, $\angle AMB = 80°$. *Найти угол между прямыми AD и BC* (рис. 374).

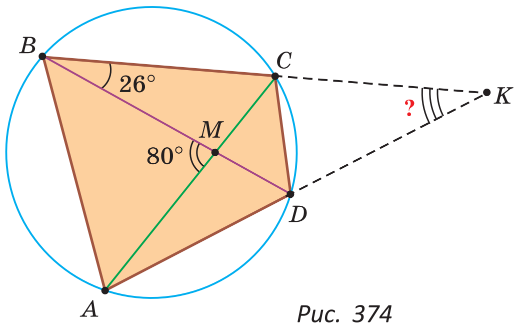


Рис. 374

Решение.

1) Продлим отрезки AD и BC до пересечения в точке K. Вписанный угол DBC опирается на дугу CD. Поэтому $\smile CD = 2\angle DBC = 2 \cdot 26° = 52°$.

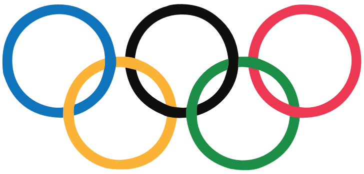
2) Пусть $\smile AB = x$. Так как $\angle AMB$ — это угол между хордами AC и BD, то $\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$, то есть $80° = \frac{1}{2}(x + 52°)$. Откуда $x = 108°$, $\smile AB = 108°$.

3) Так как $\angle AKB$ — это угол между секущими KA и KB, то $\angle AKB = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile CD) = \frac{1}{2}(108° - 52°) = 28°$. Поскольку этот угол острый, то он является углом между прямыми AD и BC.

Ответ: 28°.

Замечание. Второй способ решения заключается в нахождении углов треугольника MBC, а затем углов треугольника ACK.

При помощи **Интернета** выясните историю происхождения эмблемы Олимпийских игр. Определите, сколько пар пересекающихся колец и сколько пар непересекающихся колец на рисунке. Вспомните, какие еще эмблемы содержат окружности.



РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

401. По данным на рисунках 375 *а*)—*в*) найдите градусную меру угла или дуги, которые обозначены знаком вопроса.

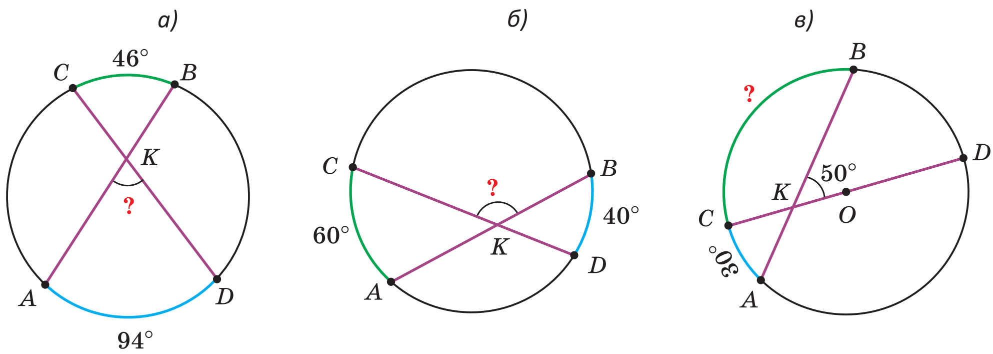


Рис. 375

402. На рисунках 376, *а*)—*в*) AB и AC — секущие, O — центр окружности. Найдите: в п. *а*) и *б*) $\angle A$; в п. в) градусную меру дуги MK.

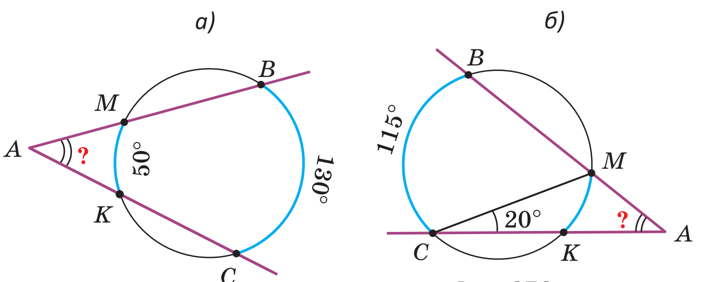


Рис. 376

403. Из точки M, лежащей вне окружности, к этой окружности проведены касательные MA и MB. Точки касания A и B делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 7. Найдите $\angle AMB$.

404. Прямая AK — касательная к окружности, K — точка касания (рис. 377). Дуга CB равна 130°, дуга CK равна 75°. Найдите $\angle A$.

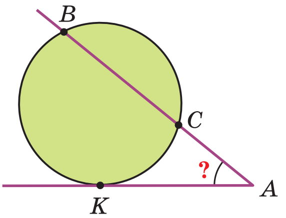


Рис. 377

405. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, $\angle BKD = 60°$, $\smile BD$ на 20° больше $\smile AC$. Найдите $\smile AC$.

406. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, диагонали пересекаются в точке M, $\angle BAC = 36°$, $\angle CAD + \angle ADC = 138°$. Найдите $\angle BMC$.

407. По данным на рисунке 378 найдите $\alpha - \beta$.

408. Если $\alpha + \beta + \gamma = 130°$ (рис. 379), то чему равна величина угла β?

409. Дано, что $\smile AD = 120°$, $\angle BAC = 32°$ (рис. 380). Найдите угол между прямыми:

а) AC и BD; б) AB и DC.

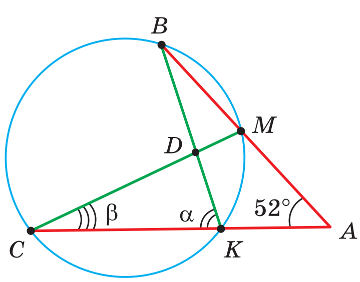


Рис. 378

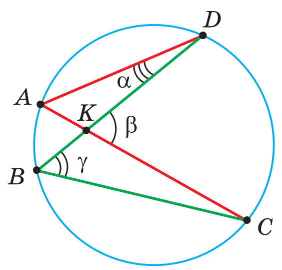


Рис. 379

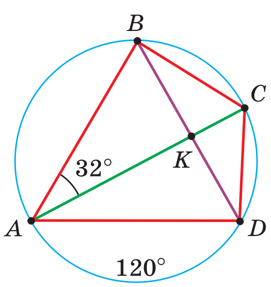


Рис. 380

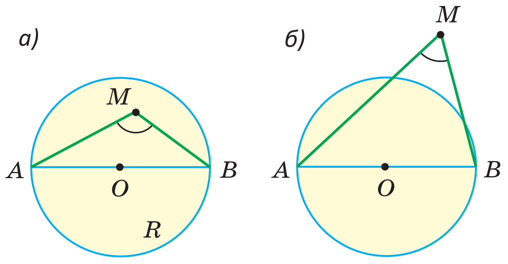


Рис. 381

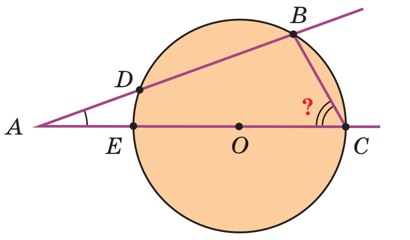


Рис. 382

410*. На рисунке 381, *а*)—*б*) AB — диаметр окружности. Докажите:

а) $\angle AMB$ — тупой; б) $\angle AMB$ — острый.

411*. На рисунке 382 точка O — центр окружности, $\angle BAC = 20°$, $AD = OC$. Найдите $\angle C$.

412*. Из точки A проведены касательная AB, где B — точка касания, и секущая AC, проходящая через центр O данной окружности (рис. 383). Луч AN — биссектриса угла BAC. Докажите, что:

а) $\smile MK + \smile BN = \smile KB + \smile NC$;
б) $\angle ADB = 45°$.

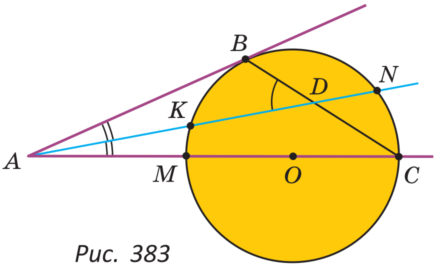


Рис. 383

413*. Найдите геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки.

Реальная геометрия

Напомним, как определяются географические координаты на поверхности Земли (рис. 384):

1 — нулевой (Гринвичский) меридиан;

2 — меридианы, которые находятся справа (восточнее) от нулевого меридиана;

3 — параллели, которые находятся снизу (южнее) от экватора;

4 — экватор.

Пересечение нулевого меридиана (1) и экватора (4) — начало отсчета географических координат.

К северу от экватора вдоль меридиана дуга окружности (четверть окружности) содержит 90° северной широты (с. ш.), к югу от экватора — 90° южной широты (ю. ш.).

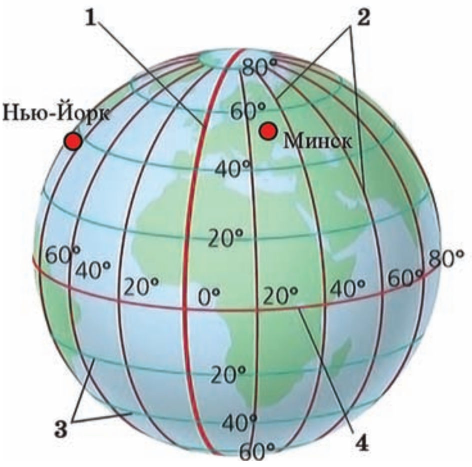


Рис. 384

К востоку от нулевого меридиана дуга окружности (полуокружность) содержит 180° восточной долготы (в. д.), а к западу от нулевого меридиана — 180° западной долготы (з. д).

Задача.

Штаб-квартира ООН (Организации Объединенных Наций) находится в Нью-Йорке (США). Географические координаты Нью-Йорка: 39° с. ш., 77° з. д., а координаты Минска: 54° с. ш., 27,5° в. д.

а) Определите расстояние, которое нужно преодолеть по поверхности Земли, чтобы попасть из параллели, где расположен Минск, на параллель, где расположен Нью-Йорк, двигаясь вдоль меридиана, на котором находится Минск.

Подсказка: расстояние между двумя параллелями, различающимися на 1°, равно 111 км.

б) Определите кратчайшее расстояние, которое нужно преодолеть, двигаясь по 54-й параллели, чтобы попасть из меридиана, на которой расположен Минск, на меридиан, на котором расположен Нью-Йорк.

Подсказка: длина 54-й параллели 23 500 км и длина дуги окружности прямо пропорциональна ее градусной мере.

Интересно знать. ООН — самая авторитетная международная организация, которая решает вопросы безопасности и сотрудничества на планете Земля.

Беларусь является одной из стран учредителей Организации Объединенных Наций (октябрь 1945 г). Участие Беларуси в создании ООН стало признанием международным сообществом огромной роли, которую сыграл белорусский народ в деле победы над фашизмом.

§ 29. Свойство отрезков хорд и касательных

Теорема (о пересекающихся хордах).
Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой, т. е. $ab = cd$ (рис. 385).

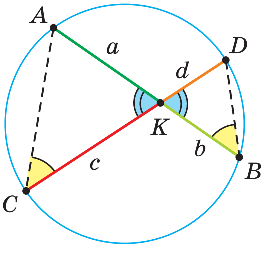


Рис. 385

Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке K, $AK = a$, $KB = b$, $CK = c$, $KD = d$. Нужно доказать, что $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, или $ab = cd$ (см. рис. 385). Проведем хорды AC и BD. Так как $\angle AKC = \angle BKD$ как вертикальные, а $\angle ACD = \angle DBA$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD, то $\triangle AKC \sim \triangle DKB$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AK}{CK} = \frac{DK}{BK}$, или $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, откуда $ab = cd$.
Теорема доказана.

Теорема (о касательной и секущей).
Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точки ее пересечения с окружностью, т. е. $a^2 = bc$ (рис. 386).

Иногда эту теорему формулируют так: **«Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть»**, имея в виду указанные отрезки.

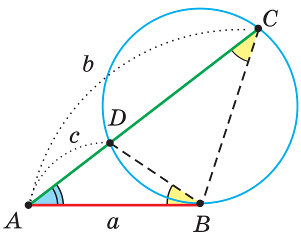


Рис. 386

Доказательство. Пусть AB — касательная, где B — точка касания и $AB = a$, AC — секущая, $AC = b$ — отрезок секущей, $AD = c$ — его внешняя часть (см. рис. 386). Нужно доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$, или $a^2 = bc$. Проведем хорду BD. У треугольников ABD и ACB $\angle A$ — общий, $\angle ABD = \angle ACB = \frac{1}{2}\smile BD$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ по двум углам. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, или $\frac{a}{c} = \frac{b}{a}$, откуда $a^2 = bc$. Теорема доказана.

Следствие.

Если из точки, взятой вне окружности, к окружности проведено несколько секущих, то произведения больших отрезков секущих на их внешние части равны между собой: $AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$ (рис. 387).

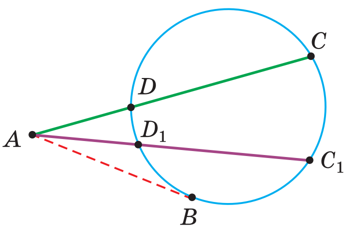


Рис. 387

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок и теорему о касательной и секущей.

Задания к § 29

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
Ключевые задачи

Задача 1.
Хорды AB и CD пересекаются в точке M. Известно, что $AB = 15$ см, $CM = 9$ см, $MD = 4$ см. Найти $AM : MB$, если $AM < MB$ (рис. 388).

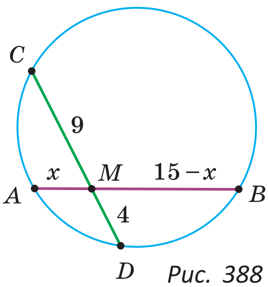


Рис. 388

Решение.
Пусть $AM = x$ см, тогда $MB = (15 - x)$ см. По теореме о пересекающихся хордах $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то есть $x(15 - x) = 9 \cdot 4$. Решим полученное уравнение:

$15x - x^2 = 36$, $x^2 - 15x + 36 = 0$. По теореме Виета (обратной) $x_1 = 3$, $x_2 = 12$. Если $AM = 3$ см, то $MB = AB - AM = 12$ см. Так как $3 < 12$, то $AM : MB = 3 : 12 = 1 : 4$.

Ответ: 1 : 4.

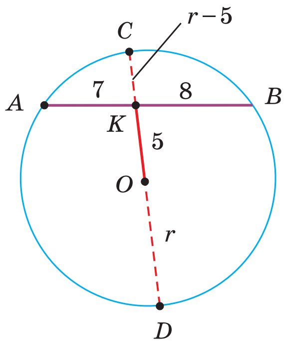


Рис. 389

Задача 2. *Точка K делит хорду AB на отрезки AK = 7, KB = 8. Расстояние от центра O окружности до точки K равно 5. Найти радиус окружности* (рис. 389).

Решение. Проведем диаметр CD, содержащий отрезок OK. Обозначим радиус окружности r. Тогда $KD = OK + OD = r + 5$, $CK = OC - OK = r - 5$. По теореме о пересекающихся хордах $CK \cdot KD = AK \cdot KB$, то есть $(r - 5)(r + 5) = 7 \cdot 8$, $r^2 - 25 = 56$, $r^2 = 81$, $r = \pm 9$. По смыслу задачи $r > 0$. Поэтому $r = 9$.

Ответ: 9.

Задача 3. *Из точки A к окружности проведены две секущие AB и AC* (рис. 390). *Найти длину отрезка AB, если KB = 14 см, AM = 8 см, MC = 7 см.*

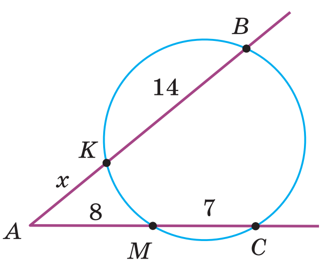


Рис. 390

Решение. Воспользуемся свойством секущих к окружности, проведенных из одной точки (следствие из теоремы о касательной и секущей). Получим $AB \cdot AK = AC \cdot AM$. Обозначим $AK = x$ см. Тогда $(x + 14) \cdot x = (8 + 7) \cdot 8$, $x^2 + 14x - 120 = 0$, $x_1 = -20$, $x_2 = 6$. Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 6$. Итак, $AK = 6$ см, $AB = 20$ см.

Ответ: 20 см.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

414. На рисунке 391 $CM = 8$ см, $MD = 6$ см, $MB = 12$ см. Найдите длину отрезка AM.

415. На рисунке 392 $AM = MB$, $CM = 4$ см, $MD = 9$ см. Найдите длину отрезка AB.

416. На рисунке 393 $AM = 20$ см, $CM = 2MB$, отрезок MD на 2 см меньше отрезка CM. Найдите длину отрезка CD.

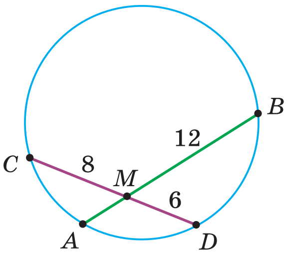


Рис. 391

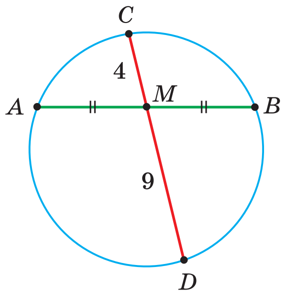


Рис. 392

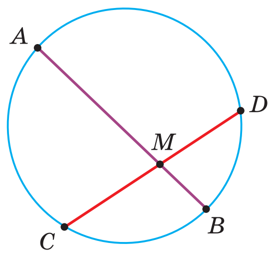


Рис. 393

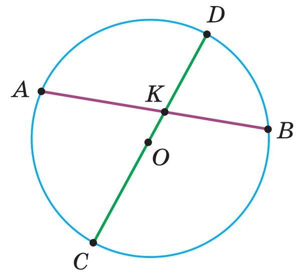


Рис. 394

417. Точка O — центр окружности, $KB = 7$ см, $AK = 12$ см, $CD = 20$ см (рис. 394). Найдите длину отрезка KD.

418. AB — диаметр окружности (рис. 395), $AB \perp CD$, $KB = 4$ см, $KD = 6$ см. Найдите радиус окружности.

419. Из точки M к окружности проведена касательная MA, где A — точка касания, и секущая, которая пересекает окружность в двух точках C и D. Точка D лежит на отрезке MC, $MD = 4$ см, $DC = 12$ см. Найдите отрезок AM.

420. На рисунке 396 AC — касательная, C — точка касания, $AC = 3$ см, $BD = 8$ см. Найдите длину отрезка AD.

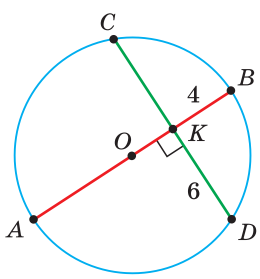


Рис. 395

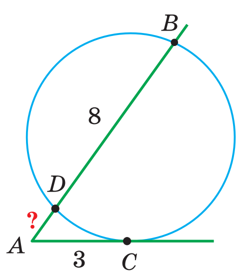


Рис. 396

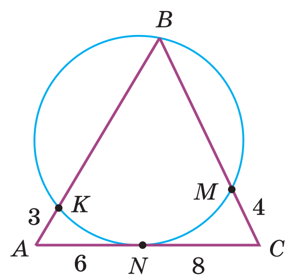


Рис. 397

421*. На рисунке 397 окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке N и проходит через его вершину B. Найдите периметр треугольника ABC, если $AK = 3$ см, $AN = 6$ см, $NC = 8$ см, $CM = 4$ см.

422*. На рисунке 398 AC — касательная к малой окружности, C — точка касания, $AD = 2$ см, $DB = 16$ см. Найдите длину отрезка AC.

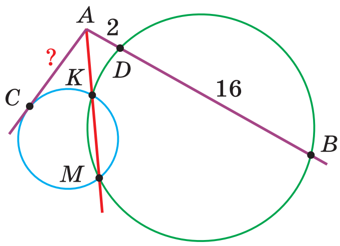


Рис. 398

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Чему равна величина угла между пересекающимися хордами.
2. Чему равна величина угла между секущими, проведенными из одной точки, взятой вне окружности.
3. Свойство отрезков пересекающихся хорд.
4. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей, проведенных из одной точки, взятой вне окружности.

Умеем

1. Доказывать теорему об угле между пересекающимися хордами.
2. Доказывать теорему об угле между секущими к окружности.
3. Доказывать теорему об отрезках пересекающихся хорд окружности.
4. Доказывать теорему о касательной и секущей.

Об одном геометрическом месте точек*

Вначале рассмотрим задачу.

Задача. *Построить дугу окружности, из каждой точки которой данный отрезок a виден под данным углом* α (рис. 399).

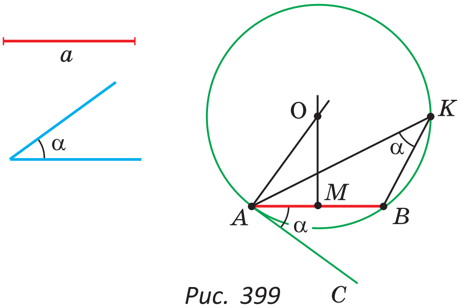


Рис. 399

А н а л и з. Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде a. Серединный перпендикуляр к хорде мы построить можем. Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу. Касательную под углом α к хорде a мы построить можем. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Восстановить перпендикуляр к касательной в точке касания мы можем. Пересечение этого перпендикуляра и серединного перпендикуляра к данному отрезку даст центр искомой окружности.

П о с т р о е н и е. Строим серединный перпендикуляр MO к отрезку $AB = a$. Откладываем $\angle BAC = \alpha$. Из точки A восстанавливаем перпендикуляр к прямой AC. Точка O — центр окружности, дуга AKB — искомая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $OA \perp AC$, следовательно, AC — касательная к окружности с радиусом OA; $\angle BAC = \alpha = \frac{1}{2}\smile AB$ как угол между касательной и хордой; $\angle AKB = \frac{1}{2}\smile AB$ как вписанный угол, опирающийся на дугу AB. Тогда $\angle AKB = \alpha$, где K — произвольная точка дуги AKB.

Из решенной задачи следует, что геометрическим местом точек плоскости, из которых данный отрезок виден под углом α, является объединение двух дуг окружностей: дуги AKB и ей симметричной относительно прямой AB, за исключением концов этих дуг, т. е. точек A и B.

Данное свойство позволяет построить при помощи циркуля и линейки треугольник по стороне, углу напротив и какому-либо еще элементу треугольника (рис. 400).

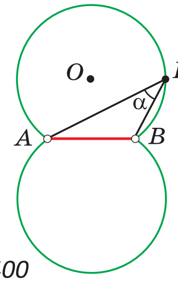


Рис. 400

Упражнения

1. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине α и высоте h, опущенной на это основание.

2. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине α и медиане, проведенной к стороне a.

Геометрия 3D

Из курса 7-го класса мы знаем, что, если вращать круг или полукруг вокруг своего диаметра, получим ***шар*** (рис. 401). Поверхность шара называется *сферой*.

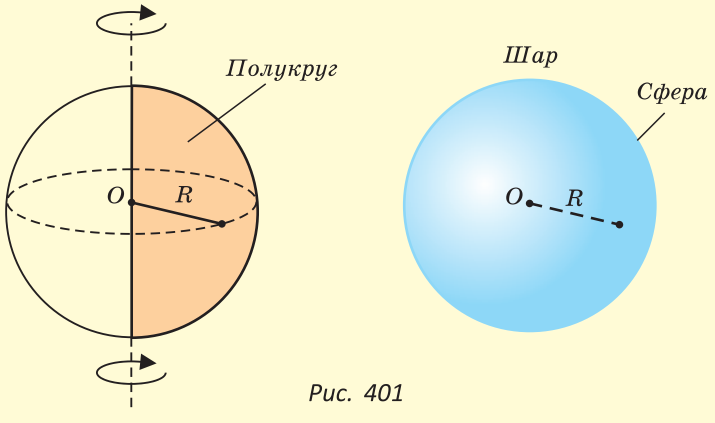


Рис. 401

Если вращать прямоугольник около одной из его сторон, получим ***цилиндр*** (рис. 402). Это геометрическое тело имеет поверхность и объем. Поверхность цилиндра состоит из двух кругов и боковой поверхности (рис. 403, см. с. 188). Круги называются основаниями цилиндра, их радиус R равен одной из сторон прямоугольника. Если боковую поверхность цилиндра развернуть на плоскость, получим прямоугольник. Одна из

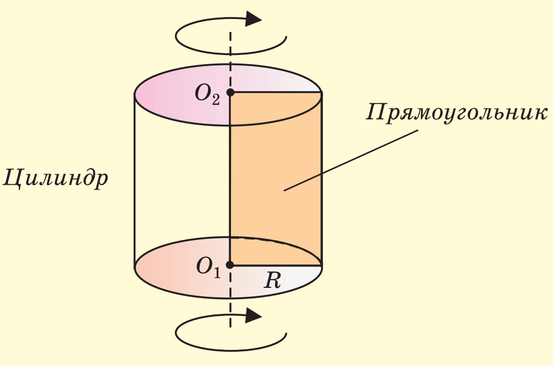


Рис. 402

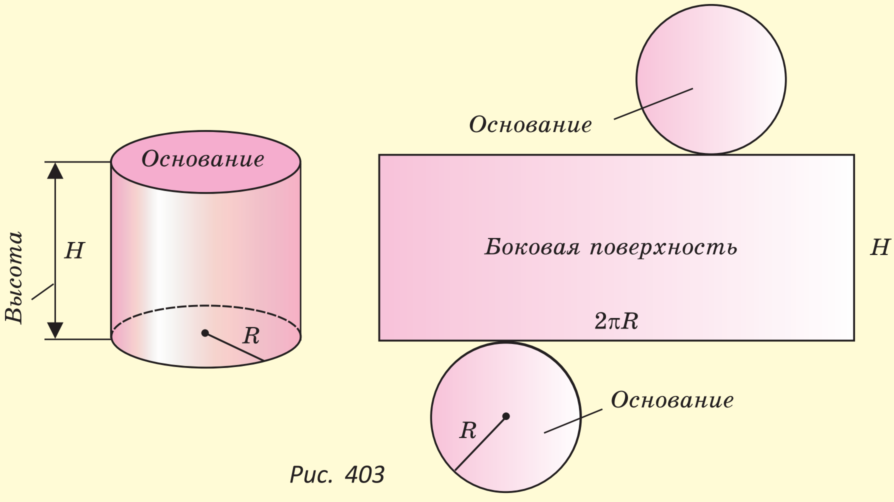


Рис. 403

его сторон равна стороне прямоугольника, а другая — длине окружности основания, то есть $2\pi R$. Высота H цилиндра равна одной из сторон прямоугольника.

Если вращать прямоугольный треугольник около одного из катетов, получим ***конус*** (рис. 404). Как шар и цилиндр, конус — это геометрическое тело, которое имеет поверхность и обладает объемом. Поверхность конуса состоит из одного круга, который называется основанием конуса и боковой поверхности. Радиус R основания равен одному из катетов треугольника вращения. Если боковую поверхность конуса развернуть на плоскость, то она будет представлять собой сектор круга (рис. 405). Другой катет является высотой конуса. Высота H конуса выходит из вершины и перпендикулярна основанию конуса.

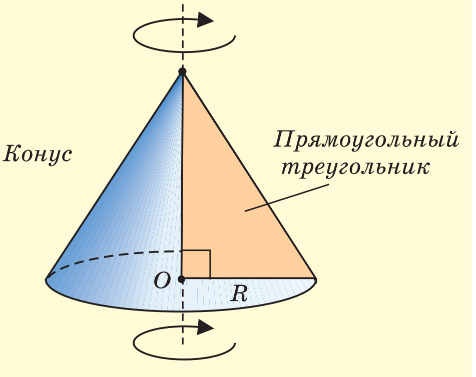


Рис. 404

Рассмотренные нами тела: шар, цилиндр и конус — называют *телами вращения*. В жизни, производстве, технике эти тела встречаются довольно часто. Приведите примеры.

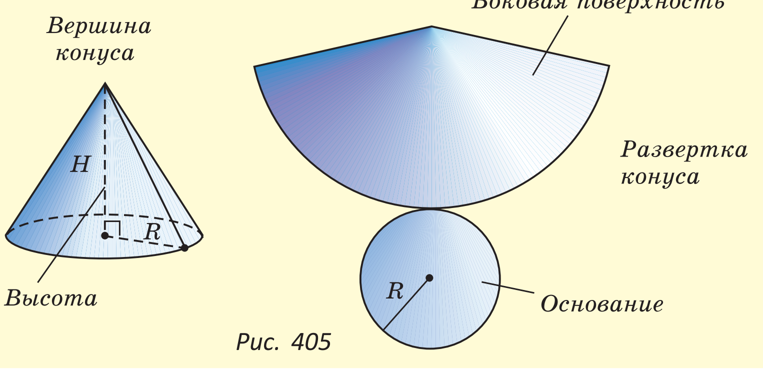


Рис. 405

Моделирование

Задание 1.

а) Возьмите прямоугольную полоску бумаги 10 см × × 20 см и сверните ее в цилиндр. Скрепите края бумаги. Определите примерный радиус основания этого цилиндра. Вырежьте два круга найденного радиуса и закрепите их в местах оснований цилиндра.

б) Найдите в квадратных сантиметрах приближенную площадь полной поверхности цилиндра. Используйте формулу площади круга $S = \pi R^2$ и значение $\pi \approx 3{,}14$.

Задание 2.

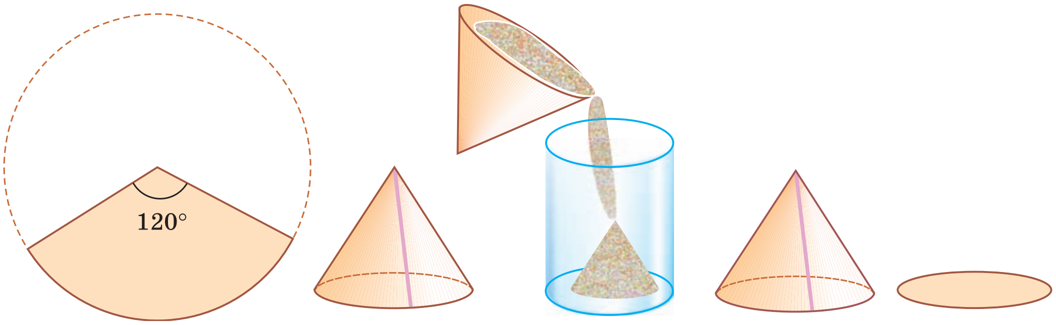
а) На бумаге изобразите круг, радиус которого 10 см. Вырежьте из круга сектор с центральным углом, равным 120°. Сверните этот сектор в конус. Скрепите края бумаги скотчем. Определите примерный радиус R основания этого конуса и его высоту H при помощи линейки. Для более точного определения высоты можно использовать теорему Пифагора.

б) Найдите приближенную площадь боковой поверхности конуса, используя формулу площади круга и тот факт, что площадь сектора с углом 120° составляет одну третью часть от площади круга.

в) Найдите приближенный объем этого конуса в см^3, используя формулу объема конуса $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$.

Переверните конус вершиной вниз и насыпьте доверху в полученную воронку сахар. Пересыпьте сахар в цилиндрический стакан с делениями. Определите по делениям, сколько миллилитров составил объем сахара. Учитывая, что 1 мл = 1 см^3, сравните объем конуса, полученный двумя разными способами.

г) Вырежьте круг нужного радиуса и закрепите его в месте основания конуса. Перед этим внутрь конуса можно положить записку с пожеланиями будущему поколению учеников.



Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия. 8 кл.» можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, раздел «Математика», курс «Математика. 8 кл.».

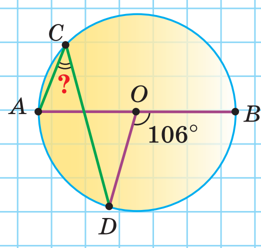
ЗАПОМИНАЕМ

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла.
3. Вписанный угол равен $\frac{1}{2}$ соответствующего центрального угла или $\frac{1}{2}$ дуги, на которую он опирается.
4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме градусных мер дуг, заключенных внутри данного угла и внутри угла, ему вертикального.
5. Угол между секущими к окружности, проведенными из точки вне окружности, равен полуразности градусных мер дуг, заключенных внутри угла.
6. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.
7*. Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть.

ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

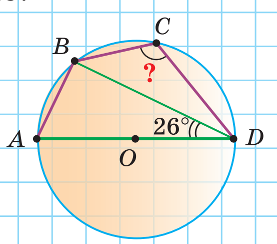
Тест 1

O — центр окружности. Найдите $\angle ACD$.



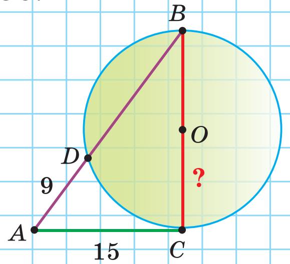
Тест 2

AD — диаметр окружности. Найдите $\angle C$.



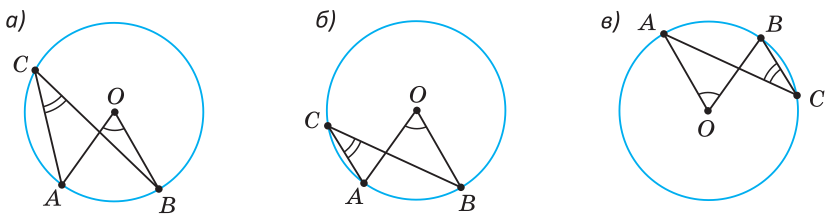
Тест 3

AC — касательная. Найдите радиус OC.

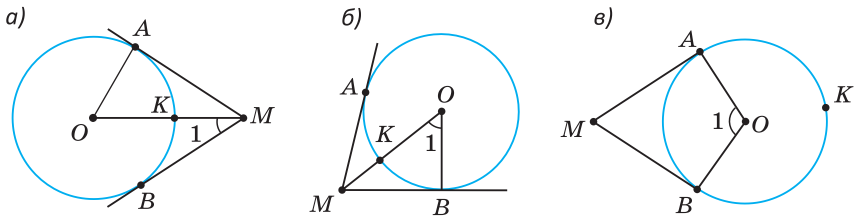


ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 4

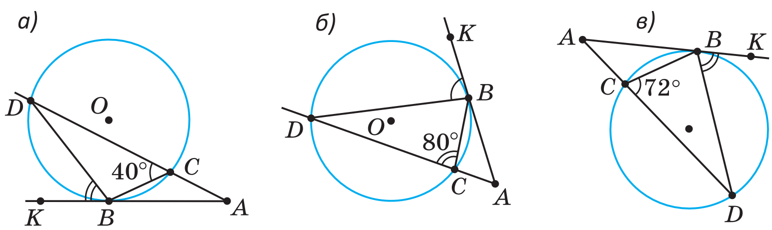
1. Найдите $\angle C + \angle O$, если: а) $\smile AB = 60°$; б) $\smile AB = 62°$; в) $\smile AB = 58°$.



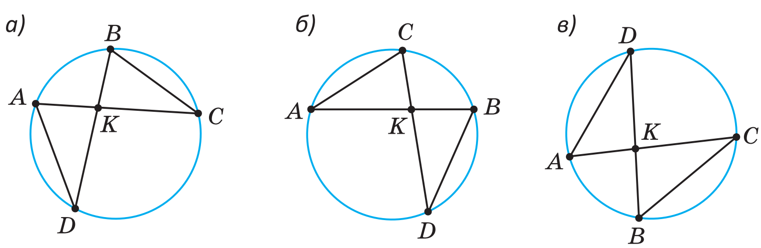
2. Найдите $\angle 1$, если: а) $\smile AK = 60°$; б) $\smile AK = 56°$; в) $\smile AKB = 260°$.



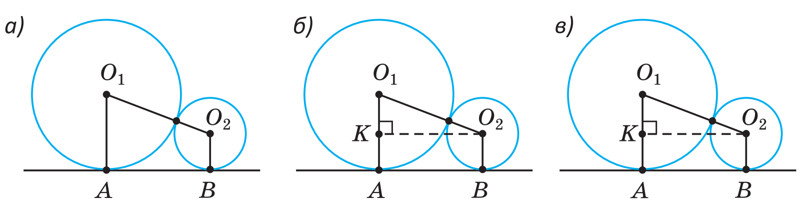
3. Найдите $\angle KBD$, где B — точка касания.



4. Заполните пропуск. а) $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{DK}{\dots}$; б) $\dfrac{CK}{BK} = \dfrac{AK}{\dots}$; в) $DK \cdot KB = AK \cdot \dots$.



5. $R = 36$, $r = 25$. Найдите: а) O_1O_2; б) O_1K; в) $S_{AO_1O_2B}$.

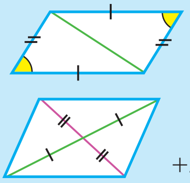


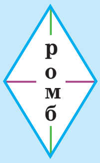
Сумма углов многоугольника $180°(n-2)$

Параллелограмм

Свойства

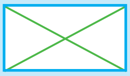
1
2
3
4
5





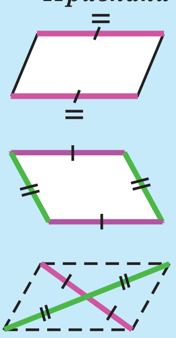
+2. диагонали: $\perp$ и бис.

прямоугольник

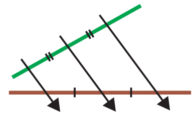


+1. диагонали равны

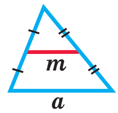
Признаки



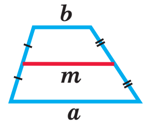
Теорема Фалеса



СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ



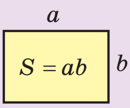
$m = \frac{a}{2}$

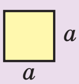


$m = \frac{a+b}{2}$

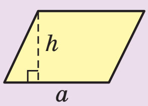
МЕДИАНЫ 2 : 1

Площади

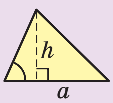




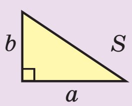
$S = a^2$



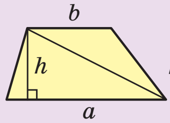
$S = ah$



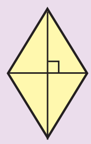
$S_\triangle = \frac{1}{2}ah$



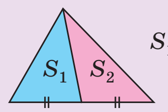
$S = \frac{ab}{2}$



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$



$S = \frac{d_1 d_2}{2}$



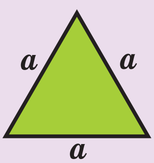
$S_1 = S_2$

Медиана на два равновеликих

Пифагор

$$c^2 = a^2 + b^2$$

обратная



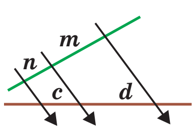
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Площади подобных треугольников

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = k^2$$

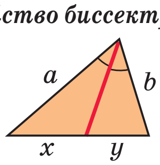
Подобие

I признак
II признак
III признак



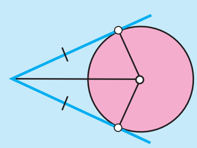
$$\frac{n}{m} = \frac{c}{d}$$

Свойство биссектрисы угла треугольника

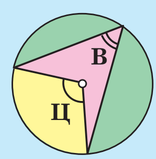


$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

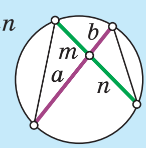
Касательная

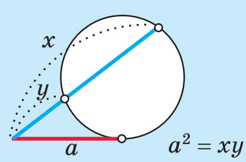


$\text{В} = \frac{1}{2}\,\text{Ц}$



$ab = mn$





$a^2 = xy$

База знаний по геометрии. 8 класс

Знать и уметь доказывать

1. Сумма внутренних углов многоугольника равна $180°(n - 2)$.

2. Свойства параллелограмма: 1) сумма соседних углов равна $180°$; 2) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника; 3) — 4) у параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны; 5) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

3. Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если у него: 1) две стороны равны и параллельны; 2) противоположные стороны попарно равны; 3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

4. Диагонали прямоугольника равны.

5. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.

6. Теорема Фалеса: «Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки».

7. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

8. Средняя линия m треугольника параллельна основанию и равна его половине, то есть если M и K — середины сторон AB и BC треугольника ABC, то $MK \parallel AC$ и $MK = \frac{1}{2}AC$.

9. Средняя линия m трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме, то есть $m \parallel a$, $m \parallel b$ и $m = \frac{a+b}{2}$, где a и b — основания трапеции.

10. Площади: квадрата — $S = a^2$; прямоугольника — $S = ab$; параллелограмма — $S = ah$; треугольника — $S = \frac{1}{2}ah$; трапеции — $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; прямоугольного треугольника — $S = \frac{ab}{2}$; ромба — $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.

11. Теорема Пифагора: «Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то есть $a^2 + b^2 = c^2$».

12. Признаки подобия треугольников. Треугольники подобны, если: 1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника; 2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны; 3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

13. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

14. Прямоугольные треугольники подобны по острому углу.

15. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, т. е. если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = k^2$.

16. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть если BK — биссектриса угла B треугольника ABC, то $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$.

17. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

18. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.

19. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

20. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

21. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.

22. Площадь равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

23. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный (обратная теорема Пифагора).

24. Площади треугольников с общей высотой относятся как соответствующие основания.

25. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, одна из которых заключена внутри данного угла, а другая — внутри ему вертикального.

26. Угол между секущими, выходящими из точки вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла.

27. Угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равен половине дуги, заключенной внутри угла.

28. Для касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности, квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть.

ОТВЕТЫ

Глава I

1. а) 720°; б) 1440°; в) 2700°. **2.** а) 110°; б) 140°; в) 180°. **4.** 42 см. **5.** а) 3; б) 5; в) 6. **6.** 36°; 126°; 54°; 144°. **7.** а) 100°; б) 72°; 72°; 72°; 144°. **8.** а) По 160 см; б) 9 см. **9.** 45°. **10.** Указание: используйте неравенство треугольника. **12.** 540°. **13*.** 75°. **14*.** Точка пересечения диагоналей. Указание: используйте неравенство треугольника. **15*.** 18 см, 2 см. Указание: используйте свойство ломаной. **16*.** Три. **19.** а) $\angle A = \angle C = 50°$, $\angle D = 130°$; б) $\angle A = \angle C = 70°$, $\angle B = \angle D = 110°$; в) $\angle A = \angle C = 80°$, $\angle B = \angle D = 100°$; г) $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = \angle D = 140°$; д) $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$. **20.** а) $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 14$ см; б) $AB = CD = 11$ см, $AD = BC = 13$ см; в) $AB = CD = 9$ см, $AD = BC = 15$ см; г) $AB = CD = 8$ см, $AD = BC = 16$ см; д) $AB = BC = CD = AD = 12$ см. **21.** а) 28 см; б) 42 см. **22.** 94 см. **23.** 38 см. **24.** а) 1) 10 см; 2) 5 см; б) 5 см и 10 см. **26.** 32 см. **27.** 48 см. **28.** 24 см. **29.** 52°. **31*.** 4. **38.** 80. **39.** 54°. **42.** а) 108°; 72°; б) 54°. **43.** 308 см. **48.** (6; 1), (–8; 1), (2; 9). **49*.** 6 см. **51*.** Указание. Воспользуйтесь теоремой о пересечении высот треугольника. **52.** 4 см. **53.** 34 см. **54.** 36 см. **55.** 12 см. **56.** 28. **58.** 56°. **59.** 154°. **60.** 40 см. **61.** 3 см. **63.** 30°, 60°. **64.** 90°. **65*.** а) 18 см. **68*.** Указание. Рассмотрите прямоугольник $ABCD$, $A(-3; -2)$, $B(-3; 7)$, $C(8; 7)$, $D(8; -2)$. **69.** г). **71.** а) 48 см; б) 55° и 70°; в) 16 см. **72.** а) 128°; б) 64°; в) 52°; г) 26°. **73.** а) 48 см; б) 72 см; в) 64 см. **74.** 58°. **75.** 96 см. **76.** 32 см. **77.** а) 30°; 75°; 75°; б) 60°; 60°; 60°. **82.** 180°. **83.** 54 см. **84.** 72 см. **85.** 24 см. **87.** 6 см. **89.** 84 см. **94*.** Указание. В $\triangle KBM$ проведите высоту BH. **95.** 18 см. **96.** 7. **97.** 39 см. **98.** 36 см. **99.** 37 см. **100*.** 63 см. **102.** 40 см. **103.** 45°. **104.** 9 см; 32 см. **105.** а) 24 м; б) 98 м. **109.** 64 см. **110.** а) 22 см; б) 64°. **113*.** 6 см. **114*.** 36°. **115.** $MK = 4$ см, $AM = 8$ см, $CM = 7$ см, $CP = 10{,}5$ см. **116.** 32 см. **117.** 32 см. **119.** 93 см. **121*.** 16 см. **122*.** 63 см. **125.** $\angle B = 110°$, $\angle D = 50°$, $MN = 19$ см. **3.** 120°. **127.** а) 140°; б) 4 : 3. **128.** а) 36 см; б) 102 см. **129.** а) 12 см, 8 см; б) 7 см, 3 см. **130.** 74 см. **131.** а) 19 см; б) 15 см; в) 4 см. **132.** а) 36 см; б) 52 см. **133.** 10 см. **134.** 8 см. **136.** 2 см. **137.** 8 см. **138*.** 3 см. **139*.** $\angle A = \angle D = 60°$; $\angle B = C = 120°$. **141*.** 90°. **144.** а) 18 см; б) 16 см. **145.** 54,8 см. **148.** 29°. **149.** 16 см. **150.** а) 9 см; б) 9,5 см; в) 15 см. **151*.** 3 см. **152*.** 8 см.

Глава II

156. а) 82 см^2; б) 396 см^2; в) 21 см^2. **157.** 4 см и 6 см. **159.** а) 46 дм; б) 72 м^2. **160.** 45 см^2. **162.** а) 28 см^2; б) 42 см. **163.** 24 см^2. **164.** 35 см^2. **165.** а) В 9 раз; б) в 4 раза. **166.** На 21 %. **167*.** 15. **170.** а) 60 см^2; б) 28 см^2; в) 48 см^2. **171.** а) 5 см; б) 72 см^2. **172.** а) 36 см; б) 88 см. **173.** 35 см^2. **174.** 9 см. **175.** 12. **176.** а) 54 см; б) 72 см^2. **177.** 48. **178.** 153 см^2. **179.** 48 см^2. **180.** 56 см^2. **181.** 96 см^2. **182.** 90 см^2. **183*.** 27 см^2. **185.** а) 12 см^2; б) 17,5 см^2; в) 12,5 см^2. **186.** 16 см. **187.** а) 17 см^2; б) 6 см^2. **188.** а) 12 см; б) 3 м. **190.** 64 см^2. **191.** а) 60 см^2; б) 12 см. **192.** 3 : 8. **193.** 120 см. **194.** а) 30 см^2; б) 10 см^2; в) 20 см^2; г) 20 см^2. **195.** 15 кв. единиц. **196.** а) 15 см; б) 24 см. **198.** 128 см^2. **200.** 6 см. **201*.** 120 см, 60 см, 80 см. **202*.** 50 см^2. **203*.** 60°. **205.** а) 15 см; б) $\sqrt{5}$ см; в) 5 дм; г) 4 м. **206.** а) 8 см; б) 7 м; в) $3\sqrt{3}$ см; г) $\sqrt{10}$ см. **207.** 60 см^2. **208.** 54 см^2. **209.** а) 336 см^2; б) 120 см^2. **210.** 225 см^2. **211.** а) Да; б) нет; в) да. **212.** а) 24 см^2; б) 2,4 дм^2; в) 2 м^2. **213.** а) $2\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см^2; б) 24 см, $4\sqrt{3}$ см. **214.** а) 6000 м^2; б) 168 дм^2; в) $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$. **215.** а) 9 м, 12 м; б) 24 см^2. **216.** а) 12; б) 20. **217.** а) 144; б) 14,4. **219.** а) 8 см^2; б) 10 см. **220.** 11,2 см. Указание: смотрите ключевую задачу **4**. **221.** 15 см. **223*.** 24 см^2. **224*.** 8 см^2. Указание: из основания любой медианы (середины стороны) проведите прямую, параллельную одной из оставшихся медиан. Рассмотрите треугольник, ограниченный этой прямой и двумя медианами. **225*.** 9,6 см. **226*.** 5 единиц. **228.** а) 69 см^2; б) 12 см; в) 14 см. **229.** а) 350 см^2; б) 12 см^2. **230.** 270 см^2. **231.** а) 6 см; б) 4 см. **232.** 77 см^2. **233.** 28 см^2. **234.** 128 см^2. **235.** а) $42\sqrt{3}$ см^2; б) $24\sqrt{3}$ см^2. **236.** а) 18 см^2; б) 13,2 см^2. **237.** а) $50\sqrt{5}$ см^2; б) 30 см^2. **238.** 8 см и 128 см^2. **239.** 42 см^2. **240*.** 36 см^2. **241*.** 1 : 2. **242*.** 80 см^2. **243*.** 16 см^2. **244.** 48 см^2. **245.** $\frac{1}{6}$. **246.** 25 %. **247*.** 30 см^2. **249*.** Указание: воспользуйтесь тем, что средняя линия отсекает от данного треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади данного. **250.** 48 см^2. **251.** $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **252.** 80 см^2. **253*.** Указание: составьте из 8 полученных треугольников параллелограмм: см. задания Главы I с. 28. **255.** 36 см^2. **256.** 63 см^2. **257*.** Указание: см. ключевую задачу **4**. **259.** Указание. Проведите через точку F прямые, параллельные сторонам треугольника. Рассмотрите полученные параллелограммы и равносторонние треугольники.

Глава III

261. а); б). **262.** а) 20 см; б) 2,4 см; в) 32 см. **263.** а) 6 см, 4,5 см; б) 44 см. **264.** а) 8 см, 18 см, 6 см; б) 28 см. **265.** а) 9 см; б) 9 см. **266.** а) 20 см; б) 54 см; в) 15 см; г) 14 см. **268.** 22 см. **269*.** 120 см^2. **270*.** 24 см^2. Указание: найдите S_{ABP}, отношение $BB_1 : B_1A_1 : A_1P$, S_{AA_1P}, S_{ABA_1}, S_{MBB_1}, $S_{AMB_1A_1}$. **272.** а) $BC = 12$ см, $A_1C_1 = 8$ см; б) $AC = 19{,}6$ см, $AB = 15$ см. **273.** а) 44 см; б) 31 см. **274.** а) 60°; б) 30°; в) 7 см; г) 6 см^2. **275.** 9 м. **276.** 6 см. **277.** 28 см. **278.** 38°. **279.** 12 см. **280.** 4 см. **283.** 4 см; 8 см. **284.** 2 : 5. **285.** 9 : 7. **286*.** 12 см. **287*.** 14 см. **288*.** а) 9 см и 24 см; б) 8 см и 9 см. **291.** При $A_1C_1 = 5$ треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними (2-й признак подобия). **292.** $\triangle FGE \backsim \triangle KMN$ по трем сторонам (3-й признак подобия). **293.** а) 10,5 см; б) 45 см. **295.** $P_{ABC} : P_{KNM} = 3 : 2$. **296.** а) 78 см; б) 12 см. **297.** 3,75 см. **299.** 96 см^2. **300.** а) 4 см; б) 12 см; в) 9 см. **303.** 96 см^2. **304.** 48 см. **305.** 7 см. **306.** 5 см. **307.** 20 см. **308.** а) 4; б) 6; в) 12. **310.** а) 6; б) 9. **312.** а) 3 см; б) 9 см. **313.** а) 12 м; б) 1 см и 3 см; в) 8 см. **314.** а) 30 см; б) 1120 м. **315*.** 21 см. Указание: воспользуйтесь тем, что соответствующие высоты в подобных треугольниках относятся как их соответствующие стороны. Обозначьте $MN = KH = x$, $BK = 30 - x$ и составьте пропорцию. **316*.** 20 см^2. Указание. Продлите отрезок AM до пересечения с прямой BC в точке N и рассмотрите две пары подобных треугольников: $\triangle AMD$ и $\triangle NMC$, $\triangle BPN$ и $\triangle KPA$. **318.** а) 4 см; б) 10 см; в) 32 см. **319.** 21 см. **320.** 4 см. **321.** 3 см; 4 см. **322.** $3\sqrt{5}$ см. **323.** 76°. **324*.** 75 см^2. **326.** а) Увеличится в 4 раза; б) увеличится в 9 раз; в) увеличится в 6,25 раза; г) уменьшится в 100 раз. **327.** 40 см^2. **328.** а) 4 : 9; б) 8 : 5. **329.** 1 : 9. **330.** 40 см^2. **331.** $9\frac{3}{8}$ м^2. **332.** 160 см^2. **333.** 18 м^2. **334.** а) 24 см^2; б) $2\sqrt{S_1S_2}$ (см. «Наглядная геометрия, 8 класс» Гл. 3. Ключевая задача 10); в) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. **335.** а) 96 см^2; б*) $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$ (см. «Наглядная геометрия, 8 класс» Гл. 3. Ключевая задача **5.**) **336.** 24 см^2. **337.** $\frac{1}{3}$. **338*.** 8 см^2 (см. «Наглядная геометрия, 8 класс» Гл. 3. Ключевая задача **3**). **339*.** 30 см^2. **340*.** 10 см. Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников ABH и BCH и теоремой о площадях подобных треугольников. **341*.** 6 см^2. **342*.** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. **344.** 4. **345.** 21. **346.** 15. **347.** 4. **348.** 5. **349.** 60 см^2. **350.** $12\sqrt{3}$.

Глава IV

352. а) 50°; б) 55°; в) 31°. **353.** а) 62°; б) 150°; в) 8 см. **354.** а) 150°; б) 6 см. **355.** 24 см. **356.** 99°. **357.** а) 5 см; б) 9 см^2. **358.** 6 см. **360.** 24 см. **361.** 8, 10. **362*.** 5 кв. единиц. **365.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB. **366.** а) Пересекаются; б) касаются внешним образом; в) расположены внешним образом. **367.** 11 м. **368.** 280 см. **369.** 24 см^2. **370.** 4 см. **371.** 6 м. **372.** 8 м. **373.** 9 см. **375.** 53°. **376*.** 1,44 см и 36 см. **377*.** 6 см. **381.** а) $\smile AC = 80°$, $\angle ABC = 40°$; б) $\smile AC = 100°$, $\smile BC = 80°$; в) $\smile AB = 116°$. **382.** а) 24 см; б) $24\sqrt{2}$ см; в) 48 см; г) 24 см. **383.** а) 45°; б) 30°; в) 42°. **384.** 102°, 102°, 156°. **385.** а) 64°; б) 42°8′; 21°4′; в) 40°; 80°; 80°. **386.** 140°. **387.** 84°. **388.** 100°. **389.** а) 6 см; б) 26 см; в) 7 см. **391.** а) $4\sqrt{3}$ см^2; б) 32 см^2. **392.** 26°. **393.** 52°. **394.** 30°. **395.** б) 18 см; в) 60 см^2. **396.** $18\sqrt{3}$ см^2. **398*.** 40°. **399.** Указание. Проведите отрезки AC и BD. **400.** Проведите из центра окружности перпендикуляры к указанным хордам. **401.** а) 70°; б) 130°; в) 110°. **402.** а) 40°; б) 37°30′; в) 80°. **403.** 72°. **404.** 40°. **405.** 50°. **406.** 78°. **407.** 52°. **408.** 65°. **409.** а) 88°; б) 28°. **411*.** 60°. **414.** 4 см. **415.** 12 см. **416.** 22 см. **417.** 6 см. **418.** 6,5 см. Указание. а) Выразите градусные меры углов BAN и CAN через градусные меры дуг, заключенных внутри этих углов. **419.** 8 см. **420.** 1 см. **421*.** 42 см. **422*.** 6 см.

СОДЕРЖАНИЕ

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Казаков Валерий Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 8 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник *Е. А. Ждановская*. Художественные редакторы *Н. В. Кузьменкова, О. Н. Карпович*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*. Корректоры *В. С. Бабеня, О. С. Козицкая, Е. П. Тхир, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 08.06.2018. Формат $70\times100^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,25 + 0,33 форз. Уч.-изд. л. 11,01 + 0,49 форз. Тираж 116 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.